

VERHANDELINGEN
DER
KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN
WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE
(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen).

DEEL IX
MET 32 PLATEN

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER
April 1908

California Academy of Sciences

Presented by Koninklijke Akademie
van Wetenschappen,
Amsterdam.

January _____, 1907.



VERHANDELINGEN
DER
KONINKLIJKE AKADEMIE
VAN
WETENSCHAPPEN

EERSTE SECTIE

(Wiskunde - Natuurkunde - Scheikunde - Kristallenleer - Sterrenkunde -
Weerkunde en Ingenieurswetenschappen).

DEEL IX

MET 32 PLATEN

AMSTERDAM — JOHANNES MÜLLER

April 1908

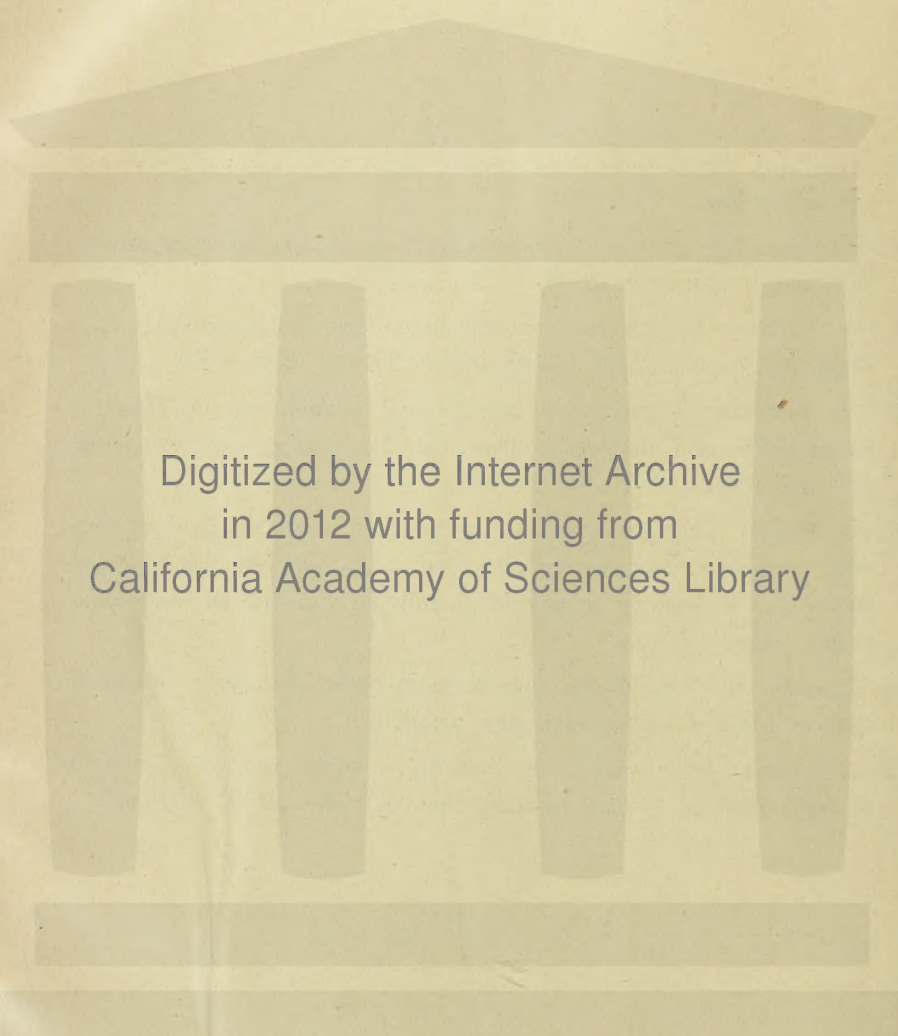


13274



INHOUD.

1. A. TOXOPEUS. De aantallen kwadratische hyperruimten in de ruimte van vijf afmetingen.
 2. C. HOITSEMA. Liquefactie (ongelijkslachtigheid) van binaire metaallegeringen (met medewerking van J. W. A. HAAGEN SMIT).
 3. J. W. GILTAY. Experimental-Untersuchung über die Möglichkeit einer Doppeltelefonie mittels unterbrochener Klänge. (Mit 4 Tafeln).
 4. P. H. SCHOUTE. Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und des Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume (2^{te} Abhandlung). (Mit 18 Tafeln).
 5. FRED. SCHUH. Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvoor de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen. (Met 8 platen).
 6. A. BRESTER JR. Essai d'une explication du mécanisme de la périodicité dans le soleil et les étoiles rouges variables.
 7. MRS. A. BOOLE STOTT and P. H. SCHOUTE. On the sections of a block of eight cells by a space rotating about a plane. (With 2 plates).
-



Digitized by the Internet Archive
in 2012 with funding from
California Academy of Sciences Library

DE AANTALLEN KWADRATISCHE HYPERRUIMTEN IN DE RUIMTE VAN VIJF AFMETINGEN

DOOR

Dr. A. TOXOPEUS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel IX. N^o. 1.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1905.

DE AANTALLEN KWADRATISCHE HYPERRUIMTEN IN DE RUIMTE VAN VIJF AFMETINGEN

DOOR

Dr. A. TOXOPEUS.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel IX. N^o. 1.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1905.

DE AANTALLEN KWADRATISCHE HYPERRUIMTEN IN DE RUIMTE VAN VIJF AFMETINGEN

DOOR

Dr. A. TOXOPEUS.

Combinaties met herhaling van elementen.

In mijne dissertatie behandelde ik de combinaties van de elementen. Nu ga ik de combinaties met herhaling van een element, d. z. de figuren: $(a\alpha bcd)_{15}$, $(ab\beta cd)_{15}$, $(a\alpha bcd e)_{16}$, $(ab\beta cde)_{16}$, $(abc\gamma de)_{16}$, $(abcd\delta e)_{16}$, $(abcde\epsilon)_{16}$ geven, waar α , β , γ , δ , ϵ achtereenvolgens een tweede punt, een tweede lijn, een tweede vlak, een tweede ruimte en een tweede hyperruimte aanwijzen.

$$\alpha) \quad (a\alpha b)_{10}$$

Met behulp van de formules van B) a_1) verkrijgt men:

$$\begin{aligned} a^2 &= ab - b_e; a^3 = ab_c - b_i, a^2\alpha = a\alpha b - \\ &- \alpha b_e; a^4 = ab_b - b_o, a^3\alpha = a\alpha b_c - ab_i, a^2\alpha^2 = a\alpha(b_c + b_e) - \\ &- (a + \alpha)b_i + b_d; \text{enz.} \end{aligned}$$

Daar wij een eindig aantal figuren beschouwen, geeft de term met $a\alpha$ aan, wat wij moeten hebben, want de andere termen zouden aan b meer dan 8 voorwaarden opleggen. Noemen wij μ_i het aantal voorwaarden, waaraan b moet voldoen, dan verkrijgen wij:

$$\begin{aligned} a^2\alpha\mu_7 &= a\alpha b\mu_7, a^3\alpha\mu_6 = a\alpha b_c\mu_6, a^2\alpha^2\mu_6 = a\alpha(b_c + b_e)\mu_6, \\ a^4\alpha\mu_5 &= a\alpha b_b\mu_5, a^3\alpha^2\mu_5 = a\alpha(b_b + b_i)\mu_5, a^5\alpha\mu_4 = a\alpha b_a\mu_4, \\ a^4\alpha^2\mu_4 &= a\alpha(b_a + b_o)\mu_4, a^3\alpha^3\mu_4 = a\alpha(b_a + b_d + b_o)\mu_4, \\ a^5\alpha^2\mu_3 &= a\alpha b_n\mu_3, a^4\alpha^3\mu_3 = a\alpha(b_m + b_n)\mu_3, a^5\alpha^3\mu_2 = a\alpha b_n\mu_2, \\ a^4\alpha^4\mu_2 &= a\alpha(b_k + b_n)\mu_2, a^5\alpha^4\mu_1 = a\alpha b_s\mu_1, a^5\alpha^5 = a\alpha B. \end{aligned}$$

Nu kan men de figuren $a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q$ berekenen waar $p_1 + p_2 + q = 10$, b. v. $a^4 \alpha^3 b^3 = a \alpha (b_m + b_u) b^3 = a \alpha (b^3 b_m + b^3 b_u) = 3 a \alpha B$. En evenzoo $a^p b^q$, waar $p = p_1 + p_2$; b. v. $a^7 b^3 = \frac{7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3} (a^4 \alpha^3 b^3) = 21 \cdot 1 + 35 \cdot 3 = 126$.

Evenzoo vindt men de figuren $a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r$, waar $p_1 + p_2 + q + r = 13$, met behulp van deze uitkomsten en die van $B) a_1$). En daarna de aantallen $a^p b^q c^r$, waar $p + q + r = 13$; de aantallen $a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s$, waar $p_1 + p_2 + q + r + s = 15$, de aantallen $a^p b^q c^r d^s$, waar $p + q + r + s = 15$; de aantallen $a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s e^t$, waar $p_1 + p_2 + r + s + t = 16$ en de aantallen $a^p b^q c^r d^s e^t$, waar $p + q + r + s + t = 16$.

De aantallen $(a \alpha b c d e)_{16}$ zijn ook uit $(a \alpha b c d)_{15}$ af te leiden met behulp van de formules:

$$\begin{aligned} (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s e)_{16} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s)_{16}, \quad \text{waar } p + q + r + s = 15; \\ (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s e^2)_{16} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^{s+1})_{15}, \quad \text{waar } p + q + r + s = 14; \\ (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s e^3)_{16} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s d_c)_{15}, \quad \text{waar } p + q + r + s = 13; \\ (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s e^4) &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s d_d)_{15}, \quad \text{waar } p + q + r + s = 12; \\ (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s e^5)_{16} &= (a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q c^r d^s d_e)_{15}, \quad \text{waar } p + q + r + s = 11. \end{aligned}$$

Ik laat deze hulpaantallen hier weg, maar geef de formules die mij tot controle dienden:

$$\begin{aligned} (550) &= (541) = (532) = (523) = (514) = B \\ (540) &= (531) = (522) = (513) = b_s \\ (530) &= (521) = (512) = b_u, \end{aligned}$$

waar de figuur $(a^{p_1} \alpha^{p_2} b^q)_{10}$ of $(p_1 p_2 q)_{10}$ beschouwd is. En evenzoo:

$$\begin{aligned} (550) &= \frac{1}{2} (442) = \frac{1}{3} (433) = \frac{1}{4} (424) = \frac{1}{4} (415) = \frac{1}{6} (334) = \\ &= \frac{1}{9} (325) = \frac{1}{9} (316) = \frac{1}{14} (226) = \frac{1}{14} (216) = \frac{1}{14} (118) = B; \\ (540) &= \frac{1}{2} (441) = \frac{1}{3} (432) = \frac{1}{4} (423) = \frac{1}{4} (414) = \frac{1}{6} (333) = \\ &= \frac{1}{9} (324) = \frac{1}{9} (315) = \frac{1}{14} (225) = \frac{1}{14} (216) = \frac{1}{14} (117) = b_s. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} (431) &= (440 + (521) ; 431 = \frac{1}{2} (332) = \frac{1}{3} (323) = \frac{1}{3} (314); \\ (430) &= \frac{1}{2} (331) = \frac{1}{3} (322) = \frac{1}{3} (313); \end{aligned}$$

$$(521) + (431) = (422) + (413) ; (520) + (430) = (421) + (412) ;$$

$$(420) = (411) ; (321) = (312) ; (320) = (311) ;$$

$$5 (431) - (521) = (224) = (215) = (116) ;$$

$$5 (430) - (520) = (223) = (214) = (115) ;$$

$$2 (321) - (411) = (222) = (213) = (114) ;$$

$$2 (320) - (410) = (221) = (212) = (113) ;$$

$$(220) = (211) = (112) ; (210) = (111).$$

$$\beta) \quad (a b \beta c)_{14}$$

Na deze aantallen geven wij aan, hoe men de aantallen $(a b c \beta d)_{15}$ kan vinden met behulp van de tabel voor $(a c d)_{13}$. Hiervoor moet men eerst de reductieformules voor $b^{\eta_1} \beta^{\eta_2}$ afleiden.

Wij hebben vroeger gevonden:

$$\begin{aligned} b^2 &= b(a+c) - (a^2 + c_d); \\ \text{dus } b^2 \beta &= b \beta (a+c) - \beta (a^2 + c_d). \end{aligned}$$

Als wij nu in $b^{\eta_1} \beta^{\eta_2} b^2$ en evenzoo β^2 gaan vervangen door hare waarden, vindt men:

$$\begin{aligned} b^2 \beta^2 &= b \beta (a+c)^2 - (b+\beta)(a+c)(a^2+c_d) + (a^2+c_d)^2, \\ \dots, b^7 \beta^6 &= b \beta (a+c) \{ [2c_b - (a-c)^2] - (a^2+c_d)(2ac+c_b) \} \\ &\quad \times < (a+c)^2 (2ac+c_b) [2ac+c_b - 2(a^2+c_d)] - \\ &\quad - (a^2+c_d) \{ (a+c)^2 [2c_b - (a-c)^2] - (a^2+c_d)(2ac+c_b) \} > - \\ &\quad - b(a^2+c_d) \{ (a+c)^2 [2c_b - (a-c)^2] - (a^2+c_d)(2ac+c_b) \} \times \\ &\quad \times < (a+c)^2 (2ac+c_b) [2ac+c_b - 2(a^2+c_d)] - \\ &\quad - (a^2+c_d) \{ (a+c)^2 [2c_b - (a-c)^2] - (a^2+c_d)(2ac+c_b) \} > - \\ &\quad - \beta(a+c)^2 (a^2+c_d)(2ac+c_b) [2ac+c_b - 2(a^2+c_d)] \times \\ &\quad \times \{ [2c_b - (a-c)^2]^2 - (a^2+c_d)(2ac+c_b) \} + \\ &\quad + (a+c)(a^2+c_d)^2 (2ac+c_b) [2ac+c_b - 2(a^2+c_d)] \times \\ &\quad \times \{ (a+c)^2 [2c_b - (a-c)^2] - (a^2+c_d)(2ac+c_b) \}. \end{aligned}$$

Daar wij later een eindig aantal figuren beschouwen, hebben wij slechts den term met $b\beta$ te nemen. Als μ_i een aantal voorwaarden aanduidt, waaraan het punt a en het vlak c moeten voldoen, dan verkrijgen wij na herleiding met behulp van de formules voor het vlak c :

$$\begin{aligned} b^2 \beta \mu_{10} &= b \beta (a+c) \mu_{10}; \\ b^3 \beta \mu_9 &= b \beta (2ac+c_b) \mu_9; \\ b^2 \beta^2 \mu_9 &= b \beta (a^2+2ac+c_b+c_d) \mu_9; \\ b^4 \beta \mu_8 &= b \beta (-a^3+a^2c+3ac_b+ac_d+c_a-c_e) \mu_8; \\ b^3 \beta^2 \mu_8 &= b \beta (2a^2c+3ac_b+2ac_d+c_a+c_m) \mu_8; \\ b^5 \beta \mu_7 &= b \beta (-a^4-2a^3c+3a^2c_b+2a^2c_d+4ac_a - \\ &\quad - 2ac_e+2ac_m-2c_f) \mu_7; \\ b^4 \beta^2 \mu_7 &= b \beta (-a^4+4a^2c_b+2a^2c_d+4ac_a+4ac_m+ \\ &\quad + c_k-c_l) \mu_7; \\ b^3 \beta^3 \mu_7 &= b \beta (4a^2c_b+4a^2c_d+4ac_a+4ac_m+c_h) \mu_7; \\ b^6 \beta \mu_6 &= b \beta (-4a^4c-2a^3c_b+6a^2c_a+6a^2c_m-2ac_f - \\ &\quad - 3ac_k+3ac_l-ac_v-c_g-3c_i) \mu_6; \\ b^5 \beta^2 \mu_6 &= b \beta (-A-3a^4c+a^3c_b+7a^2c_a+7a^2c_m+ac_f+ \\ &\quad + 5ac_k-3ac_l+ac_v-2c_g-2c_i) \mu_6; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
b^4 \beta^3 \mu_6 &= b \beta (-2 a^4 c + a^3 c_b + 2 a^3 c_d + 7 a^2 c_a + 2 a^2 c_e + \\
&\quad + 9 a^2 c_m + a c_f + 5 a c_k - 2 a c_l + a c_r + c_h - c_i) \mu_6; \\
b^7 \beta \mu_5 &= b \beta (-2 A c - 9 a^4 c_b - 5 a^4 c_d + 4 a^3 c_e + 4 a^3 c_m + \\
&\quad + 2 a^2 c_f + 10 a^2 c_k - 5 a^2 c_l + 2 a^2 c_r - 6 a c_g + \\
&\quad + 2 a c_h - 12 a c_l + c_i - 2 c_n) \mu_5; \\
b^6 \beta^2 \mu_5 &= b \beta (-4 A c - 6 a^4 c_b - 4 a^4 c_d + 4 a^3 c_e + 4 a^3 c_m + \\
&\quad + 4 a^2 c_f + 11 a^2 c_k - 4 a^2 c_l + 4 a^2 c_r - 6 a c_g + \\
&\quad + 4 a c_h - 6 a c_l - c_i - 4 c_n) \mu_5; \\
b^5 \beta^3 \mu_5 &= b \beta (-2 A c - 5 a^4 c_b - 4 a^4 c_d + 4 a^3 c_e + 4 a^3 c_r + \\
&\quad + 8 a^3 c_m + 6 a^2 c_f + 11 a^2 c_k - 4 a^2 c_l + 6 a^2 c_r - \\
&\quad - 2 a c_g + 6 a c_h - 4 a c_l - 2 c_n) \mu_5; \\
b^4 \beta^4 \mu_5 &= b \beta (-2 A c - 5 a^4 c_b - a^4 c_d + 4 a^3 c_e + 4 a^3 c_r + \\
&\quad + 8 a^3 c_m + 4 a^2 c_f + 9 a^2 c_k + a^2 c_l + 8 a^2 c_r - \\
&\quad - 2 a c_g + 6 a c_k - 4 a c_l + c_i + c_j) \mu_5; \\
b^8 \beta \mu_4 &= b \beta (-9 A c_b - 7 A c_d - 15 a^4 c_a + 3 a^4 c_e - 12 a^4 c_m + \\
&\quad + 10 a^3 c_f + 5 a^3 c_k + 3 a^3 c_l + 10 a^3 c_r - 9 a^2 c_g + \\
&\quad + 13 a^2 c_h - 12 a^2 c_l + a c_i + a c_j - 16 a c_n + 3 c_p - \\
&\quad - c_q) \mu_4; \\
b^7 \beta^2 \mu_4 &= b \beta (-11 A c_b - 7 A c_d - 9 a^4 c_a - a^4 c_e - 10 a^4 c_m + \\
&\quad + 6 a^3 c_f + 10 a^3 c_k - a^3 c_l + 6 a^3 c_r - 4 a^2 c_g + \\
&\quad + 19 a^2 c_h - 3 a^2 c_l - 5 a c_i + 2 a c_j - 18 a c_n - \\
&\quad - c_p - 2 c_q) \mu_4; \\
b^6 \beta^3 \mu_4 &= b \beta (-8 A c_b - 8 A c_d - 8 a^4 c_a - 8 a^4 c_m + 12 a^2 c_f + \\
&\quad + 10 a^3 c_k + 12 a^3 c_r - 4 a^2 c_g + 20 a^2 c_h - a c_i + \\
&\quad + 3 a c_j - 10 a c_n - c_p - 3 c_q) \mu_4; \\
b^5 \beta^4 \mu_4 &= b \beta (-8 A c_b - 5 A c_d - 8 a^4 c_a + 3 a^4 c_e - 5 a^4 c_m + \\
&\quad + 12 a^3 c_f + 10 a^3 c_k + 3 a^3 c_l + 12 a^3 c_r + 2 a^2 c_g + \\
&\quad + 23 a^2 c_h + 3 a^2 c_l + 4 a c_j - 8 a c_n + 2 c_p) \mu_4; \\
b^8 \beta^2 \mu_3 &= b \beta (-24 A c_a - 4 A c_e - 28 A c_m - 2 a^4 c_f - \\
&\quad - 10 a^4 c_k + 6 a^4 c_l - 2 a^4 c_r + 12 a^3 c_g + 36 a^3 c_h + \\
&\quad + 16 a^3 c_l - 8 a^2 c_i + 14 a^2 c_j - 24 a^2 c_n - 12 a c_p - \\
&\quad - 16 a c_q + 2 c_s) \mu_3; \\
b^7 \beta^3 \mu_3 &= b \beta (-20 A c_a - 10 A c_e - 30 A c_m + 3 a^4 c_f - \\
&\quad - 9 a^4 c_k + 8 a^4 c_l + 3 a^4 c_r + 8 a^3 c_g + 38 a^3 c_h + \\
&\quad + 26 a^3 c_l - 7 a^2 c_i + 16 a^2 c_j - 18 a^2 c_n - 6 a c_p - \\
&\quad - 14 a c_q - 2 c_s) \mu_3; \\
b^6 \beta^4 \mu_3 &= b \beta (-20 A c_a - 4 A c_e - 24 A c_m + 6 a^4 c_f - 9 a^4 c_k + \\
&\quad + 8 a^4 c_l + 6 a^4 c_r + 20 a^3 c_g + 44 a^3 c_h + 32 a^3 c_l - \\
&\quad - 4 a^2 c_i + 16 a^2 c_j - 12 a^2 c_n - 8 a c_q + c_s) \mu_3; \\
b^5 \beta^5 \mu_3 &= b \beta (-20 A c_a - 24 A c_m + 6 a^4 c_f - 9 a^4 c_k + \\
&\quad + 14 a^4 c_l + 6 a^4 c_r + 20 a^3 c_g + 44 a^3 c_h + 32 a^3 c_l + \\
&\quad + 20 a^2 c_j - 4 a^2 c_n - 8 c_q + 4 c_s) \mu_3;
\end{aligned}$$

$$b^8 \beta^3 \mu_2 = b \beta (-31 A c_f - 39 A c_k + 6 A c_l - 31 A c_n + 30 a^4 c_g + \\ + 19 a^4 c_h + 47 a^4 c_i - 10 a^3 c_j + 41 a^3 c_k + 20 a^3 c_n - \\ - 26 a^2 c_p - 29 a^2 c_q - 11 a c_s - C) \mu_2;$$

$$b^7 \beta^4 \mu_2 = b \beta (-22 A c_f - 39 A c_k - 6 A c_l - 22 A c_v + 33 a^4 c_g + \\ + 22 a^4 c_h + 53 a^4 c_i + a^3 c_j + 43 a^3 c_k + 42 a^3 c_n - \\ - 23 a^2 c_p - 29 a^2 c_q + a c_s - C) \mu_2;$$

$$b^6 \beta^5 \mu_2 = b \beta (-22 A c_f - 39 A c_k + 12 A c_l - 22 A c_v + \\ + 45 a^4 c_g + 28 a^4 c_h + 59 a^4 c_i + 5 a^3 c_j + 47 a^3 c_k + \\ + 50 a^3 c_n - 11 a^2 c_p - 17 a^2 c_q + 4 a c_s + 2 C) \mu_2;$$

$$b^8 \beta^4 \mu_1 = b \beta (-26 A c_g - 66 A c_h - 36 A c_i + 24 a^4 c_j + \\ + 50 a^4 c_k + 152 a^4 c_n - 32 a^3 c_p - 36 a^2 c_s) \mu_1;$$

$$b^7 \beta^5 \mu_1 = b \beta (+16 A c_g - 80 A c_h + 30 a^4 c_i + 50 a^4 c_j + \\ + 164 a^4 c_n - 8 a^3 c_p + 24 a^3 c_q - 24 a^2 c_s + 6 a C) \mu_1;$$

$$b^6 \beta^6 \mu_1 = b \beta (16 A c_g - 80 A c_h + 40 a^4 c_i + 60 a^4 c_j + 184 a^4 c_n - \\ - 8 a^3 c_p + 24 a^3 c_q - 9 a^2 c_s + 6 a C) \mu_1;$$

$$b^8 \beta^5 \mu_0 = b \beta (51 A c_i - 50 A c_j + 128 A c_n + 93 a^4 c_p + \\ + 182 a^4 c_q - 67 a^3 c_s - 9 a^2 C) \mu_0;$$

$$b^7 \beta^6 \mu_0 = b \beta (61 A c_i - 40 A c_j + 168 A c_n + 123 a^4 c_p + \\ + 212 a^4 c_q - 52 a^3 c_s + 6 a^2 C) \mu_0.$$

Met behulp van deze formules zijn nu de aantallen $(a b \beta c)_{13}$ berekend, terwijl daarbij de tabel voor $(a c)_{11}$ en de formules voor c gebruikt zijn, b. v.:

$$(a^2 b^5 \beta^3 c^3) = (2533) = a^2 c^3 \cdot b \beta [-2 A c - 5 a^4 c_b - 4 a^4 c_d + \\ + 4 a^3 c_a + 4 a^3 c_e + 8 a^3 c_m + 6 a^2 c_f + 11 a^2 c_k - 4 a^2 c_l + \\ + 6 a^2 c_v - 2 a c_g + 6 a c_h - 4 a c_i - 2 c_n] = b \beta [0 + 0 + 0 + \\ + 4 A (c_j + 2 c_n) + 4 A (c_i + 2 c_n) + 8 A (2 c_i + 2 c_j + 6 c_n) + \\ + 6 a^4 (3 c_p + 2 c_q) + 11 a^4 (5 c_p + 6 c_q) - 4 a^4 (6 c_p + 5 c_q) + \\ + 6 a^4 (2 c_p + 3 c_q) - 2 a^3 \cdot 3 c_s + 6 a^3 \cdot 3 c_s - 4 a^3 \cdot 2 c_s - \\ - 2 a^2 \cdot 2 C] = b \beta [0 + 0 + 0 + 4 (1 + 0) + 4 (0 + 0) + \\ + 8 (0 + 2 + 0) + 6 (0 + 2) + 11 (0 + 6) - 4 (0 + 5) + \\ + 6 (0 + 3) - 6 + 18 - 8 - 4] = 96.$$

Uit de aantallen $(p q_1 q_2 r)_{13}$ vindt men de aantallen $(p q r)_{13}$ met behulp van de binominaalcoëfficiënten. Evenzoo bepaalt men de aantallen $(p q_1 q_2 r s)_{15}$ met behulp van de tabel voor $(a c d)_{13}$ en hieruit $(p q r s)_{15}$. En overeenkomstig de aantallen $(p q_1 q_2 r s t)_{16}$ met de tabel voor $(a c d e)_{14}$ en hieruit de aantallen $(p q r s t)_{16}$. Men kan de aantallen $(p q_1 q_2 r s t)_{16}$ berekenen met behulp van de reductieformules:

$$\begin{aligned}
a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s e &= a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s \dots p + q_1 + q_2 + r + s = 15, \\
a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s e^2 &= a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^{s+1} \dots p + q_1 + q_2 + r + s = 14, \\
a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s e^3 &= a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s d_e \dots p + q_1 + q_2 + r + s = 13, \\
a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s e^4 &= a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s d_d \dots p + q_1 + q_2 + r + s = 12, \\
a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s E &= a^p b^{q_1} \beta^{r_2} c^r d^s d_e \dots p + q_1 + q_2 + r + s = 11.
\end{aligned}$$

Ik laat de hulpaantallen hier weg.

$$\gamma) (a b c \gamma d)_{15}.$$

Voor de aantallen $(a^p b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s) = (p q r_1 r_2 s)$, $(a^p b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s c^t) = (p q r_1 r_2 s t)$ heeft men reductieformules voor $c^{r_1} \gamma^{r_2}$ noodig. Daartoe gebruiken wij de betrekkingen:

$$c^2 = c_b + c_d, \quad b c = b_c + c_d, \quad c d = c_b + d_c.$$

Met behulp hiervan vinden wij:

$$\begin{aligned}
c^2 &= c_b + c_d = c d - d_c + b c - b_c = (b + d) c - (b_c + d_c) \\
c^2 \gamma &= c \gamma (b + d) - \gamma (b_c + d_c); \quad c^3 \gamma = c^2 \gamma (b + d) - c \gamma (b_c + d_c) = \\
&= \gamma (b + d) [(b + d) c - (b_c + d_c)] - c \gamma (b_c + d_c) = c \gamma (2 b d + \\
&+ b_c + d_d) - \gamma (b + d) (b_c + d_c); \quad c^2 \gamma^2 = c (b + d) [(b + d) \gamma - \\
&- (b_c + d_c)] - (b_c + d_c) [(b + d) \gamma - (b_c + d_c)], \text{ enz.}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c^6 \gamma^4 &= c \gamma (2 B + 4 b_s d - 4 b_k d_a - 4 b_k d_c - 42 b_n d_o - 36 b_n d_e + \\
&+ 20 b_m d_d + 28 b_m d_i - 48 b_u d_i - b_a d_b + 8 b_a d_e + 14 b_a d_o + \\
&+ 60 b_d d_b - b_d d_e + 55 b_d d_o + 55 b_o d_b + 14 b_o d_e + 72 b_o d_o + \\
&+ 20 b_b d_m + 28 b_i d_m - 48 b_i d_u - 4 b_c d_k - 36 b_c d_n - 4 b_c d_k - \\
&- 42 b_e d_n + 4 b d_s + 2 D) - c (-12 B d - 27 b_s d_a - 25 b_s d_c + \\
&+ 11 b_k d_d + 23 b_k d_i + 10 b_n d_d + 41 b_n d_i + 43 b_m d_b - 12 b_m d_e + \\
&+ 29 b_m d_o + 27 b_u d_b - 28 b_u d_e - 8 b_u d_o - 16 b_a d_m - 28 b_a d_n + \\
&+ 43 b_d d_m + 27 b_d d_u + 29 b_o d_m + 36 b_o d_u + 11 b_b d_k + 10 b_b d_n + \\
&+ 23 b_i d_k + 41 b_i d_n - 25 b_c d_s - 27 b_e d_s - 12 b D) - \gamma (-9 B d - \\
&- 27 b_s d_a - 9 b_s d_c + 15 b_k d_d + 27 b_k d_i + 18 b_n d_d + 53 b_n d_i + \\
&+ 55 b_m d_b + 41 b_m d_o + 39 b_u d_b - 16 b_u d_e + 4 b_u d_o - 16 b_a d_u + \\
&+ 55 b_d d_m + 39 b_d d_u + 41 b_o d_m + 4 b_o d_u + 15 b_b d_k + 18 b_b d_n + \\
&+ 27 b_i d_k + 53 b_i d_n - 9 b_c d_s - 27 b_e d_s - 9 b D) + (6 B d_a + \\
&+ B d_c + 4 b_s d_d + 60 b_s d_i + 21 b_k d_b - 5 b_k d_e + 9 b_k d_o + \\
&+ 39 b_n d_b - 9 b_n d_e + 27 b_n d_o + 96 b_m d_m + 84 b_m d_i + 84 b_u d_m + \\
&+ 72 b_u d_u - 5 b_a d_k - 9 b_a d_n + 21 b_d d_k + 39 b_d d_n + 9 b_o d_k + \\
&+ 27 b_o d_n + 4 b_b d_s + 60 b_i d_s + b_c D + 6 b_e D), \text{ enz.}
\end{aligned}$$

Ik geef terstond de formules, zooals die bruikbaar zijn en na een lange herleiding te verkrijgen zijn met de formules voor b en d ; d. z.:

$$c^2 \gamma \mu_{11} = c \gamma (b + d) \mu_{11};$$

$$c^3 \gamma \mu_{10} = c \gamma (b_e + 2 b d + d_a) \mu_{10};$$

$$c^2 \gamma^2 \mu_{10} = c \gamma (b_e + b_e + 2 b d + d_a + d_c) \mu_{10};$$

$$c^4 \gamma \mu_9 = c \gamma (-b_b + b_c d + 3 b_e d + 3 b d_a + b d_c - d_i) \mu_9;$$

$$c^3 \gamma^2 \mu_9 = c \gamma (b_i + 2 b_c d + 3 b_e d + 3 b d_a + 2 b d_c + d_i) \mu_9;$$

$$c^5 \gamma \mu_8 = c \gamma (-b_a - 2 b_o - 2 b_b d + 2 b_i d + 3 b_c d_a + 2 b_e d_c + 6 b_e d_a + 3 b_e d_c - 2 b d_d + 2 b d_i - d_e - 2 d_o) \mu_8;$$

$$c^4 \gamma^2 \mu_8 = c \gamma (-b_a - b_o + 4 b_i d + 4 b_c d_a + 2 b_c d_c + 6 b_e d_a + 4 b_e d_c + 4 b d_i - d_e - d_o) \mu_8;$$

$$c^3 \gamma^3 \mu_8 = c \gamma (b_d + 4 b_i d + 4 b_c d_a + 4 b_c d_c + 6 b_e d_a + 4 b_e d_c + 4 b d_i + d_b) \mu_8;$$

$$c^6 \gamma \mu_7 = c \gamma (-b_m - 2 b_u - 4 b_a d + b_d d - 6 b_o d - 2 b_b d_a + 8 b_i d_a + 6 b_i d_c + 6 b_c d_i - 2 b_e d_d + 8 b_e d_i + b d_b - 4 b d_e - 6 b d_o - d_m - 2 d_u) \mu_7;$$

$$c^5 \gamma^2 \mu_7 = c \gamma (-2 b_m - 3 b_u - 3 b_a d + 2 b_d d - 2 b_o d + b_b d_a + 11 b_i d_a + 7 b_i d_c + 7 b_c d_i + b_e d_d + 11 b_e d_i + 2 b d_b - 3 b d_c - 2 b d_o - 2 d_m - 3 d_u) \mu_7;$$

$$c^4 \gamma^3 \mu_7 = c \gamma (-b_u - 2 b_a d + 3 b_d d - b_o d + b_b d_a + 2 b_b d_c + 11 b_i d_a + 9 b_i d_c + 2 b_c d_d + 9 b_c d_i + b_e d_d + 11 b_e d_i + 3 b d_b - 2 b d_c - b d_o - d_u) \mu_7;$$

$$c^7 \gamma \mu_6 = c \gamma (b_k - 6 b_m d - 12 b_u d - 9 b_a d_a - 5 b_a d_c + 6 b_d d_a + 5 b_d d_c - 9 b_o d_a - 3 b_o d_c + 4 b_b d_d + 4 b_b d_i + 4 b_i d_d + 24 b_i d_i + 5 b_c d_b - 5 b_c d_e - 3 b_c d_o + 6 b_e d_b - 9 b_e d_e - 9 b_e d_o - 6 b d_m - 12 b d_u + d_k) \mu_6;$$

$$c^6 \gamma^2 \mu_6 = c \gamma (-b_k - 3 b_n - 6 b_m d - 12 b_u d - 6 b_a d_a - 4 b_a d_c + 9 b_d d_a + 7 b_d d_c + 4 b_b d_i + 4 b_i d_d + 28 b_i d_i + 7 b_c d_b - 4 b_c d_e + 9 b_e d_b - 6 b_e d_e - 6 b d_m - 12 b d_u - d_k - 3 d_n) \mu_6;$$

$$c^5 \gamma^3 \mu_6 = c \gamma (-2 b_n - 2 b_m d - 8 b_u d - 5 b_a d_a - 4 b_a d_c + 10 b_d d_a + 7 b_d d_c + b_o d_a + 2 b_o d_c + 4 b_b d_i + 8 b_b d_i + 8 b_i d_d + 32 b_i d_i + 7 b_c d_b - 4 b_c d_e + 2 b_c d_o + 10 b_e d_b - 5 b_e d_e + b_e d_o - 2 b d_m - 8 b d_u - 2 d_n) \mu_6;$$

$$c^4 \gamma^4 \mu_6 = c \gamma (b_k + b_n - 2 b_m d - 8 b_u d - 5 b_a d_a - b_a d_c + 10 b_d d_a + 10 b_d d_c + b_o d_a + 5 b_o d_c + 4 b_b d_d + 8 b_b d_i + 8 b_i d_d + 32 b_i d_i + 10 b_c d_b - b_c d_e + 5 b_c d_o + 10 b_e d_b - 5 b_e d_e + b_e d_o - 2 b d_m - 8 b d_u + d_k + d_n) \mu_6.$$

$$c^8 \gamma \mu_5 = c \gamma (4 b_s + b_k d - 9 b_n d - 15 b_m d_a - 9 b_m d_c - 36 b_u d_a - 24 b_u d_c + 3 b_a d_d - 12 b_a d_i + 8 b_d d_d + 28 b_d d_i +$$

$$\begin{aligned}
& + 13 b_o d_d + 8 b_o d_i + 8 b_b d_b + 3 b_b d_c + 13 b_b d_o + \\
& + 28 b_i d_b - 12 b_i d_e + 8 b_i d_o - 9 b_c d_m - 24 b_c d_u - \\
& - 15 b_e d_m - 36 b_e d_u + b d_k - 9 b d_n + 4 d_s) \mu_5; \\
c^4 \gamma^2 \mu_5 = & c \gamma (b_s - 5 b_k d - 18 b_n d - 9 b_m d_a - 4 b_m d_c - \\
& - 30 b_u d_a - 20 b_u d_c - b_a d_d - 10 b_a d_i + 9 b_d d_d + \\
& + 35 b_d d_i + 5 b_o d_d + 16 b_o d_i + 9 b_b d_b - b_b d_e + \\
& + 5 b_b d_o + 35 b_i d_b - 10 b_i d_e + 16 b_i d_o - 4 b_c d_m - \\
& - 20 b_c d_u - 9 b_e d_m - 30 b_e d_u - 5 b d_k - 18 b d_n + \\
& + d_s) \mu_5; \\
c^6 \gamma^3 \mu_5 = & c \gamma (-b_s - b_k d - 12 b_n d - 3 b_m d_a - 4 b_m d_c - \\
& - 24 b_u d_a - 20 b_u d_c - 8 b_a d_i + 10 b_d d_d + 37 b_d d_i + \\
& + 12 b_o d_d + 24 b_o d_i + 10 b_b d_b + 12 b_b d_o + 37 b_i d_b - \\
& - 8 b_i d_e + 24 b_i d_o - 4 b_c d_m - 20 b_c d_u - 3 b_e d_m - \\
& - 24 b_e d_u - b d_k - 12 b d_m - d_s) \mu_5; \\
c^5 \gamma^4 \mu_5 = & c \gamma (3 b_s - 9 b_n d - 3 b_m d_a + 2 b_m d_c - 24 b_u d_a - \\
& - 14 b_u d_c + 3 b_u d_d - 5 b_a d_i + 13 b_d d_d + 40 b_d d_i + \\
& + 15 b_o d_d + 27 b_o d_i + 13 b_b d_b + 3 b_b d_e + 15 b_b d_o + \\
& + 40 b_i d_b - 5 b_i d_e + 27 b_i d_o + 2 b_c d_m - 14 b_c d_u - \\
& - 3 b_e d_m - 24 b_e d_u - 9 b d_n + 3 d_s) \mu_5; \\
c^9 \gamma \mu_4 = & c \gamma (4 B + 14 b_s d - 5 b_k d_a - 6 b_k d_c - 48 b_n d_a - \\
& - 39 b_n d_c + 10 b_m d_d - 10 b_m d_i - 4 b_u d_d - 80 b_u d_i - \\
& - 4 b_u d_b + 16 b_u d_e + 21 b_a d_o + 46 b_d d_b - 4 b_d d_e - \\
& + 36 b_d d_o + 36 b_o d_b + 21 b_o d_e + 66 b_o d_o + 10 b_b d_m - \\
& - 4 b_b d_u - 10 b_i d_m - 80 b_i d_u - 6 b_c d_k - 39 b_c d_n - \\
& - 5 b_e d_k - 48 b_e d_n + 14 b d_s + 4 D) \mu_4; \\
c^8 \gamma^2 \mu_4 = & c \gamma (4 B - 4 b_s d - 14 b_k d_a - 8 b_k d_c - 60 b_n d_a - \\
& - 42 b_n d_c + 12 b_m d_d + 12 b_m d_i - 8 b_u d_d - 64 b_u d_i - \\
& - 4 b_u d_b + 6 b_u d_e + 4 b_a d_o + 56 b_d d_b - 4 b_d d_e + \\
& + 44 b_d d_o + 44 b_o d_b + 4 b_o d_e + 42 b_o d_o + 12 b_b d_m - \\
& - 8 b_b d_u + 12 b_i d_m - 64 b_i d_u - 8 b_c d_k - 42 b_c d_n - \\
& - 14 b_e d_k - 60 b_e d_n - 4 b d_s + 4 D) \mu_4; \\
c^7 \gamma^3 \mu_4 = & c \gamma (B - 4 b_s d - 5 b_k d_a - 7 b_k d_c - 45 b_n d_a - 39 b_n d_c + \\
& + 8 b_m d_d + 16 b_m d_i - 12 b_u d_d - 60 b_u d_i - b_a d_b + \\
& + 8 b_a d_e + 11 b_a d_o + 60 b_d d_b - b_d d_e + 52 b_d d_o + \\
& + 52 b_o d_b + 11 b_o d_e + 66 b_o d_o + 8 b_b d_m - 12 b_b d_u + \\
& + 16 b_i d_m - 60 b_i d_u - 7 b_c d_k - 39 b_c d_n - 5 b_e d_k - \\
& - 45 b_e d_n - 4 b d_s + D) \mu_4; \\
c^6 \gamma^4 \mu_4 = & c \gamma (2 B + 4 b_s d - 4 b_k d_a - 4 b_k d_c - 42 b_n d_a - \\
& - 36 b_n d_c + 20 b_m d_d + 28 b_m d_i - 48 b_u d_i - b_a d_b + \\
& + 8 b_a d_e + 14 b_a d_o + 60 b_d d_b - b_d d_e + 55 b_d d_o + \\
& + 55 b_o d_b + 14 b_o d_e + 72 b_o d_o + 20 b_b d_m + 28 b_i d_m -
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& -48 b_i d_u - 4 b_c d_k - 36 b_c d_n - 4 b_e d_k - 42 b_c d_n + \\
& + 4 b d_s + 2 D) \mu_4; \\
c^5 \gamma^5 \mu_4 &= c \gamma (5 B d + 4 b_s d - 4 b_k d_u - 42 b_n d_u - 24 b_n d_c + \\
& + 20 b_m d_d + 28 b_m d_i - 48 b_u d_i + 5 b_a d_b + 14 b_u d_e + \\
& + 20 b_a d_o + 66 b_d d_b + 5 b_d d_e + 61 b_d d_o + 61 b_o d_b + \\
& + 20 b_o d_e + 78 b_o d_o + 20 b_b d_m + 28 b_i d_m - 48 b_i d_u - \\
& - 24 b_c d_n - 4 b_e d_k - 42 b_e d_n + 4 b d_s + 5 D) \mu_4; \\
c^9 \gamma^2 \mu_3 &= c \gamma (18 B d - 39 b_s d_u - 31 b_s d_c + 4 b_k d_d - 21 b_k d_i - \\
& - 33 b_n d_d - 177 b_n d_i + 72 b_m d_b + 27 b_m d_e + \\
& + 102 b_u d_o - 48 b_u d_b + 33 b_u d_c + 3 b_u d_o + 27 b_u d_m + \\
& + 33 b_a d_u + 72 b_d d_m - 48 b_d d_u + 102 b_o d_m + 3 b_o d_u + \\
& + 4 b_b d_k - 33 b_b d_n - 21 b_i d_k - 177 b_i d_n - 31 b_c d_s - \\
& - 39 b_e d_s + 18 b D) \mu_3; \\
c^8 \gamma^3 \mu_3 &= c \gamma (9 B d - 27 b_s d_u - 25 b_s d_c - 10 b_k d_d - 19 b_k d_i - \\
& - 53 b_n d_d - 169 b_n d_i + 85 b_m d_b + 30 b_m d_e + \\
& + 113 b_u d_o - 36 b_u d_b + 35 b_u d_e + 13 b_u d_o + \\
& + 30 b_a d_m + 35 b_a d_u + 85 b_d d_m - 36 b_d d_u + \\
& + 113 b_o d_m + 13 b_o d_u - 10 b_b d_k - 53 b_b d_n - \\
& - 19 b_i d_k - 169 b_i d_n - 25 b_c d_s - 27 b_e d_s + 9 b D) \mu_3; \\
c^7 \gamma^4 \mu_2 &= c \gamma (15 B d - 15 b_s d_u - 27 b_s d_c + b_k d_d - 7 b_k d_i - \\
& - 38 b_n d_d - 151 b_n d_i + 88 b_m d_b + 33 b_m d_e + \\
& + 134 b_u d_o - 33 b_u d_b + 38 b_u d_e + 34 b_u d_o + \\
& + 33 b_a d_m + 38 b_a d_u + 88 b_d d_m - 33 b_d d_u + \\
& + 134 b_o d_m + 34 b_o d_u + b_b d_k - 38 b_b d_n - 7 b_i d_k - \\
& - 151 b_i d_n - 27 b_c d_s - 15 b_e d_s + 15 b D) \mu_3; \\
c^6 \gamma^5 \mu_2 &= c \gamma (18 B d - 15 b_s d_u - 11 b_s d_c + 5 b_k d_d - 3 b_k d_i - \\
& - 26 b_n d_d - 139 b_n d_i + 100 b_m d_b + 33 b_m d_e + \\
& + 146 b_u d_o - 21 b_u d_b + 50 b_u d_e + 46 b_u d_o + \\
& + 33 b_a d_m + 50 b_a d_u + 100 b_d d_m - 21 b_d d_u + \\
& + 146 b_o d_m + 46 b_o d_u + 5 b_b d_k - 26 b_b d_n - 3 b_i d_k - \\
& - 139 b_i d_n - 11 b_c d_s - 15 b_e d_s + 18 b D) \mu_3; \\
c^9 \gamma^3 \mu_1 &= c \gamma (27 B d_u + 22 B d_c - 80 b_s d_d - 192 b_s d_i - \\
& - 21 b_k d_b + 16 b_k d_e + 30 b_k d_o - 192 b_n d_b + \\
& + 33 b_n d_e - 141 b_n d_o + 348 b_m d_m + 168 b_m d_u + \\
& + 168 b_u d_m + 240 b_u d_u + 16 b_u d_k + 33 b_u d_n + \\
& + 21 b_d d_k - 192 b_d d_n + 30 b_o d_k - 141 b_o d_n - \\
& - 80 b_b d_s - 192 b_i d_s + 22 b_c D + 27 b_e D) \mu_2; \\
c^6 \gamma^4 \mu_2 &= c \gamma (42 B d_u + 22 B d_c - 88 b_s d_d - 184 b_s d_i + \\
& + 30 b_k d_b + 24 b_k d_e + 64 b_k d_o - 174 b_n d_b + \\
& + 48 b_n d_e - 84 b_n d_o + 348 b_m d_m + 168 b_m d_u + \\
& + 168 b_u d_m + 108 b_u d_u + 24 b_a d_k + 48 b_a d_n +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + 30 b_d d_k - 174 b_d d_n + 64 b_o d_k - 84 b_o d_n - \\
& - 88 b_b d_s - 184 b_i d_s + 22 b_c D + 42 b_e D) \mu_2; \\
c^7 \gamma^5 \mu_2 &= c \gamma (45 B d_a + 26 B d_c - 56 b_s d_d - 152 b_s d_i + \\
& + 36 b_k d_b + 30 b_k d_e + 74 b_k d_o - 168 b_n d_b + \\
& + 54 b_n d_e - 66 b_n d_o + 396 b_m d_m + 204 b_m d_n + \\
& + 204 b_u d_n + 96 b_u d_u + 28 b_a d_k + 72 b_a d_n + \\
& + 46 b_d d_k - 138 b_d d_n + 84 b_o d_k - 36 b_o d_n - \\
& - 56 b_b d_s - 152 b_i d_s + 26 b_c D + 45 b_e D) \mu_2; \\
c^6 \gamma^6 \mu_2 &= c \gamma (45 B d_a + 41 B d_c - 56 b_s d_d - 152 b_s d_i + \\
& + 46 b_k d_b + 28 b_k d_e + 84 b_k d_o - 138 b_n d_b + 72 b_n d_e - \\
& - 36 b_n d_o + 396 b_m d_m + 204 b_m d_n + 204 b_u d_m + \\
& + 96 b_u d_u + 28 b_a d_k + 72 b_a d_n + 46 b_d d_k - 138 b_d d_n + \\
& + 84 b_o d_k - 36 b_o d_n - 56 b_b d_s - 152 b_i d_s + 41 b_c D + \\
& + 45 b_e D) \mu_2; \\
c^9 \gamma^4 \mu_1 &= c \gamma (-43 B d_d + 16 B d_i - 356 b_s d_b - 60 b_s d_e - \\
& - 418 b_s d_o + 314 b_k d_m + 228 b_k d_u + 192 b_n d_m + \\
& + 582 b_n d_u + 314 b_m d_k + 192 b_m d_u + 228 b_u d_k + \\
& + 582 b_u d_n - 60 b_a d_s - 356 b_d d_s - 418 b_o d_s - \\
& - 43 b_b D + 16 b_i D) \mu_1; \\
c^8 \gamma^5 \mu_1 &= c \gamma (-22 B d_d + 40 B d_i - 352 b_s d_b - 56 b_s d_e - \\
& - 366 b_s d_o + 358 b_k d_m + 272 b_k d_u + 252 b_n d_m + \\
& + 582 b_n d_u + 582 b_u d_n + 358 b_m d_k + 252 b_m d_n + \\
& + 272 b_u d_k + 450 b_u d_n - 56 b_a d_s - 352 b_d d_s - \\
& - 366 b_o d_s - 22 b_b D + 40 b_i D) \mu_1; \\
c^7 \gamma^6 \mu_1 &= c \gamma (-7 B d_d + 55 B d_i - 312 b_s d_b - 168 b_s d_e - \\
& - 326 b_s d_o + 378 b_k d_m + 292 b_k d_u + 312 b_n d_m + \\
& + 642 b_n d_u + 378 b_m d_k + 312 b_m d_n + 292 b_u d_k + \\
& + 642 b_u d_n - 16 b_a d_s - 312 b_d d_s - 326 b_o d_s - \\
& - 7 b_b D + 55 b_i D) \mu_1; \\
c^9 \gamma^5 \mu_0 &= c \gamma (-180 B d_b - 158 B d_e - 353 B d_o - 510 b_s d_m + \\
& + 136 b_s d_u + 1024 b_k d_k + 824 b_k d_n + 824 b_n d_k + \\
& + 1365 b_n d_n - 510 b_m d_s + 136 b_u d_s - 158 b_a D - \\
& - 180 b_d D - 353 b_o D) \mu_0; \\
c^8 \gamma^6 \mu_0 &= c \gamma (-160 B d_b - 80 B d_e - 328 B d_o - 352 b_s d_m + \\
& + 296 b_s d_u + 588 b_k d_k + 848 b_k d_n + 848 b_n d_k + \\
& + 1956 b_n d_n - 352 b_s d_m + 296 b_s d_u - 80 b_a D - \\
& - 160 b_d D - 328 b_o D) \mu_0; \\
c^7 \gamma^7 \mu_0 &= c \gamma (-115 B d_b - 103 B d_e - 487 B d_o - 352 b_s d_m + \\
& + 296 b_s d_u + 608 b_k d_k + 908 b_k d_n + 908 b_n d_k + \\
& + 2268 b_n d_n - 352 b_m d_s + 296 b_u d_s - 103 b_a D - \\
& - 115 b_d D - 487 b_o D) \mu_0.
\end{aligned}$$

met behulp van deze formules en de tabel voor $(b\ d)_{12}$ berekent men de aantallen $b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s$ en hieruit de aantallen $b^q c^{r_1+r_2} d^s$. Evenzoo vindt men de aantallen $a^p b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s$ met deze formules en de tabel voor $(a\ b\ d)_{13}$; hieruit de aantallen $a^p b^q c^{r_1+r_2} d^s$. En op dezelfde wijze worden de aantallen $a^p b^q c^{r_1} \gamma^{r_2} d^s e^t$ met deze formules en de tabel voor $(a\ b\ d\ e)_{14}$ gevonden, en hieruit de aantallen $a^p b^q c^{r_1+r_2} d^s e^t$.

Het is duidelijk, dat voor de combinatie met herhaling van de d de formules voor de b en voor de combinaties met herhaling van de e de formules voor de a de weerkeeringen zijn, daar in de ruimte van vijf afmetingen de a en de e , de b en d tegenover elkaar staan, terwijl het vlak tegenover zichzelf staat.

De aantallen kegelsneden.

Een kegelsnede kan in R^5 aan 14 enkelvoudige voorwaarden voldoen. Inderdaad; het vlak is door 9 bepaald en de kegelsnede in dat vlak door 5. Men beschouwt stelsels kegelsneden $(a_2'' b_2'' c'')_{13}$, waar a_2 aanduidt, dat de gegeven hyperruimte E de kegelsnede aanraakt; b_2 dat de gegeven ruimte D een punt der kegelsnede bevat; c dat het gegeven vlak C het vlak der kegelsnede in een punt snijdt. Met behulp van de ontaarding $(a^p b^{q_1+q_2} c^r)_{13} = \xi$ en $(a^{p_1+p_2} b^q c^r)_{13} = \eta$ vindt men dan de aantallen kegelsneden $(a_2'' b_2'' c'')_{14}$. Daar ieder hyperruimte dubbel telt, moet ξ met 2^p en daar ieder ruimte door twee samengevallen punten van η gaat, moet η met 2^q vermenigvuldigd worden.

Men heeft de twee formules: $2\ b_2 = \eta + a_2 + 2\ c$; $2\ a_2 = \xi + b_2$; waaruit de recurrente betrekkingen $3\ a_2 = 2\ \xi + \eta + 2\ c$; $3\ b_2 = \xi + 2\ \eta + 4\ c$ volgen.

Evenzoo vindt men de aantallen kegelsneden $(a_2\ b_2\ c\ d)_{16}$ met de ontaarding $(a^p b^{q_1+q_2} c^r d^s) = \xi$ en $(a^{p_1+p_2} b^q c^r d^s)_{15} = \eta$. En de aantallen kegelsneden $(a_2\ b_2\ c\ d\ e)_{17}$ vindt men met behulp van $(a^p b^{q_1+q_2} c^r d^s e^t) = \xi$ en $(a^{p_1+p_2} b^q c^r d^s e^t)_{16} = \eta$. (Zie: „Les hyperquadrriques dans l'espace de quatre dimensions" van den heer Dr. P. H. Schoute, in de verh. v. d. Kon. Ak. v. Wet. te Amsterdam, deel VII, stuk 4.)

De aantallen oppervlakken van den tweeden graad.

Een oppervlak van den tweeden graad O^2 is door 17 enkelvoudige voorwaarden bepaald. Men beschouwt een ∞^1 aantal O^2 , die een eindig aantal ontaarding bevatten, met name de kwadra-

tische kegels ϕ , de ψ d. i. een dubbellijn, die twee vlakken en twee punten draagt en de χ , d. i. een oneindig dunne O^2 , m. a. w. een dubbelvlak, waarin een kegelsnede ligt.

De aantallen kegels.

Nu is de ϕ door de ruimte, den top en 5 beschrijvende lijnen, d. i. door $8 + 3 + 5 = 16$ voorwaarden bepaald. De aantallen ϕ vindt men met behulp van de formules:

$$\begin{aligned} 3 b_2 &= 2 x + y + 4 a + 2 d, \\ 3 c_2 &= x + 2 y + 2 a + 4 d, \end{aligned}$$

waar

$$\begin{aligned} x &= (a^p b^q c^{r_1+r_2} d^s e^t) \times 2^q, \\ y &= (a^p b^{q_1+q_2} c^r d^s e^t) \times 2^r. \end{aligned}$$

Om deze formules te bewijzen, beschouwen wij een vlakkenbundel en laten die twee vlakken overeenkomen, die door de twee snijpunten van de draagruimte met eenzelfde kegel van het stelsel gaan. De $2 c_2$ coïncidenties van deze overeenkomst (c_2, c_2) vindt men terug in de y keer, dat de draagruimte het dubbelvlak van een y snijdt, in de b_2 keer, dat de draagruimte aan den kegel raakt en de d keer, dat de ruimte van den kegel de as van den bundel snijdt, tweemaal geteld; dus:

$$2 c_2 = y + b_2 + 2 d.$$

Beschouwt men evenzoo een ruimtenbundel, waarbij overeenkomstige ruimten aan eenzelfde kegel raken, dan verkrijgt men $2 b_2$ coïncidenties in de overeenkomst (b_2, b_2) , die uit drie groepen punten bestaan; eerstens de x punten, waarin de dubbellijn van de ont-aarding x de draaghyperruimte snijdt, tweedens de c_2 punten die het vlak, waardoor de ruimten van den bundel gaan, door ϕ gesneden wordt en de a punten, waarbij de top van den kegel in de draaghyperruimte ligt, tweemaal geteld, zoodat:

$$2 b_2 = x + c_2 + 2 a.$$

De ψ kan men vinden met behulp van de formules voor $a^{p_1} a^{p_2}$ en $c^{r_1} \gamma^{r_2}$ en de tabel voor $(b d e)_{13}$; want eerst vindt men de aantallen $(a^p a^p b^q c^r \gamma^r d^s e^t)$ en daarna de aantallen $(a^{p_1+p_2} b^q c^{r_1+r_2} d^s e^t) = \psi$.

$$\text{De aantallen } \nu(a_2^p b_2^q c_2^r d^s)_{16}.$$

Voor een enkelvoudig oneindig stelsel van O^2 's in R_5 heeft men de drie betrekkingen:

$$\begin{aligned} 2 c_2 &= \chi + 2 d_2 + b_2, \\ 2 b_2 &= \psi + c_2 + a_2, \\ 2 a_2 &= \phi + b_2; \end{aligned}$$

welke men aldus bewijst:

Beschouwt men eerst in een gegeven ruimte een vlakkenbundel en laat men twee vlakken met elkaar overeenstemmen, die door de snijpunten van de draagruimte met eenzelfde ν van het gegeven stelsel gaan. Aldus verkrijgt men een correspondentie (c_2, c_2) met 2 c_2 coïncidenties. Op de kromme van den graad c_2 , die in de draagruimte de meetkundige plaats der snijpunten met de ν van het stelsel is, vinden wij drie groepen van punten, die een coïncidentie kenmerken, de χ -snijpunten van de draagruimte met de dubbelvlakken der ontaarding χ , de b_2 -punten van aanraking met de ν , die de draagruimte aanraken en de 2 d_2 -snijpunten van de draagruimte der ν , waarvan de ruimte de as van den bundel snijdt. Dus:

$$2 c_2 = \chi + b_2 + 2 d_2.$$

Tweedens beschouwt men in een gegeven hyperruimte een ruimtenbundel, en laat die twee ruimten overeenkomen, die eenzelfde ν aanraken. De 2 b_2 coïncidenties van deze overeenkomst (b_2, b_2) vindt men terug in de ψ -snijpunten van de draaghyperruimten met de dubbellijnen van ψ , in de c_2 keer, dat het basisvlak door een ν gesneden wordt en de a_2 keer, dat een ν de draagruimte raakt, zoodat:

$$2 b_2 = \psi + c_2 + a_2.$$

Ten derde beschouwt men een hyperruimtebundel, waarvan een gegeven ruimte de basisruimte is en laat men de twee hyperruimten overeenkomen, die eenzelfde ν van het stelsel aanraken. Dus bestaan de 2 a_2 coïncidenties van de overeenkomst (a_2, a_2) in de kegels ϕ van het stelsel en in de b_2 ν , die de basisruimte aanraken; waaruit:

$$2 a = \phi + b_2.$$

De aantallen O^2 's zijn nu te berekenen met de formules:

$$\begin{aligned} 4 a_2 &= 3 \phi + 2 \psi + \chi + 2 d, & 4 b_2 &= 2 \phi + 4 \psi + 2 \chi + 4 d, \\ 4 c_2 &= \phi + 2 \psi + 3 \chi + 6 d, \end{aligned}$$

waar ϕ met $2''$, ψ met $2'$ en χ met $2'$ vermenigvuldigd moet worden.

De aantallen $\kappa, \lambda, \mu, \nu$ van een enkelvoudig oneindig stelsel $(a_2 b_2 c_2 d_2 e)_{19}$.

In een E is de kwadratische ruimte een figuur van 19 afmetingen. Men verkrijgt dus een enkelvoudig oneindig stelsel kwadratische

ruimten door deze figuren 18 enkelvoudige voorwaarden op te leggen.

Bij de kwadratische ruimten moet men vier enkelvoudige voorwaarden a_2, b_2, c_2, d_2 onderscheiden. Door a_2, b_2, c_2 wijzen wij achtereenvolgens aan, dat een gegeven hyperruimte E , een gegeven ruimte D , een gegeven vlak C de kwadratische ruimte aanraken, hetgeen insluit, dat de kwadratische ruimte door de hyperruimte volgens een kegel, door de ruimte D volgens twee lijnen (reëel of imaginair), door het vlak C in twee samengevallen punten gesneden wordt. Verder drukt d_2 uit, dat een gegeven lijn de kwadratische ruimte snijdt. Wij zullen dus stelsels kwadratische ruimten beschouwen, welke wij door de symbolen $(a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s)_{19}$ of ${}_2(p q r s)_{19}$ zullen voorstellen.

Een enkelvoudig oneindig stelsel kwadratische ruimten laat een eindig aantal van ieder der ontaarding $\alpha, \lambda, \mu, \nu$ toe, welke achtereenvolgens gekenmerkt zijn door het bezit van een dubbelpunt, een dubbellijn, een dubbelvlak en een dubbelruimte.

De ontaarding α .

De ontaarding α is een kwadratische hyperkegel; deze hyperkegel is bepaald, als men den top en negen beschrijvende lijnen kent en de hyperruimte, waarin de kegel ligt; zoodat α van $5 + 4 + 9 = 18$ afmetingen is.

Beschouwt men in een gegeven vlak een stralenbundel, dan wordt ieder lijn door d_2 hyperkegels ontmoet, zoodat er $2 d_2$ coïncidenties zijn. Aan den anderen kant snijdt het beschouwde vlak de dubbelvlakken van z_1 , die de weerkeerige van z_3 is (zie beneden); verder de c_1 raakpunten van het draagvlak en de $2e$ coïncidenties, welke ontstaan, doordat het centrum van den stralenbundel in de e van den hyperkegel komt. Dus:

$$2 d_2 = z_1 + c_2 + 2 e.$$

Ten tweede beschouwt men in een gegeven ruimte een vlakkenbundel en laat die vlakken overeenkomen, welke aan eenzelfde hyperkegel raken; dat geeft $2 c_2$ coïncidenties. Aan den anderen kant verkrijgt men een coïncidentie door de snijding van de dubbellijnen van $z_2 = \alpha^p b^{q_1+q_2} c^r d^{s_1+s_2} e^t$ met de draagruimte; verder nog b_2 , doordat de draagruimte een hyperkegel raakt; eindelijk nog d_2 , doordat de as van den vlakkenbundel een hyperkegel snijdt; zoodat:

$$2 c_2 = z_2 + b_2 + d_2.$$

Beschouwt men ten derde een ruimtebundel in een gegeven hyperruimte, dan raken aan iedere ruimte b_2 hyperkegels; dat geeft

2 b_2 coïncidenties. Deze coïncidenties zijn ook, als het volgt te verkrijgen; eerstens raken er c_2 hyperkegels aan het draagvlak van den ruimtebundel; tweedens gebeurt het a keer, dat de top van een hyperkegel in de gegeven hyperruimte komt te liggen; derdens liggen in de hyperruimte z_3 dubbelkegels; zoodat:

$$2 b_2 = c_2 + a + z_3.$$

De hyperkegels \varkappa zijn door de formules

$$\begin{aligned} 4 b_2 &= 6 a + 2 e + 3 z_1 + 2 z_2 + z_3, \\ 4 c_2 &= 4 a + 4 e + 2 z_1 + 4 z_2 + 2 z_3, \\ 4 d_2 &= 2 a + 6 e + z_1 + 2 z_2 + 3 z_3, \end{aligned}$$

te bepalen, waarbij $z_1 (p q r s t) = z_3 (t s r q p)$ en z_3 een dubbelruimte is die een kegel draagt; waarbij $z_2 = a^p b^{q_1+q_2} c^r d^{s_1+s_2} e^t$; tevens neme men $z_1 \times 2^q, z_2 \times 2^r, z_3 \times 2^s$.

De ontaarding λ .

Verder is λ de weerkerige van ζ_3 , zooals blijkt, als men van de ontaarding λ , die bestaat uit de lijnen, die op een gegeven lijn en een gegeven kegelsnede rusten, terwijl de lijn het vlak kruist, de kegelsnede op twee wijzen laat ontaarden.

De ontaarding μ .

De μ is een dubbelruimte, welke een kegelsnede draagt, en is te berekenen met de formules:

$$3 a_2 = 2 \zeta_1 + \zeta_2 + 2 c, \quad 3 b_2 = \zeta_1 + 2 \zeta_2 + 4 c,$$

waar

$$\begin{aligned} \zeta_1 &= (a^p b^{q_1+q_2} c^r d^{s_1+s_2} e^t) 2^p, \\ \zeta_2 &= (a^{p_1+p_2} b^q c^r d^{s_1+s_2} e^t) 2^q. \end{aligned}$$

De ontaarding ν .

En de ν stelt een dubbelhyperruimte voor die een O^2 draagt.

De aantallen kwadratische ruimten $(a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s e^t)_{19}$.

Voor een enkelvoudig oneindig aantal kwadratische ruimten heeft men de vier betrekkingen:

$$\begin{aligned} 2 d_2 &= \nu + c_2 + 2 e, \\ 2 c_2 &= \mu + b_2 + d_2, \\ 2 b_2 &= \lambda + a_2 + c_2, \\ 2 a_2 &= \varkappa + b_2. \end{aligned}$$

13274

Op een willekeurig vlak beschouwen wij een stralenbundel en laten wij met elkaar de twee stralen overeenkomen, die eenzelfde kwadratische ruimte snijden. Men vindt dus $2 d_2$ coïncidenties van de overeenkomst (d_2, d_2) terug in de ν snijpunten van het draagvlak C met de dubbelruimten van de ontaarding ν , de c_2 punten van aanraking van C met kwadratische ruimten van het stelsel en $2 e$ coïncidenties, welke ontstaan, doordat het centrum van den stralenbundel in de e van de hyperruimte komt. Dus:

$$2 d_2 = \nu + c_2 + 2 e.$$

Tweedens laten wij in een willekeurige ruimte de vlakken van een vlakkenbundel overeenstemmen, die eenzelfde kwadratische ruimte van het stelsel aanraken. Aldus doen wij tusschen de vlakken van den bundel een correspondentie (c_2, c_2) ontstaan, waarvan men de $2 c_2$ coïncidentievlakken terugvindt met behulp van de kromme van den graad $c_2 + d_2$, die in D de meetkundige plaats der punten van aanraking met kwadratische ruimten van het stelsel met de vlakken van den bundel vormt. Op deze kromme zijn drie groepen van punten, die een coïncidentie kenmerken: de μ snijpunten van D met de dubbelvlakken van de ontaardingen μ , de b_2 punten van aanraking van D met kwadratische ruimten van het stelsel en de lijn B d_2 keer geteld; dus:

$$2 c_2 = \mu + b_2 + d_2.$$

Derdens beschouwen wij in een willekeurige hyperruimte de ruimten van een ruimtenbundel en laten twee ruimten overeenkomen, die eenzelfde kwadratische ruimte aanraken. De $2 b_2$ coïncidenties van deze overeenkomst (b_2, b_2) vindt men terug in de λ keer, dat het gebeurt, dat de dubbellijn van λ de draaghyperruimte snijdt, in de a_2 keer, dat de kwadratische ruimte de draaghyperruimte raakt en de c_2 keer, dat de kwadratische ruimte het vlak raakt, waardoor de ruimten van den bundel gaan, zoodat:

$$2 b_2 = \lambda + a_2 + c_2.$$

Vierdens beschouwen wij in de vijfdimensionale ruimte een hyper-ruimtenbundel, waarbij twee hyperruimten met elkaar overeenkomen, die eenzelfde kwadratische ruimte raken. De $2 a_2$ coïncidenties van deze correspondentie (a_2, a_2) vindt men terug in de κ keer, dat het dubbelpunt in de R_5 komt, en de b_2 keer, dat de ruimte, waardoor alle hyperruimten van den bundel gaan, door de kwadratische ruimte wordt aangeraakt, zoodat:

$$2 a_2 = \kappa + b_2.$$

De formules, die de aantallen kwadratische hyperruimten helpen berekenen, zijn:

$$\begin{aligned} 5 a_2 &= 2 e + 4 \kappa + 3 \lambda + 2 \mu + \nu, \\ 5 b_2 &= 4 e + 3 \kappa + 6 \lambda + 4 \mu + 2 \nu, \\ 5 c_2 &= 6 e + 2 \kappa + 4 \lambda + 6 \mu + 3 \nu, \\ 5 d_2 &= 8 e + \kappa + 2 \lambda + 3 \mu + 4 \nu, \end{aligned}$$

waarbij κ met 2^p , λ met 2^q , μ met 2^r , ν met 2^s vermenigvuldigd is.

De aantallen kwadratische hyperruimten

$$(a_2^p b_2^q c_2^r d_2^s e_2^t)_{20}.$$

Voor een enkelvoudig oneindig aantal kwadratische hyperruimten heeft men de vijf betrekkingen:

$$\begin{aligned} 2 e_2 &= \pi_5 + d_2, \\ 2 d_2 &= \pi_4 + e_2 + c_2, \\ 2 c_2 &= \pi_3 + b_2 + d_2, \\ 2 b_2 &= \pi_2 + a_2 + c_2, \\ 2 a_2 &= \pi_1 + b_2. \end{aligned}$$

Omdat in R_5 de kwadratische hyperruimten haar eigen weerkeerge is, moeten deze betrekkingen zich evenzoo gedragen. Inderdaad; de eerste en de tweede hebben de vijfde en de vierde tot weerkeerge, terwijl de derde weerkeurig tegenover zichzelf staat. In de formules bezitten π_1 , π_2 , π_3 , π_4 en π_5 achtereenvolgens een dubbelpunt, een dubbellijn, een dubbelvlak, een dubbelruimte en een dubbelhyperruimte.

De aantallen π_1 en π_5 .

De π_5 zijn hyperruimten, die een kwadratische ruimte dragen, en π_1 is de weerkeerge van π_5 ; dus deze zijn bekend.

De aantallen π_2 en π_4 .

De π_4 zijn dubbelruimten die een ν dragen, waarbij de formules:

$$\begin{aligned} (\pi_4 p q r s 2) &= (\nu p q r s), (\pi_4 p q r s 3) = (\nu p, q, r, s + 1), \\ (\pi_4 p q r s 4) &= 4 (\nu p q r s 3) + 3 (\nu p, q, r, s + 2), \\ (\pi_4 p q r s 5) &= 5 (\nu p q r s 4) + 10 (\nu p, q, r, s + 1, 3), \\ (\pi_4 p q r s 6) &= 16 (\nu p q r s 5) + 5 (\nu p, q, r, s + 1, 4) + 10 (\nu p q r s + 2, 3), \\ (\pi_4 p q r s 7) &= 35 (\nu p, q, r, s + 2, 4) - 14 (\nu p, q, r, s + 1, 5), \\ (\pi_4 p q r s 8) &= 35 (\nu p, q, r, s + 3, 4) - 14 (\nu p, q, r, s + 2, 5), \\ (\pi_4 p q r s 9) &= 126 (\nu p, q, r, s + 3, 5), \\ (\pi_4 p, q, r, s 10) &= 126 (\nu p, q, r, s + 4, 5) \end{aligned}$$

de aantallen π_4 helpen berekenen; en π_2 is de weerkeerige van π_4 .

De aantallen π_3 .

En de ontaarding π_3 bestaat uit de vlakken, die rusten op een vlak, waarin een kegelsnede ligt, en een punt gemeen heeft met een tweede kegelsnede, terwijl de vlakken der kegelsneden elkaar kruisen. De raakhyperruimten gaan door de tweede kegelsnede en raken aan de eerste kegelsnede.

Om de aantallen π_3 uit de ontaarding η_1 en η_2 , waarbij η_1 een dubbelruimte is, welke een kegelsnede draagt, terwijl de ruimte zelve de doorsnede van twee hyperruimten is, en waarbij η_2 een dubbelhyperruimte is, die een μ draagt, te bepalen, beschouwt men op een lijn B een punteninvolutie, waarbij een puntenpaar de doorsnijding met eenzelfde π_3 is. Het is duidelijk, dat men $2c$ coïncidenties verkrijgt, welke aan den anderen kant ontstaan uit de d_2 keer, dat het gebeurt, dat de drager een π_3 aanraakt, en uit de η_2 keer, dat de drager de dubbelhyperruimten van η_2 snijdt; dus:

$$2c = d_2 + \eta_2.$$

Beschouwt men nu nog een stralenbundel in een vlak, dan verkrijgt men een overeenkomst (d_2, d_2) . De $2d_2$ coïncidenties ontstaan aan den anderen kant uit de η_1 keer tengevolge van het snijden van het draagvlak en de dubbelruimte van η_1 , uit de e_2 keer van het gaan der hyperruimte door het centrum van den stralenbundel en de $2c$ keer, dat het draagvlak het dubbelvlak van π_3 ontmoet, zoodat:

$$2d_2 = e_2 + \eta_1 + 2c.$$

Tevens staat π_3 in R_5 weerkeurig tegenover zichzelf. De aantallen π_3 worden bepaald door de formules:

$$3d_2 = 4c + 2\eta_1 + \eta_2, \quad 3e_2 = 2c + \eta_1 + 2\eta_2.$$

Hierbij is η_1 met 2^s en η_2 met 2^t te vermenigvuldigen.

Om de bovenstaande formules voor de aantallen kwadratische hyperruimten te bewijzen, beschouwen wij op een lijn een punteninvolutie, waarbij die twee punten met elkaar overeenkomen, welke eenzelfde kwadratische ruimte snijden; dit geeft $2e_2$ coïncidenties, welke teruggevonden worden in de snijpunten van de lijn (drager) met de dubbele hyperruimte van de ontaarding π_5 ; en de raakpunten der lijn met kwadratische hyperruimten; hieruit volgt, dat:

$$2e_2 = \pi_5 + d_2.$$

Beschouw nu op een vlak een stralenbundel met een bepaalden top; we laten de raaklijnen aan eenzelfde kwadratische hyperruimte overeenkomen, hetgeen $2 d_2$ coïncidenties geeft. Deze $2 d_2$ coïncidenties vindt men terug in de c_2 kwadratische hyperruimten, welke het draagvlak raken, in de π_4 keer, dat het vlak een dubbelruimte van de ontaarding π_4 snijdt, en in de e_2 malen, dat een kwadratische hyperruimte door den top van den stralenbundel gaat. Dus:

$$2 d_2 = \pi_4 + c_2 + e_2$$

Beschouw ten derde een vlakkenbundel in een gegeven ruimte. Laat die twee vlakken overeenstemmen, welke eenzelfde kwadratische hyperruimte aanraken. Hierdoor verkrijgt men $2 c_2$ coïncidenties, welke ook ontstaan door de π_3 snijpunten van de draagruimte met de dubbelvlakken der ontaarding π_3 , door de d_2 kwadratische hyperruimten, welke de lijn (as) aanraken en door de b_2 kwadratische hyperruimten, welke de draagruimten raken, zoodat:

$$2 c_2 = \pi_3 + d_2 + b_2.$$

De vierde en vijfde zijn de weerkeerigen van de tweede en de eerste; d. i.:

$$2 b_2 = \pi_2 + a_2 + c_2,$$

$$2 a_2 = \pi_1 + b_2.$$

Hieruit vindt men:

$$6 a_2 = 5 \pi_1 + 4 \pi_2 + 3 \pi_3 + 2 \pi_4 + \pi_5,$$

$$6 b_2 = 4 \pi_1 + 8 \pi_2 + 6 \pi_3 + 4 \pi_4 + 2 \pi_5,$$

$$6 c_2 = 3 \pi_1 + 6 \pi_2 + 9 \pi_3 + 6 \pi_4 + 3 \pi_5,$$

$$6 d_2 = 2 \pi_1 + 4 \pi_2 + 6 \pi_3 + 8 \pi_4 + 4 \pi_5,$$

$$6 e_2 = \pi_1 + 2 \pi_4 + 3 \pi_3 + 4 \pi_2 + 5 \pi_5,$$

waarbij π_1 met $2''$, π_2 met $2'$, π_3 met $2''$, π_4 met 2^s , π_5 met $2'$ vermenigvuldigd moet worden.

Tengevolge van de symmetrie heeft men $(pqrst) = (tsrqp)$, zoodat de aantalen $(pqrst)$ worden:

(0,0,20,0,0) = 61.520.094	(0,4,14,2,0) = 62.779.392	(0,6,11,3,0) = 60.604.416
(0,1,19,0,0) = 61.520.094	(0,4,13,3,0) = 66.100.992	(0,6,10,4,0) = 65.882.112
(0,1,18,1,0) = 62.920.560	(0,4,12,4,0) = 67.933.184	(0 6 9 5 0) = 69.973.504
(0,2,18,0,0) = 60.119.628	(0,5,15,0,0) = 48.111.264	(0 6 8 6 0) = 72.235.008
(0,2,17,1,0) = 62.920.560	(0,5,14,1,0) = 53.943.936	(0,7,13,0,0) = 36.127.104
(0,2,16,2,0) = 64.440.192	(0,5,13,2,0) = 59.457.792	(0,7,12,1,0) = 42.213.376
(0,3,17,0,0) = 57.318.696	(0,5,14,3,0) = 62.268.800	(0,7,11,2,0) = 48.689.152
(0,3,16,1,0) = 61.400.928	(0,5,11,4,0) = 67.933.184	(0,7,10,3,0) = 55.326.720
(0,3,15,2,0) = 64.440.192	(0,5,10,5,0) = 69.984.256	(0 7 9 4 0) = 61.790.720
(0,3,14,3,0) = 66.100.992	(0,6,14,0,0) = 42.278.592	(0 7 8 5 0) = 67.625.984
(0,4,16,0,0) = 53.236.464	(0,6,13,1,0) = 48.430.080	(0 7 7 6 0) = 72.062.976
(0,4,15,1,0) = 58.361.664	(0,6,12,2,0) = 54.646.784	(0 7 6 7 0) = 74.180.352

(0,8,12,0,0) = 30.040.832	(0,14,3,3,0) = 12.729.104	(1,1,4,14,0) = 12.209.088
(0,8,11,1,0) = 35.737.600	(0,14,2,4,0) = 16.005.472	(1,1,3,15,0) = 9.038.944
(0,8,10,2,0) = 42.051.584	(0,14,1,5,0) = 20.027.114	(1,1,2,16,0) = 6.601.264
(0 8 9 3 0) = 48.862.720	(0,14,0,6,0) = 24.486.032	(1,1,1,17,0) = 4.761.204
(0 8 8 4 0) = 55.955.456	(0,15,5,0,0) = 4.543.680	(1,1,0,18,0) = 3.403.094
(0 8 7 5 0) = 62.992.768	(0,15,4,1,0) = 5.818.752	(1,1,17,0,1) = 67.121.958
(0 8 6 6 0) = 69.160.704	(0,15,3,2,0) = 7.428.848	(1,1,16,1,1) = 68.999.088
(0 8 5 7 0) = 73.285.280	(0,15,2,3,0) = 9.452.736	(1,2,17,0,0) = 54.517.764
(0 8 4 8 0) = 74.304.384	(0,15,1,4,0) = 11.983.830	(1,2,16,1,0) = 59.881.296
(0,9,11,0,0) = 24.344.064	(0,15,0,5,0) = 15.131.172	(1,2,15,2,0) = 64.440.192
(0,9,10,1,0) = 29.423.616	(0,16,4,0,0) = 3.268.608	(1,2,14,3,0) = 67.761.792
(0 9 9 2 0) = 35.240.448	(0,16,3,1,0) = 4.208.656	(1,2,13,4,0) = 69.422.592
(0 9 8 3 0) = 41.769.984	(0,16,2,2,0) = 5.404.960	(1,2,12,5,0) = 69.079.808
(0 9 7 4 0) = 48.918.144	(0,16,1,3,0) = 6.921.642	(1,2,11,6,0) = 66.562.048
(0 9 6 5 0) = 56.492.416	(0,16,0,4,0) = 8.836.488	(1,2,10,7,0) = 61.964.288
(0 9 5 6 0) = 63.706.464	(0,17,3,0,0) = 2.328.560	(1 2 9 8 0) = 55.673.856
(0 9 4 7 0) = 69.235.200	(0,17,2,1,0) = 3.012.352	(1 2 8 9 0) = 48.299.520
(0 9 3 8 0) = 71.741.832	(0,17,1,2,0) = 3.888.278	(1,2,7,10,0) = 40.532.736
(0 9 2 9 0) = 70.474.536	(0,17,0,3,0) = 5.006.796	(1,2,6,11,0) = 32.999.552
(0,10,10,0,0) = 19.264.512	(0,18,2,0,0) = 1.644.768	(1,2,5,12,0) = 26.156.800
(0,10,9,1,0) = 23.606.784	(0,18,1,1,0) = 2.136.426	(1,2,4,13,0) = 20.257.856
(0,10,8,2,0) = 28.710.912	(0,18,0,2,0) = 2.769.760	(1,2,3,14,0) = 15.379.232
(0,10,7,3,0) = 34.621.824	(0,19,1,0,0) = 1.153.110	(1,2,2,15,0) = 11.476.624
(0,10,6,4,0) = 41.343.872	(0,19,0,1,0) = 1.503.092	(1,2,1,16,0) = 8.438.324
(0,10,5,5,0) = 48.816.704	(0,20,0,0,0) = 803.128	(1,2,0,17,0) = 6.125.314
(0,10,4,6,0) = 56.331.072	(1,0,19,0,0) = 61.520.094	(1,2,16,0,1) = 65.244.828
(0,10,3,7,0) = 62.523.264	(1,0,18,1,0) = 64.321.026	(1,2,15,1,1) = 68.999.088
(0,10,2,8,0) = 65.915.712	(1,0,17,2,0) = 65.721.492	(1,2,14,2,1) = 71.083.392
(0,10,1,9,0) = 65.588.454	(1,0,16,3,0) = 65.483.160	(1,3,16,0,0) = 49.154.232
(0,10,0,10,0) = 61.588.332	(1,0,15,4,0) = 63.486.864	(1,3,15,1,0) = 55.322.400
(0,11,9,0,0) = 14.922.240	(1,0,14,5,0) = 59.776.608	(1,3,14,2,0) = 61.118.592
(0,11,8,1,0) = 18.502.656	(1,0,13,6,0) = 54.581.568	(1,3,13,3,0) = 66.100.992
(0,11,7,2,0) = 22.800.000	(1,0,12,7,0) = 48.299.648	(1,3,12,4,0) = 69.765.376
(0,11,6,3,0) = 27.899.776	(1,0,11,8,0) = 41.434.368	(1,3,11,5,0) = 71.597.568
(0,11,5,4,0) = 33.871.040	(1,0,10,9,0) = 34.503.168	(1,3,10,6,0) = 71.159.808
(0,11,4,5,0) = 40.749.952	(1,0,9,10,0) = 27.949.056	(1 3 9 7 0) = 68.254.720
(0,11,3,6,0) = 47.929.344	(1,0,8,11,0) = 22.083.072	(1 3 8 8 0) = 63.048.192
(0,11,2,7,0) = 54.106.992	(1,0,7,12,0) = 17.068.800	(1 3 7 9 0) = 56.066.304
(0,11,1,8,0) = 57.802.374	(1,0,6,13,0) = 12.942.464	(1,3,6,10,0) = 48.065.920
(0,11,0,9,0) = 58.051.692	(1,0,5,14,0) = 9.651.456	(1,3,5,11,0) = 39.842.304
(0,12,8,0,0) = 11.341.824	(1,0,4,15,0) = 7.093.824	(1,3,4,12,0) = 32.055.744
(0,12,7,1,0) = 14.205.312	(1,0,3,16,0) = 5.148.704	(1,3,3,13,0) = 25.136.480
(0,12,6,2,0) = 17.700.224	(1,0,2,17,0) = 3.696.144	(1,3,2,14,0) = 19.281.840
(0,12,5,3,0) = 21.928.512	(1,0,1,18,0) = 2.628.084	(1,3,1,15,0) = 14.514.924
(0,12,4,4,0) = 26.992.128	(1,0,0,19,0) = 1.853.074	(1,3,0,16,0) = 10.751.334
(0,12,3,5,0) = 32.983.568	(1,0,18,0,1) = 67.121.958	(1,3,15,0,1) = 61.490.568
(0,12,2,6,0) = 39.403.728	(1,1,18,0,0) = 58.719.162	(1,3,14,1,1) = 66.914.784
(0,12,1,7,0) = 45.084.138	(1,1,17,1,0) = 62.920.560	(1,3,13,2,1) = 71.083.392
(0,12,0,8,0) = 48.651.728	(1,1,16,2,0) = 65.959.824	(1,3,12,3,1) = 73.429.760
(0,13,7,0,0) = 8.478.336	(1,1,15,3,0) = 67.479.456	(1,4,15,0,0) = 42.986.064
(0,13,6,1,0) = 10.710.400	(1,1,14,4,0) = 67.197.120	(1,4,14,1,0) = 49.526.208
(0,13,5,2,0) = 13.471.936	(1,1,13,5,0) = 64.971.648	(1,4,13,2,0) = 56.136.192
(0,13,4,3,0) = 16.864.896	(1,1,12,6,0) = 60.863.488	(1,4,12,3,0) = 62.436.608
(0,13,3,4,0) = 21.000.688	(1,1,11,7,0) = 55.164.928	(1,4,11,4,0) = 67.933.184
(0,13,2,5,0) = 25.995.904	(1,1,10,8,0) = 48.365.568	(1,4,10,5,0) = 72.035.328
(0,13,1,6,0) = 31.453.302	(1 1 9 9 0) = 41.057.280	(1 4 9 6 0) = 74.064.896
(0,13,0,7,0) = 36.375.004	(1,1,8,10,0) = 33.815.040	(1 4 8 7 0) = 73.461.248
(0,14,6,0,0) = 6.246.272	(1,1,7,11,0) = 27.097.344	(1 4 7 8 0) = 70.030.080
(0,14,5,1,0) = 7.948.864	(1,1,6,12,0) = 21.195.136	(1 4 6 9 0) = 64.066.688
(0,14,4,2,0) = 10.078.976	(1,1,5,13,0) = 16.233.472	(1,4,5,10,0) = 56.289.536

(1,4,4,11,0) = 47.628.864	(1,7,4,8,0) = 75.323.488	(1,10,4,5,0) = 32.683.200
(1,4,3,12,0) = 38.975.008	(1,7,3,9,0) = 74.218.464	(1,10,3,6,0) = 39.527.616
(1,4,2,13,0) = 30.991.120	(1,7,2,10,0) = 69.308.160	(1,10,2,7,0) = 45.690.720
(1,4,1,14,0) = 24.048.756	(1,7,1,11,0) = 61.497.756	(1,10,1,8,0) = 47.689.036
(1,4,0,15,0) = 18.278.514	(1,7,0,12,0) = 52.219.318	(1,10,0,9,0) = 50.514.930
(1,4,14,0,1) = 56.066.352	(1,7,11,0,1) = 34.569.088	(1,10,8,0,1) = 16.217.088
(1,4,13,1,1) = 62.746.176	(1,7,10,1,1) = 41.566.208	(1,10,7,1,1) = 20.379.648
(1,4,12,2,1) = 68.737.024	(1,7,9,2,1) = 49.383.424	(1,10,6,2,1) = 25.466.368
(1,4,11,3,1) = 73.429.760	(1,7,8,3,1) = 57.841.664	(1,10,5,3,1) = 31.618.688
(1,4,10,4,1) = 76.137.472	(1,7,7,4,1) = 66.598.912	(1,10,4,4,1) = 38.968.192
(1,5,14,0,0) = 36.445.920	(1,7,6,5,1) = 71.157.312	(1,10,3,5,1) = 46.372.032
(1,5,13,1,0) = 42.916.224	(1,7,5,6,1) = 78.521.984	(1,10,2,6,1) = 51.853.824
(1,5,12,2,0) = 49.835.776	(1,7,4,7,1) = 78.256.768	(1,10,1,7,1) = 53.687.352
(1,5,11,3,0) = 56.940.032	(1,8,11,0,0) = 18.647.296	(1,10,0,8,1) = 51.340.824
(1,5,10,4,0) = 63.831.040	(1,8,10,1,0) = 23.109.632	(1,11,8,0,0) = 7.761.408
(1,5,9,5,0) = 69.962.752	(1,8,9,2,0) = 28.429.312	(1,11,7,1,0) = 9.907.968
(1,5,8,6,0) = 74.496.512	(1,8,8,3,0) = 31.677.248	(1,11,6,2,0) = 12.600.448
(1,5,7,7,0) = 76.499.968	(1,8,7,4,0) = 41.880.832	(1,11,5,3,0) = 15.957.248
(1,5,6,8,0) = 75.328.640	(1,8,6,5,0) = 49.992.064	(1,11,4,4,0) = 20.113.216
(1,5,5,9,0) = 70.920.512	(1,8,5,6,0) = 58.253.224	(1,11,3,5,0) = 25.217.184
(1,5,4,10,0) = 63.845.440	(1,8,4,7,0) = 65.185.120	(1,11,2,6,0) = 30.878.112
(1,5,3,11,0) = 55.108.736	(1,8,3,8,0) = 69.179.280	(1,11,1,7,0) = 36.061.284
(1,4,2,12,0) = 45.823.888	(1,8,2,9,0) = 69.207.240	(1,11,0,8,0) = 39.501.122
(1,5,1,13,0) = 36.910.700	(1,8,1,10,0) = 65.261.196	(1,11,7,0,1) = 12.054.528
(1,5,0,14,0) = 28.944.950	(1,8,0,11,0) = 58.301.010	(1,11,6,1,1) = 15.292.928
(1,5,13,0,1) = 49.386.528	(1,8,10,0,1) = 27.571.968	(1,11,5,2,1) = 19.314.048
(1,5,12,1,1) = 56.755.328	(1,8,9,1,1) = 33.748.992	(1,11,4,3,1) = 24.269.184
(1,5,11,2,1) = 64.044.288	(1,8,8,2,1) = 40.925.184	(1,11,3,4,1) = 30.321.152
(1,5,10,3,1) = 70.722.048	(1,8,7,3,1) = 49.084.416	(1,11,2,5,1) = 36.539.040
(1,5,9,4,1) = 76.094.464	(1,8,6,4,1) = 58.103.296	(1,11,1,6,1) = 41.244.456
(1,5,8,5,1) = 79.030.272	(1,8,5,5,1) = 66.512.384	(1,11,0,7,1) = 42.940.880
(1,6,13,0,0) = 29.975.616	(1,8,4,6,1) = 72.118.016	(1,12,7,0,0) = 5.614.848
(1,6,12,1,0) = 35.996.672	(1,8,3,7,1) = 73.173.440	(1,12,6,1,0) = 7.215.488
(1,6,11,2,0) = 42.731.520	(1,8,2,8,1) = 69.235.200	(1,12,5,2,0) = 9.243.648
(1,6,10,3,0) = 50.049.024	(1,9,10,0,0) = 11.184.960	(1,12,4,3,0) = 11.801.280
(1,6,9,4,0) = 57.699.328	(1,9,9,1,0) = 17.789.952	(1,12,3,4,0) = 15.009.248
(1,6,8,5,0) = 65.278.464	(1,9,8,2,0) = 22.181.376	(1,12,2,5,0) = 19.008.240
(1,6,7,6,0) = 71.890.944	(1,9,7,3,0) = 27.473.664	(1,12,1,6,0) = 23.502.876
(1,6,6,7,0) = 76.297.728	(1,9,6,4,0) = 33.769.600	(1,12,0,7,0) = 27.665.870
(1,6,5,8,0) = 77.409.856	(1,9,5,5,0) = 41.140.992	(1,12,6,0,1) = 8.816.128
(1,6,4,9,0) = 74.763.936	(1,9,4,6,0) = 48.955.680	(1,12,5,1,1) = 11.271.808
(1,6,3,10,0) = 68.715.456	(1,9,3,7,0) = 55.811.328	(1,12,4,2,1) = 14.358.912
(1,6,2,11,0) = 60.284.640	(1,9,2,8,0) = 60.089.592	(1,12,3,3,1) = 18.217.216
(1,6,1,12,0) = 50.764.548	(1,9,1,9,0) = 60.702.372	(1,12,2,4,1) = 23.007.232
(1,6,0,13,0) = 41.296.706	(1,9,0,10,0) = 57.588.210	(1,12,1,5,1) = 27.997.512
(1,6,12,0,1) = 42.017.728	(1,9,9,0,1) = 21.394.944	(1,12,0,6,1) = 31.828.864
(1,6,11,1,1) = 49.466.368	(1,9,8,1,1) = 26.572.800	(1,13,6,0,0) = 4.014.208
(1,6,10,2,1) = 57.366.528	(1,9,7,2,1) = 32.765.952	(1,13,5,1,0) = 5.187.328
(1,6,9,3,1) = 65.349.632	(1,9,6,3,1) = 40.065.536	(1,13,4,2,0) = 6.686.016
(1,6,8,4,1) = 72.857.600	(1,9,5,4,1) = 48.512.384	(1,13,3,3,0) = 8.593.312
(1,6,7,5,1) = 78.503.424	(1,9,4,5,1) = 56.770.368	(1,13,2,4,0) = 11.010.256
(1,6,6,6,1) = 80.704.512	(1,9,3,6,1) = 62.666.976	(1,13,1,5,0) = 11.058.324
(1,7,12,0,0) = 23.953.560	(1,9,2,7,1) = 64.367.856	(1,13,0,6,0) = 17.518.762
(1,7,11,1,0) = 29.261.824	(1,9,1,8,1) = 61.315.152	(1,13,5,0,1) = 6.360.448
(1,7,10,2,0) = 35.414.016	(1,9,0,9,1) = 54.474.048	(1,13,4,1,1) = 8.184.704
(1,7,9,3,0) = 42.398.720	(1,10,9,0,0) = 10.579.968	(1,13,3,2,1) = 10.500.608
(1,7,8,4,0) = 50.120.192	(1,10,8,1,0) = 13.398.528	(1,13,2,3,1) = 13.427.200
(1,7,7,5,0) = 58.359.552	(1,10,7,2,0) = 16.889.088	(1,13,1,4,1) = 17.106.392
(1,7,6,6,0) = 66.258.132	(1,10,6,3,0) = 21.179.728	(1,13,0,5,1) = 20.979.200
(1,7,5,7,0) = 72.390.208	(1,10,5,4,0) = 26.398.208	(1,14,5,0,0) = 2.841.088

(1,14,4,1,0) = 3.688.640	(2,0,11,6,1) = 56.915.008	(2,2,6,10,0) = 55.599.104
(1,14,3,2,0) = 4.778.720	(2,0,10,7,1) = 48.563.328	(2,2,5,11,0) = 46.685.056
(1,14,2,3,0) = 6.176.368	(2,0,9,8,1) = 39.926.016	(2,2,4,12,0) = 37.954.688
(1,14,1,4,0) = 7.962.188	(2,0,8,9,1) = 31.750.656	(2,2,3,13,0) = 30.015.104
(1,14,0,5,0) = 10.235.230	(2,0,7,10,1) = 24.542.208	(2,2,2,14,0) = 23.184.448
(1,14,4,0,1) = 4.536.192	(2,0,6,11,1) = 18.531.328	(2,2,1,15,0) = 17.553.224
(1,14,3,1,1) = 5.868.800	(2,0,5,12,1) = 13.727.488	(2,2,0,16,0) = 13.064.344
(1,14,2,2,1) = 7.574.016	(2,0,4,13,1) = 10.008.960	(2,2,15,0,1) = 47.736.308
(1,14,1,3,1) = 9.748.008	(2,0,3,14,1) = 7.201.408	(2,2,14,1,1) = 64.830.480
(1,14,0,4,1) = 12.508.272	(2,0,2,15,1) = 5.123.584	(2,2,13,2,1) = 71.083.392
(1,15,4,0,0) = 1.993.536	(2,0,1,16,1) = 3.610.704	(2,2,12,3,1) = 75.776.128
(1,15,3,1,0) = 2.598.560	(2,0,0,17,1) = 2.523.944	(2,2,11,4,1) = 78.122.496
(1,15,2,2,0) = 3.381.072	(2,0,16,0,2) = 74.630.478	(2,2,10,5,1) = 77.399.808
(1,15,1,3,0) = 4.390.548	(2,1,17,0,0) = 45.316.366	(2,2,9,6,1) = 73.332.736
(1,15,0,4,0) = 5.689.146	(2,1,16,1,0) = 56.842.032	(2,2,8,7,1) = 66.299.904
(1,15,3,0,1) = 2.243.584	(2,1,15,2,0) = 62.920.560	(2,2,7,8,1) = 57.243.648
(1,15,2,1,1) = 3.203.584	(2,1,14,3,0) = 68.044.128	(2,2,6,9,1) = 47.365.120
(1,15,1,2,1) = 5.400.024	(3,1,13,4,0) = 71.648.064	(2,2,5,10,1) = 37.771.008
(1,15,0,3,1) = 6.987.744	(2,1,12,5,0) = 73.187.968	(2,2,4,11,1) = 29.224.320
(1,16,3,0,0) = 1.388.512	(2,1,11,6,0) = 72.260.608	(2,2,3,12,1) = 22.075.520
(1,16,2,1,0) = 1.816.048	(2,1,10,7,0) = 68.763.648	(2,2,2,13,1) = 16.353.792
(1,16,1,2,0) = 2.371.596	(2,1,9,8,0) = 62.982.144	(2,2,1,14,1) = 11.922.000
(1,16,0,3,0) = 3.091.950	(2,1,8,9,0) = 55.541.760	(2,2,0,15,1) = 8.575.464
(1,16,2,0,1) = 2.243.584	(2,1,7,10,0) = 47.250.432	(2,2,14,0,2) = 71.924.652
(1,16,1,1,1) = 2.927.144	(2,1,6,11,0) = 38.901.760	(2,2,13,1,2) = 77.336.304
(1,16,0,2,1) = 3.812.304	(2,1,5,12,0) = 31.118.464	(2,2,12,2,2) = 80.468.864
(1,17,2,0,0) = 960.976	(2,1,4,13,0) = 24.282.240	(2,3,15,0,0) = 36.817.896
(1,17,1,1,0) = 1.260.500	(2,1,3,14,0) = 18.549.376	(2,3,14,1,0) = 43.730.016
(1,17,0,2,0) = 1.651.242	(2,1,2,15,0) = 13.914.304	(2,3,13,2,0) = 51.153.792
(1,17,1,0,1) = 1.560.024	(2,1,1,16,0) = 10.275.384	(2,3,12,3,0) = 58.772.224
(1,17,0,1,1) = 2.041.984	(2,1,0,17,0) = 7.486.424	(2,3,11,4,0) = 66.100.992
(1,18,1,0,0) = 661.425	(2,1,16,0,1) = 63.367.698	(2,3,10,5,0) = 72.473.038
(1,18,0,1,0) = 869.758	(2,1,15,1,1) = 68.999.088	(2,3,9,6,0) = 76.969.984
(1,18,0,0,1) = 1.078.064	(2,1,14,2,1) = 73.167.696	(2,3,8,7,0) = 78.667.776
(1,19,0,0,0) = 453.146	(2,1,13,3,1) = 75.252.000	(2,3,7,8,0) = 77.011.968
(2,0,18,0,0) = 55.918.230	(2,1,12,4,1) = 74.727.872	(2,3,6,9,0) = 72.067.072
(2,0,17,1,0) = 61.520.094	(2,1,11,5,1) = 71.333.248	(2,3,5,10,0) = 64.513.152
(2,0,16,2,0) = 66.198.156	(2,1,10,6,1) = 65.266.688	(2,3,4,11,0) = 55.415.424
(2,0,15,3,0) = 69.475.752	(2,1,9,7,1) = 57.200.640	(2,3,3,12,0) = 45.894.272
(2,0,14,4,0) = 70.907.376	(2,1,8,8,1) = 48.101.376	(2,3,2,13,0) = 36.845.760
(2,0,13,5,0) = 70.766.688	(2,1,7,9,1) = 38.959.104	(2,3,1,14,0) = 28.815.672
(2,0,12,6,0) = 67.145.408	(2,1,6,10,1) = 30.553.088	(2,3,0,15,0) = 22.042.104
(2,0,11,7,0) = 62.030.208	(2,1,5,11,1) = 23.335.168	(2,3,14,0,1) = 50.642.136
(2,0,10,8,0) = 55.296.768	(2,1,4,12,1) = 17.446.016	(2,3,13,1,1) = 58.577.568
(2,0,9,9,0) = 47.611.392	(2,1,3,13,1) = 12.816.512	(2,3,12,2,1) = 66.390.656
(2,0,8,10,0) = 39.681.024	(2,1,2,14,1) = 9.279.232	(2,3,11,3,1) = 73.429.760
(2,0,7,11,0) = 32.111.616	(2,1,1,15,1) = 6.636.464	(2,3,10,4,1) = 78.845.184
(2,0,6,12,0) = 25.321.472	(2,1,0,16,1) = 4.697.464	(2,3,9,5,1) = 81.466.880
(2,0,5,13,0) = 19.524.480	(2,1,15,0,2) = 74.630.478	(2,3,8,6,1) = 80.365.568
(2,0,4,14,0) = 14.766.720	(2,1,14,1,2) = 77.336.304	(2,3,7,7,1) = 75.356.160
(2,0,3,15,0) = 10.984.064	(2,2,16,0,0) = 43.790.700	(2,3,6,8,1) = 67.122.176
(2,0,2,16,0) = 8.053.824	(2,2,15,1,0) = 50.763.504	(2,3,5,9,1) = 56.959.232
(2,0,1,17,0) = 5.832.264	(2,2,14,2,0) = 57.796.992	(2,3,4,10,1) = 46.317.696
(2,0,0,18,0) = 4.178.104	(2,2,13,3,0) = 64.440.192	(2,3,3,11,1) = 36.373.120
(2,0,17,0,1) = 67.121.958	(2,2,12,4,0) = 70.108.160	(2,3,2,12,1) = 27.797.248
(2,0,16,1,1) = 70.876.218	(2,2,11,5,0) = 74.115.328	(2,3,1,13,1) = 20.785.584
(2,0,15,2,1) = 72.753.348	(2,2,10,6,0) = 75.757.568	(2,3,0,14,1) = 15.268.536
(2,0,14,3,1) = 72.339.000	(2,2,9,7,0) = 71.545.152	(2,3,13,0,2) = 66.513.000
(2,0,13,4,1) = 69.426.000	(2,2,8,8,0) = 70.422.528	(2,3,12,1,2) = 74.203.744
(2,0,12,5,1) = 64.124.128	(2,2,7,9,0) = 63.833.088	(2,3,11,2,2) = 80.468.864

(2,3,10,3,2) = 81.260.608	(2,5,1,11,1) = 45.949.872	(2,7,2,8,1) = 65.296.960
(2,4,14,0,0) = 29.905.776	(2,5,0,12,1) = 35.660.216	(2,7,1,9,1) = 58.262.448
(2,4,13,1,0) = 36.306.240	(2,5,11,0,1) = 49.705.888	(2,7,0,10,1) = 48.994.296
(2,4,12,2,0) = 43.535.360	(2,5,10,1,2) = 59.200.128	(2,7,9,0,2) = 31.288.704
(2,4,11,3,0) = 51.443.456	(2,5,9,2,2) = 69.265.664	(2,7,8,1,2) = 39.002.112
(2,4,10,4,0) = 59.729.896	(2,5,8,3,2) = 79.264.256	(2,7,7,2,2) = 48.187.392
(2,4,9,5,0) = 67.890.176	(2,5,7,4,2) = 86.332.416	(2,7,6,3,2) = 58.888.192
(2,4,8,6,0) = 74.928.128	(2,5,6,5,2) = 87.834.624	(2,7,5,4,2) = 68.127.232
(2,4,7,7,0) = 79.538.688	(2,6,12,0,0) = 17.933.004	(2,7,4,5,2) = 72.560.640
(2,4,6,8,0) = 80.627.200	(2,6,11,1,0) = 22.526.976	(2,7,3,6,2) = 70.466.176
(2,4,5,9,0) = 77.774.336	(2,6,10,2,0) = 28.096.512	(2,7,2,7,2) = 62.503.808
(2,4,4,10,0) = 71.401.344	(2,6,9,3,0) = 34.748.416	(2,8,10,0,0) = 9.722.624
(2,4,3,11,0) = 62.588.608	(2,6,8,4,0) = 42.541.056	(2,8,9,1,0) = 12.470.272
(2,4,2,12,0) = 52.672.768	(2,6,7,5,0) = 51.440.640	(2,8,8,2,0) = 15.933.440
(2,4,1,13,0) = 42.830.280	(2,6,6,6,0) = 60.625.920	(2,8,7,3,0) = 20.270.080
(2,4,0,14,0) = 33.841.144	(2,6,5,7,0) = 68.482.688	(2,8,6,4,0) = 25.658.368
(2,4,13,0,1) = 42.706.704	(2,6,4,8,0) = 73.237.120	(2,8,5,5,0) = 32.289.920
(2,4,12,1,1) = 50.764.480	(2,6,3,9,0) = 73.732.992	(2,8,4,6,0) = 39.659.136
(2,4,11,2,1) = 59.351.552	(2,6,2,10,0) = 69.900.864	(2,8,3,7,0) = 46.437.536
(2,4,10,3,1) = 68.014.336	(2,6,1,11,0) = 62.710.872	(2,8,2,8,0) = 50.999.904
(2,4,9,4,1) = 76.051.456	(2,6,0,12,0) = 53.674.088	(2,8,1,9,0) = 52.197.504
(2,4,8,5,1) = 81.966.080	(2,6,11,0,1) = 27.120.448	(2,8,0,10,0) = 49.915.224
(2,4,7,6,1) = 84.149.248	(2,6,10,1,1) = 33.666.048	(2,8,9,0,1) = 15.217.920
(2,4,6,7,1) = 81.715.712	(2,6,9,2,1) = 41.400.320	(2,8,8,1,1) = 19.396.608
(2,4,5,8,1) = 74.921.472	(2,6,8,3,1) = 50.333.696	(2,8,7,2,1) = 24.606.720
(2,4,4,9,1) = 65.028.352	(2,6,7,4,1) = 60.340.224	(2,8,6,3,1) = 31.046.656
(2,4,3,10,1) = 53.775.872	(2,6,6,5,1) = 69.811.200	(2,8,5,4,1) = 38.921.472
(2,4,2,11,1) = 42.756.928	(2,6,5,6,1) = 76.339.456	(2,8,4,5,1) = 47.028.352
(2,4,1,12,1) = 32.987.792	(2,6,4,7,1) = 77.991.552	(2,8,3,6,1) = 53.215.936
(2,4,0,13,1) = 24.852.008	(2,6,3,8,1) = 74.228.864	(2,8,2,7,1) = 55.562.272
(2,4,12,0,2) = 58.822.256	(2,6,2,9,1) = 66.068.736	(2,8,1,8,1) = 53.395.104
(2,4,11,1,2) = 67.938.624	(2,6,1,10,1) = 55.520.880	(2,8,0,9,1) = 47.632.944
(2,4,10,2,2) = 76.677.120	(2,6,0,11,1) = 44.637.304	(2,8,8,0,2) = 23.575.296
(2,4,9,3,2) = 84.088.576	(2,6,10,0,2) = 40.211.648	(2,8,7,1,2) = 29.816.832
(2,4,8,4,2) = 87.880.704	(2,6,9,1,2) = 49.134.592	(2,8,6,2,2) = 37.486.592
(2,5,13,0,0) = 23.505.312	(2,6,8,2,2) = 59.267.072	(2,8,5,3,2) = 46.796.288
(2,5,12,1,0) = 29.077.120	(2,6,7,3,2) = 70.346.752	(2,8,4,4,2) = 55.135.232
(2,5,11,2,0) = 35.627.264	(2,6,6,4,2) = 79.282.176	(2,8,3,5,2) = 59.403.520
(2,5,10,3,0) = 43.158.016	(2,6,5,5,2) = 82.867.712	(2,8,2,6,2) = 57.908.608
(2,5,9,4,0) = 51.567.616	(2,6,4,6,2) = 79.643.648	(2,8,1,7,2) = 51.227.936
(2,5,8,5,0) = 60.594.176	(2,7,11,0,0) = 13.340.032	(2,8,0,8,2) = 41.870.784
(2,5,7,6,0) = 69.285.376	(2,7,10,1,0) = 16.957.440	(2,9,9,0,0) = 6.974.976
(2,5,6,7,0) = 76.095.488	(2,7,9,2,0) = 21.440.608	(2,9,8,1,0) = 9.007.104
(2,5,5,8,0) = 79.491.072	(2,7,8,3,0) = 26.955.776	(2,9,7,2,0) = 11.596.800
(2,5,4,9,0) = 78.607.360	(2,7,7,4,0) = 33.641.472	(2,9,6,3,0) = 14.881.792
(2,5,3,10,0) = 73.585.472	(2,7,6,5,0) = 41.621.576	(2,9,5,4,0) = 19.026.816
(2,5,2,11,0) = 65.460.544	(2,7,5,6,0) = 50.246.016	(2,9,4,5,0) = 24.225.408
(2,5,1,12,0) = 55.705.208	(2,7,4,7,0) = 57.980.032	(2,9,3,6,0) = 30.099.552
(2,5,0,13,0) = 45.682.712	(2,7,3,8,0) = 63.035.072	(2,9,2,7,0) = 35.570.112
(2,5,12,0,1) = 34.648.928	(2,7,2,9,0) = 64.166.016	(2,9,1,8,0) = 39.288.480
(2,5,11,1,1) = 42.177.408	(2,7,1,10,0) = 61.214.232	(2,9,0,9,0) = 40.327.488
(2,5,10,2,1) = 50.688.768	(2,7,0,11,0) = 55.104.264	(2,9,8,0,1) = 11.039.232
(2,5,9,3,1) = 59.977.216	(2,7,10,0,1) = 20.574.848	(2,9,7,1,1) = 14.168.496
(2,5,8,4,1) = 69.620.736	(2,7,9,1,1) = 25.931.776	(2,9,6,2,1) = 18.166.784
(2,5,7,5,1) = 77.976.576	(2,7,8,2,1) = 32.466.944	(2,9,5,3,1) = 23.171.840
(2,5,6,6,1) = 82.905.600	(2,7,7,3,1) = 40.327.168	(2,9,4,4,1) = 29.424.000
(2,5,5,7,1) = 82.886.656	(2,7,6,4,1) = 49.607.680	(2,9,3,5,1) = 35.973.696
(2,5,4,8,1) = 77.723.648	(2,7,5,5,1) = 58.867.456	(2,9,2,6,1) = 41.040.672
(2,5,3,9,1) = 68.563.584	(2,7,4,6,1) = 65.711.048	(2,9,1,7,1) = 43.006.848
(2,5,2,10,1) = 57.335.616	(2,7,3,7,1) = 68.090.112	(2,9,0,8,1) = 41.166.496

(2 9 7 0 2) = 17.333.760	(2,12,5,0,1) = 3.904.768	(3,0,14,3,0) = 55.579.440
(2 9 6 1 2) = 22.147.072	(2,12,4,1,1) = 5.097.600	(3,0,13,4,0) = 59.377.440
(2 9 5 2 2) = 28.176.896	(2,12,3,2,1) = 6.642.304	(3,0,12,5,0) = 61.464.128
(2 9 4 3 2) = 35.676.160	(2,12,2,3,1) = 8.637.184	(3,0,11,6,0) = 61.406.208
(2 9 3 4 2) = 42.523.392	(2,12,1,4,1) = 11.205.552	(3,0,10,7,0) = 59.033.088
(2 9 2 5 2) = 46.107.648	(2,12,0,5,1) = 13.960.888	(3 0 9 8 0) = 54.531.144
(2 9 1 6 2) = 44.973.024	(2,12,4,0,2) = 6.290.432	(3 0 8 9 0) = 48.430.080
(2 9 0 7 2) = 39.626.144	(2,12,3,1,2) = 8.187.008	(3,0,7,10,0) = 41.433.600
(2,10,8,0,0) = 4.942.848	(2,12,2,2,2) = 10.632.064	(3,0,6,11,0) = 34.266.624
(2,10,7,1,0) = 6.417.408	(2,12,1,3,2) = 13.773.920	(3,0,5,12,0) = 27.509.376
(2,10,6,2,0) = 8.311.808	(2,12,0,4,2) = 16.716.224	(3,0,4,13,0) = 21.528.192
(2,10,5,3,0) = 10.736.768	(2,13,5,0,0) = 1.667.968	(3,0,3,14,0) = 16.484.288
(2,10,4,4,0) = 13.828.224	(2,13,4,1,0) = 2.189.952	(3,0,2,15,0) = 12.389.184
(2,10,3,5,0) = 17.751.168	(2,13,3,2,0) = 2.871.424	(3,0,1,16,0) = 9.163.824
(2,10,2,6,0) = 22.228.608	(2,13,2,3,0) = 3.759.424	(3,0,0,17,0) = 6.685.544
(2,10,1,7,0) = 26.431.848	(2,13,1,4,0) = 4.914.120	(3,0,16,0,1) = 50.808.033
(2,10,0,8,0) = 29.224.008	(2,13,0,5,0) = 6.412.136	(3,0,15,1,1) = 56.229.608
(2,10,7,0,1) = 7.891.968	(2,13,4,0,1) = 2.711.936	(3,0,14,2,1) = 60.552.776
(2,10,6,1,1) = 10.206.208	(2,13,3,1,1) = 3.552.896	(3,0,13,3,1) = 63.175.440
(2,10,5,2,1) = 13.161.728	(2,13,2,2,1) = 4.647.424	(3,0,12,4,1) = 63.550.816
(2,10,4,3,1) = 16.919.680	(2,13,1,3,1) = 6.068.816	(3,0,11,5,1) = 61.348.288
(2,10,3,4,1) = 21.674.112	(2,13,0,4,1) = 7.910.152	(3,0,10,6,1) = 56.659.968
(2,10,2,5,1) = 26.706.048	(2,13,3,0,2) = 4.393.856	(3 0 9 7 1) = 50.035.200
(2,10,1,6,1) = 30.635.088	(2,13,2,1,2) = 5.741.952	(3 0 8 8 1) = 42.326.016
(2,10,0,7,1) = 32.192.408	(2,13,1,2,2) = 7.490.208	(3 0 7 9 1) = 34.437.120
(2,10,6,0,2) = 12.520.488	(2,13,0,3,2) = 9.751.488	(3,0,6,10,1) = 27.099.648
(2,10,5,1,2) = 16.117.248	(2,14,4,0,0) = 1.145.984	(3,0,5,11,1) = 20.752.128
(2,10,4,2,2) = 20.677.632	(2,14,3,1,0) = 1.508.480	(3,0,4,12,1) = 15.547.008
(2,10,3,3,2) = 26.428.544	(2,14,2,2,0) = 1.983.424	(3,0,3,13,1) = 11.440.384
(2,10,2,4,2) = 31.737.984	(2,14,1,3,0) = 2.604.728	(3,0,2,14,1) = 8.294.080
(2,10,1,5,2) = 34.564.128	(2,14,0,4,0) = 3.416.104	(3,0,1,15,1) = 5.938.464
(2,10,0,6,2) = 33.753.728	(2,14,3,0,1) = 1.870.976	(3,0,0,16,1) = 4.207.264
(2,11,7,0,0) = 3.468.288	(2,14,2,1,1) = 2.458.368	(3,0,15,0,2) = 61.651.183
(2,11,6,1,0) = 4.523.008	(2,14,1,2,1) = 3.226.032	(3,0,14,1,2) = 64.875.944
(2,11,5,2,0) = 5.886.848	(2,14,0,3,1) = 4.227.480	(3,0,13,2,2) = 65.798.104
(2,11,4,3,0) = 7.645.312	(2,14,2,0,2) = 3.045.760	(3,0,12,3,2) = 63.926.192
(2,11,3,4,0) = 9.905.280	(2,14,1,1,2) = 3.993.696	(3,0,11,4,2) = 59.145.760
(2,11,2,5,0) = 12.799.296	(2,14,0,2,2) = 5.228.928	(3,0,10,5,2) = 51.971.648
(2,11,1,6,0) = 16.127.640	(2,15,3,0,0) = 783.488	(3 0 9 6 2) = 43.410.432
(2,11,0,7,0) = 19.270.458	(2,15,2,1,0) = 1.033.536	(3 0 8 7 2) = 34.616.832
(2,11,6,0,1) = 5.577.728	(2,15,1,2,0) = 1.362.120	(3 0 7 8 2) = 26.548.224
(2,11,5,1,1) = 7.250.688	(2,15,0,3,0) = 1.793.352	(3 0 6 9 2) = 19.762.176
(2,11,4,2,1) = 9.403.776	(2,15,2,0,1) = 1.283.584	(3,0,5,10,2) = 14.404.608
(2,11,3,3,1) = 12.165.248	(2,15,1,1,1) = 1.690.704	(3,0,4,11,2) = 10.341.888
(2,11,2,4,1) = 15.693.312	(2,15,0,2,1) = 2.224.584	(3,0,3,12,2) = 7.333.760
(2,11,1,5,1) = 19.455.984	(2,15,1,0,2) = 2.097.824	(3,0,2,13,2) = 5.147.776
(2,11,0,6,1) = 22.413.272	(2,15,0,2,2) = 2.758.464	(3,0,1,14,2) = 3.582.848
(2,11,5,0,2) = 8.923.648	(2,16,2,0,0) = 533.440	(3,0,0,15,2) = 2.476.064
(2,11,4,1,2) = 11.556.864	(2,16,1,1,0) = 704.952	(3,0,14,0,3) = 54.783.660
(2,11,3,2,2) = 14.926.720	(2,16,0,2,0) = 930.888	(3,1,16,0,0) = 33.331.734
(2,11,2,3,2) = 19.221.376	(2,16,1,0,1) = 876.464	(3,1,15,1,0) = 39.359.096
(2,11,1,4,2) = 23.218.656	(2,16,0,1,1) = 1.156.824	(3,1,14,2,0) = 45.632.768
(2,11,0,5,2) = 25.370.560	(2,16,0,0,2) = 1.237.184	(3,1,13,3,0) = 51.781.440
(2,12,6,0,0) = 2.413.568	(2,17,1,0,0) = 361.928	(3,1,12,4,0) = 57.290.752
(2,12,5,1,0) = 3.159.168	(2,17,0,1,0) = 479.016	(3,1,11,5,0) = 61.522.048
(2,12,4,2,0) = 4.128.384	(2,17,0,0,1) = 596.104	(3,1,10,6,0) = 63.779.328
(2,12,3,3,0) = 5.385.344	(2,18,0,0,0) = 244.840	(3 1 9 7 0) = 63.532.032
(2,12,2,4,0) = 7.011.264	(3,0,17,0,0) = 39.157.167	(3 1 8 8 0) = 60.638.208
(2,12,1,5,0) = 9.108.408	(3,0,16,1,0) = 44.982.600	(3 1 7 9 0) = 55.426.560
(2,12,0,6,0) = 11.534.648	(3,0,15,2,0) = 50.606.104	(3,1,6,10,0) = 48.600.576

(3,1,5,11,0) = 41.023.872	(3,2,9,5,1) = 68.788.480	(3,3,8,1,2) = 71.319.872
(3,1,4,12,0) = 33.490.560	(3,2,8,6,1) = 68.825.088	(3,3,7,5,2) = 71.151.424
(3,1,3,13,0) = 26.572.096	(3,2,7,7,1) = 65.273.856	(3,3,6,6,2) = 68.885.504
(3,1,2,14,0) = 20.579.392	(3,2,6,8,1) = 58.655.232	(3,3,5,7,2) = 59.671.552
(3,1,1,15,0) = 15.614.544	(3,2,5,9,1) = 50.102.016	(3,3,4,8,2) = 48.541.256
(3,1,0,16,0) = 11.642.104	(3,2,4,10,1) = 40.937.088	(3,3,3,9,2) = 37.559.296
(3,1,15,0,1) = 45.386.458	(3,2,3,11,1) = 32.260.864	(3,3,2,10,2) = 28.091.264
(3,1,14,1,1) = 51.906.440	(3,2,2,12,1) = 24.720.576	(3,3,1,11,2) = 20.583.616
(3,1,13,2,1) = 57.930.112	(3,2,1,13,1) = 18.523.680	(3,3,0,12,2) = 14.837.664
(3,1,12,3,1) = 62.800.064	(3,2,0,14,1) = 13.629.728	(3,3,11,0,3) = 47.199.888
(3,1,11,4,1) = 65.753.344	(3,2,13,0,2) = 52.899.060	(3,3,10,1,3) = 54.175.488
(3,1,10,5,1) = 66.036.608	(3,2,12,1,2) = 60.237.552	(3,3,9,2,3) = 60.275.648
(3,1,9,6,1) = 63.284.736	(3,2,11,2,2) = 66.633.408	(3,3,8,3,3) = 63.373.056
(3,1,8,7,1) = 57.744.384	(3,2,10,3,2) = 71.093.376	(3,4,13,0,0) = 16.359.888
(3,1,7,8,1) = 50.214.912	(3,2,9,4,2) = 72.106.880	(3,4,12,1,0) = 20.677.440
(3,1,6,9,1) = 41.774.592	(3,2,8,5,2) = 68.861.696	(3,4,11,2,0) = 25.907.328
(3,1,5,10,1) = 33.447.168	(3,2,7,6,2) = 61.722.624	(3,4,10,3,0) = 32.115.456
(3,1,4,11,1) = 25.957.248	(3,2,6,7,2) = 52.036.608	(3,4,9,4,0) = 39.291.392
(3,1,3,12,1) = 19.653.632	(3,2,5,8,2) = 41.548.800	(3,4,8,5,0) = 47.292.416
(3,1,2,13,1) = 14.586.688	(3,2,4,9,2) = 31.772.160	(3,4,7,6,0) = 55.317.504
(3,1,1,14,1) = 10.649.696	(3,2,3,10,2) = 23.584.640	(3,4,6,7,0) = 61.961.728
(3,1,0,15,1) = 7.669.664	(3,2,2,11,2) = 17.180.288	(3,4,5,8,0) = 65.764.864
(3,1,14,0,2) = 58.426.422	(3,2,1,12,2) = 12.326.784	(3,4,4,9,0) = 65.834.496
(3,1,13,1,2) = 63.953.784	(3,2,0,13,2) = 8.735.776	(3,4,3,10,0) = 62.189.696
(3,1,12,2,2) = 67.670.016	(3,2,12,0,3) = 52.255.736	(3,4,2,11,0) = 55.687.616
(3,1,11,3,2) = 68.706.624	(3,2,11,1,3) = 57.311.584	(3,4,1,12,0) = 47.616.624
(3,1,10,4,2) = 66.319.872	(3,2,10,2,3) = 60.447.680	(3,4,0,13,0) = 39.189.480
(3,1,9,5,2) = 60.532.864	(3,3,14,0,0) = 21.523.320	(3,4,12,0,1) = 24.994.992
(3,1,8,6,2) = 52.204.032	(3,3,13,1,0) = 26.686.752	(3,4,11,1,1) = 31.137.216
(3,1,7,7,2) = 42.685.440	(3,3,12,2,0) = 32.696.064	(3,4,10,2,1) = 38.323.584
(3,1,6,8,2) = 33.334.272	(3,3,11,3,0) = 39.484.800	(3,4,9,3,1) = 46.467.328
(3,1,5,9,2) = 25.119.744	(3,3,10,4,0) = 46.854.144	(3,4,8,4,1) = 55.293.440
(3,1,4,10,2) = 18.467.328	(3,3,9,5,0) = 54.416.896	(3,4,7,5,1) = 63.342.592
(3,1,3,11,2) = 13.350.016	(3,3,8,6,0) = 61.283.328	(3,4,6,6,1) = 68.605.952
(3,1,2,12,2) = 9.519.744	(3,3,7,7,0) = 66.216.960	(3,4,5,7,1) = 69.568.000
(3,1,1,13,2) = 6.712.704	(3,3,6,8,0) = 68.117.504	(3,4,4,8,1) = 65.904.128
(3,1,0,14,2) = 4.689.632	(3,3,5,9,0) = 66.481.152	(3,4,3,9,1) = 58.544.896
(3,1,13,0,3) = 54.783.660	(3,3,4,10,0) = 61.587.840	(3,4,2,10,1) = 49.185.536
(3,1,12,1,3) = 57.311.584	(3,3,3,11,0) = 54.357.376	(3,4,1,11,1) = 39.545.632
(3,2,15,0,0) = 27.304.372	(3,3,2,12,0) = 45.983.232	(3,4,0,12,1) = 30.762.336
(3,2,14,1,0) = 33.085.424	(3,3,1,13,0) = 37.539.796	(3,4,11,0,2) = 37.279.440
(3,2,13,2,0) = 39.484.096	(3,3,0,14,0) = 29.753.400	(3,4,10,1,2) = 45.509.952
(3,2,12,3,0) = 46.272.128	(3,3,13,0,1) = 31.850.184	(3,4,9,2,2) = 54.611.072
(3,2,11,4,0) = 53.059.456	(3,3,12,1,1) = 38.705.376	(3,4,8,3,2) = 64.119.552
(3,2,10,5,0) = 59.264.768	(3,3,11,2,1) = 46.273.536	(3,4,7,4,2) = 71.391.744
(3,2,9,6,0) = 64.026.624	(3,3,10,3,1) = 54.223.488	(3,4,6,5,2) = 73.869.312
(3,2,8,7,0) = 66.425.856	(3,3,9,4,1) = 61.979.648	(3,4,5,6,2) = 70.530.048
(3,2,7,8,0) = 65.849.856	(3,3,8,5,1) = 68.149.760	(3,4,4,7,2) = 62.240.256
(3,2,6,9,0) = 62.252.544	(3,3,7,6,1) = 71.150.592	(3,4,3,8,2) = 51.185.664
(3,2,5,10,0) = 56.177.280	(3,3,6,7,1) = 70.018.048	(3,4,2,9,2) = 39.826.176
(3,2,4,11,0) = 48.557.184	(3,3,5,8,1) = 64.844.800	(3,4,1,10,2) = 29.905.728
(3,2,3,12,0) = 40.409.024	(3,3,4,9,1) = 56.694.528	(3,4,0,11,2) = 21.979.040
(3,2,2,13,0) = 32.564.800	(3,3,3,10,1) = 47.126.912	(3,4,10,0,3) = 40.224.288
(3,2,1,14,0) = 25.544.240	(3,3,2,11,1) = 37.609.088	(3,4,9,1,3) = 48.075.328
(3,2,0,15,0) = 19.586.984	(3,3,1,12,1) = 29.096.352	(3,4,8,2,3) = 56.146.048
(3,2,14,0,1) = 38.866.476	(3,3,0,13,1) = 21.963.008	(3,4,7,3,3) = 61.824.768
(3,2,13,1,1) = 45.882.768	(3,3,12,0,2) = 45.560.568	(3,4,6,4,3) = 62.626.816
(3,2,12,2,1) = 53.060.160	(3,3,11,1,2) = 53.841.696	(3,5,12,0,0) = 12.042.336
(3,2,11,3,1) = 59.846.784	(3,3,10,2,2) = 62.173.440	(3,5,11,1,0) = 15.447.552
(3,2,10,4,1) = 65.470.080	(3,3,9,3,2) = 69.735.808	(3,5,10,2,0) = 19.699.200

(359 30) = 24.939.520	(36 191) = 45.872.736	(386 30) = 9.464.832
(358 40) = 31.290.368	(36,0,10,1) = 38.634.112	(385 40) = 12.337.920
(357 50) = 38.815.744	(369 02) = 21.689.024	(384 50) = 16.046.208
(356 60) = 46.866.944	(368 12) = 27.715.072	(383 60) = 20.339.264
(355 70) = 54.039.808	(367 22) = 35.164.160	(382 70) = 24.415.968
(354 80) = 58.725.632	(366 32) = 44.209.152	(381 80) = 27.247.328
(353 90) = 59.819.776	(365 42) = 52.349.952	(380 90) = 28.127.744
(35,2,10,0) = 57.171.776	(364 52) = 56.658.432	(388 01) = 6.849.792
(35,1,11,0) = 51.570.160	(363 62) = 55.533.824	(387 11) = 8.954.880
(35,0,12,0) = 44.303.448	(362 72) = 49.433.728	(386 21) = 11.683.840
(35,11,0,1) = 18.852.768	(361 82) = 40.505.024	(385 31) = 15.211.008
(35,10,1,1) = 23.950.848	(360 92) = 31.395.488	(384 41) = 19.754.496
(35 921) = 30.179.840	(368 03) = 24.741.888	(383 51) = 24.632.320
(35 831) = 37.641.216	(367 13) = 31.348.224	(382 61) = 28.492.672
(35 741) = 46.341.120	(366 23) = 39.340.544	(381 71) = 30.078.688
(35 651) = 54.918.144	(365 33) = 46.184.448	(380 81) = 29.008.160
(35 561) = 61.212.672	(364 43) = 48.924.672	(387 02) = 11.059.968
(35 471) = 63.411.456	(363 53) = 46.290.944	(386 12) = 14.412.800
(35 381) = 60.913.920	(362 63) = 39.241.728	(385 22) = 18.738.176
(35 291) = 54.523.776	(3,7,10,0,0) = 6.078.336	(384 32) = 21.751.808
(35,1,10,1) = 45.968.544	(37 910) = 7.932.928	(383 42) = 29.510.144
(35,0,11,1) = 37.036.736	(37 820) = 10.329.088	(382 52) = 32.353.024
(35,10,0,2) = 29.048.928	(37 730) = 13.412.352	(381 62) = 31.664.704
(35 912) = 36.408.832	(37 640) = 17.359.872	(380 72) = 27.937.632
(35 822) = 45.102.592	(37 550) = 22.381.824	(386 03) = 12.915.200
(35 732) = 55.041.024	(37 460) = 28.126.080	(385 13) = 16.783.360
(35 642) = 63.495.168	(37 370) = 33.547.456	(384 23) = 21.751.808
(35 552) = 67.507.200	(37 280) = 37.323.264	(383 33) = 26.201.600
(35 462) = 65.610.240	(37 190) = 38.497.920	(382 43) = 28.035.280
(35 372) = 58.416.384	(3,7,0,10,0) = 35.967.576	(381 53) = 26.406.272
(35 282) = 48.133.632	(379 01) = 9.787.520	(380 63) = 22.085.248
(35 192) = 37.413.312	(378 11) = 12.725.248	(398 00) = 2.910.720
(35,0,10,2) = 28.104.928	(377 21) = 16.495.616	(397 10) = 3.827.712
(359 03) = 32.373.248	(376 31) = 21.307.392	(396 20) = 5.026.816
(358 13) = 40.004.608	(375 41) = 27.403.776	(395 30) = 6.591.744
(357 23) = 48.660.992	(374 51) = 33.870.336	(394 40) = 8.629.632
(356 33) = 55.603.712	(373 61) = 38.968.832	(393 50) = 11.276.928
(355 43) = 57.889.792	(372 71) = 41.099.072	(392 60) = 14.357.664
(354 53) = 54.413.312	(371 81) = 39.672.576	(391 70) = 17.293.584
(36,11,0,0) = 8.637.120	(370 91) = 35.437.232	(390 80) = 19.337.776
(36,10,1,0) = 11.195.704	(378 02) = 15.662.976	(397 01) = 4.744.704
(36 920) = 14.458.880	(377 12) = 20.265.984	(396 11) = 6.225.920
(36 830) = 18.588.672	(376 22) = 26.119.168	(395 21) = 8.156.672
(36 740) = 23.764.992	(375 32) = 33.500.160	(394 31) = 10.667.520
(36 650) = 30.170.112	(374 42) = 40.336.896	(393 41) = 13.924.224
(36 560) = 37.316.352	(373 52) = 44.067.328	(392 51) = 17.438.400
(36 470) = 43.938.432	(372 62) = 43.229.312	(391 61) = 20.229.504
(36 380) = 48.492.800	(371 72) = 38.246.080	(390 71) = 21.331.968
(36 290) = 49.866.624	(370 82) = 31.201.888	(396 02) = 7.707.136
(36,1,10,0) = 47.869.080	(377 03) = 18.135.552	(395 12) = 10.037.424
(36,0,11,0) = 43.251.896	(376 13) = 23.355.904	(394 22) = 13.178.368
(36,10,0,1) = 13.754.688	(375 23) = 29.928.448	(393 32) = 17.180.928
(36 911) = 17.721.856	(374 33) = 35.739.648	(392 42) = 20.952.576
(36 821) = 22.718.464	(373 43) = 38.181.376	(391 52) = 23.020.608
(36 731) = 28.941.312	(372 53) = 36.073.216	(390 62) = 22.534.432
(36 641) = 36.575.232	(371 63) = 30.286.080	(395 03) = 9.047.040
(36 551) = 44.462.592	(370 73) = 23.240.192	(394 13) = 11.814.912
(36 461) = 50.560.512	(389 00) = 4.223.744	(393 23) = 15.397.120
(36 371) = 53.047.168	(388 10) = 5.536.768	(392 33) = 18.623.232
(36 281) = 51.240.448	(387 20) = 7.245.824	(391 43) = 19.985.280

(3 9 0 5 3) =	18.796.544	(3,12,3,0,2) =	2.497.280	(4,0,13,2,1) =	38.703.984
(3,10,7,0,0) =	1.993.728	(3,12,2,1,2) =	3.296.896	(4,0,12,3,1) =	42.171.400
(3,10,6,1,0) =	2.628.608	(3,12,1,2,2) =	4.348.352	(4,0,11,4,1) =	44.310.208
(3,10,5,2,0) =	3.461.888	(3,12,0,3,2) =	5.729.056	(4,0,10,5,1) =	44.580.288
(3,10,4,3,0) =	4.553.856	(3,12,2,0,3) =	2.017.920	(4 0 9 6 1) =	42.738.432
(3,10,3,4,0) =	5.982.336	(3,12,1,1,3) =	2.666.560	(4 0 8 7 1) =	38.971.392
(3,10,2,5,0) =	7.847.424	(3,12,0,2,3) =	5.144.768	(4 0 7 8 1) =	33.847.296
(3,10,1,6,0) =	10.026.672	(3,13,4,0,0) =	624.000	(4 0 6 9 1) =	28.117.248
(3,10,0,7,0) =	12.109.064	(3,13,3,1,0) =	827.008	(4,0,5,10,1) =	22.482.048
(3,10,6,0,1) =	3.263.488	(3,13,2,2,0) =	1.095.424	(4,0,4,11,1) =	17.428.032
(3,10,5,1,1) =	4.295.168	(3,13,1,3,0) =	1.450.032	(4,0,3,12,1) =	13.183.168
(3,10,4,2,1) =	5.645.824	(3,13,0,4,0) =	1.918.088	(4,0,2,13,1) =	9.776.416
(3,10,3,3,1) =	7.410.816	(3,13,3,0,1) =	1.030.016	(4,0,1,14,1) =	7.132.704
(3,10,2,4,1) =	9.712.512	(3,13,2,1,1) =	1.363.840	(4,0,0,15,1) =	5.133.664
(3,10,1,5,1) =	12.205.920	(3,13,1,2,1) =	1.804.640	(4,0,14,0,2) =	39.013.055
(3,10,0,6,1) =	14.191.456	(3,13,0,3,1) =	2.386.144	(4,0,13,1,2) =	42.957.844
(3,10,5,0,2) =	5.326.848	(3,13,2,0,2) =	1.697.664	(4,0,12,2,2) =	45.644.816
(3,10,4,1,2) =	6.996.480	(3,13,1,1,2) =	2.245.440	(4,0,11,3,2) =	46.446.016
(3,10,3,2,2) =	9.175.808	(3,13,0,2,2) =	2.967.648	(4,0,10,4,2) =	44.850.368
(3,10,2,3,2) =	12.014.208	(3,13,1,0,3) =	2.017.920	(4 0 9 5 2) =	40.896.576
(3,10,1,4,2) =	14.699.328	(3,13,0,1,3) =	2.666.560	(4 0 8 6 2) =	35.204.352
(3,10,0,5,2) =	16.176.992	(3,14,3,0,0) =	420.992	(4 0 7 7 2) =	28.723.200
(3,10,4,0,3) =	6.279.168	(3,14,2,1,0) =	558.592	(4 0 6 8 2) =	22.387.200
(3,10,3,1,3) =	8.232.704	(3,14,1,2,0) =	740.816	(4 0 5 9 2) =	16.846.848
(3,10,2,2,3) =	10.775.936	(3,14,0,3,0) =	981.976	(4,0,4,10,2) =	12.374.016
(3,10,1,3,3) =	13.075.968	(3,14,2,0,1) =	696.192	(4,0,3,11,2) =	8.938.304
(3,10,0,4,3) =	14.052.352	(3,14,1,1,1) =	923.040	(4,0,2,12,2) =	6.369.664
(3,11,6,0,0) =	1.358.848	(3,14,0,2,1) =	1.223.136	(4,0,1,13,2) =	4.488.992
(3,11,5,1,0) =	1.795.328	(3,14,1,0,2) =	1.349.988	(4,0,0,14,2) =	3.134.624
(3,11,4,2,0) =	2.369.920	(3,14,0,1,2) =	1.523.232	(4,0,13,0,3) =	36.878.754
(3,11,3,3,0) =	3.125.376	(3,14,0,0,3) =	1.369.280	(4,0,12,1,3) =	38.727.512
(3,11,2,4,0) =	4.117.248	(3,15,2,0,0) =	283.392	(4,0,11,2,3) =	38.790.912
(3,11,1,5,0) =	5.417.520	(3,15,1,1,0) =	376.368	(4,0,10,3,3) =	36.656.544
(3,11,0,6,0) =	6.941.656	(3,15,0,2,0) =	499.656	(4 0 9 4 3) =	32.471.072
(3,11,5,0,1) =	2.231.808	(3,15,1,0,1) =	469.344	(4 0 8 5 3) =	26.948.352
(3,11,4,1,1) =	2.944.512	(3,15,0,0,1) =	622.944	(4 0 7 6 3) =	21.057.024
(3,11,3,2,1) =	3.880.832	(3,15,0,0,2) =	776.544	(4 0 6 7 3) =	15.651.584
(3,11,2,3,1) =	5.109.120	(3,16,1,0,0) =	190.416	(4 0 5 8 3) =	11.231.232
(3,11,1,4,1) =	6.717.792	(3,16,0,1,0) =	253.080	(4 0 4 9 3) =	7.901.184
(3,11,0,5,1) =	8.465.792	(3,16,0,0,1) =	315.744	(4,0,3,10,3) =	5.502.592
(3,11,4,0,2) =	3.657.216	(3,17,0,0,0) =	127.752	(4,0,2,11,3) =	3.801.024
(3,11,3,1,2) =	4.817.248	(4,0,16,0,0) =	21.606.351	(4,0,1,12,3) =	2.608.320
(3,11,2,2,2) =	6.337.408	(4,0,15,1,0) =	25.746.772	(4,0,0,13,3) =	1.780.256
(3,11,1,3,2) =	8.326.464	(4,0,14,2,0) =	30.098.448	(4,0,12,0,4) =	26.169.856
(3,11,0,4,2) =	10.213.792	(4,0,13,3,0) =	42.957.844	(4,1,15,0,0) =	17.465.930
(3,11,3,0,3) =	4.325.632	(4,0,12,4,0) =	38.287.808	(4,1,14,1,0) =	21.395.096
(3,11,2,1,3) =	5.689.472	(4,0,11,5,0) =	41.299.008	(4,1,13,2,0) =	25.795.680
(3,11,1,2,3) =	7.473.280	(4,0,10,6,0) =	42.939.648	(4,1,12,3,0) =	30.514.624
(3,11,0,3,3) =	9.091.712	(4 0 9 7 0) =	42.839.040	(4,1,11,4,0) =	35.276.608
(3,12,5,0,0) =	922.368	(4 0 8 8 0) =	40.905.216	(4,1,10,5,0) =	39.658.368
(3,12,4,1,0) =	1.220.736	(4 0 7 9 0) =	37.376.256	(4 1 9 6 0) =	43.040.256
(3,12,3,2,0) =	1.614.464	(4,0,6,10,0) =	32.746.752	(4 1 8 7 0) =	44.772.864
(3,12,2,3,0) =	2.133.504	(4,0,5,11,0) =	27.614.400	(4 1 7 8 0) =	44.434.176
(3,12,1,4,0) =	2.816.976	(4,0,4,12,0) =	22.521.216	(4 1 6 9 0) =	42.005.760
(3,12,0,5,0) =	3.715.864	(4,0,3,13,0) =	17.852.192	(4,1,5,10,0) =	37.879.104
(3,12,4,0,1) =	1.519.104	(4,0,2,14,0) =	13.814.304	(4,1,4,11,0) =	32.707.584
(3,12,3,1,1) =	2.008.192	(4,0,1,15,0) =	10.473.504	(4,1,3,12,0) =	27.190.240
(3,12,2,2,1) =	2.652.544	(4,0,0,16,0) =	7.803.584	(4,1,2,13,0) =	21.890.080
(3,12,1,3,1) =	3.500.448	(4,0,15,0,1) =	29.887.193	(4,1,1,14,0) =	17.155.104
(3,12,0,4,1) =	4.614.752	(4,0,14,1,1) =	34.450.124	(4,1,0,15,0) =	13.143.424

(4,1,14,0,1) = 25.324.262	(4,2,12,1,1) = 25.158.960	(4,3 7 5 1) = 42.568.704
(4,1,13,1,1) = 30.196.264	(4,2,11,2,1) = 30.428.544	(4,3 6 6 1) = 46.477.312
(4,1,12,2,1) = 35.233.568	(4,2,10,3,1) = 26.037.056	(4,3 5 7 1) = 47.383.552
(4,1,11,3,1) = 40.038.592	(4,2 9 4 1) = 41.572.096	(4,3 4 8 1) = 45.030.912
(4,1,10,4,1) = 44.040.128	(4,2 8 5 1) = 46.037.760	(4,3 3 9 1) = 40.064.384
(4,1 9 5 1) = 46.422.144	(4,2 7 6 1) = 48.302.592	(4,3,2,10,1) = 33.679.424
(4,1 8 6 1) = 46.505.472	(4,2 6 7 1) = 47.676.416	(4,3,1,11,1) = 27.086.400
(4,1 7 7 1) = 44.095.488	(4,2 5 8 1) = 44.220.416	(4,3,0,12,1) = 21.072.864
(4,1 6 8 1) = 39.577.344	(4,2 4 9 1) = 38.682.624	(4,3,11,0,2) = 24.033.192
(4,1 5 9 1) = 33.752.448	(4,2,3,10,1) = 32.156.032	(4,3,10,1,2) = 29.750.688
(4,1,4,10,1) = 27.536.064	(4,2,2,11,1) = 35.659.840	(4,3 9 2 2) = 36.184.000
(4,1,3,11,1) = 21.672.896	(4,2,1,12,1) = 19.849.152	(4,3 8 3 2) = 43.022.720
(4,1,2,12,1) = 16.589.920	(4,2,0,13,1) = 14.983.200	(4,3 7 4 2) = 48.375.040
(4,1,1,13,1) = 12.420.128	(4,2,12,0,2) = 29.865.660	(4,3 6 5 2) = 50.385.920
(4,1,0,14,1) = 9.131.744	(4,2,11,1,2) = 35.698.128	(4,3 5 6 2) = 48.289.792
(4,1,13,0,2) = 35.068.266	(4,2,10,2,2) = 41.645.568	(4,3 4 7 2) = 42.678.272
(4,1,12,1,2) = 40.270.872	(4,2 9 3 2) = 47.107.136	(4,3 3 8 2) = 35.097.856
(4,1,11,2,2) = 44.843.616	(4,2 8 4 2) = 50.503.424	(4,3 2 9 2) = 27.294.464
(4,1,10,3,2) = 48.041.664	(4,2 7 5 2) = 50.567.710	(4,3,1,10,2) = 20.493.376
(4,1 9 4 2) = 48.804.160	(4,2 6 6 2) = 47.050.240	(4,3,0,11,2) = 15.059.328
(4,1 8 5 2) = 46.588.800	(4,2 5 7 2) = 40.764.416	(4,3,10,0,3) = 26.388.816
(4,1 7 6 2) = 41.685.504	(4,2 4 8 2) = 33.144.832	(4,3 9 1 3) = 31.969.376
(4,1 6 7 2) = 35.059.200	(4,2 3 9 2) = 25.629.440	(4,3 8 2 3) = 37.810.752
(4,1 5 8 2) = 27.927.552	(4,2,2,10,2) = 19.163.648	(4,3 7 3 3) = 42.039.168
(4,1 4 9 2) = 21.319.680	(4,2,1,11,2) = 14.038.464	(4,3 6 4 3) = 42.848.768
(4,1,3,10,2) = 15.809.728	(4,2,0,12,2) = 10.117.248	(4,3 5 5 3) = 39.731.712
(4,1,2,11,2) = 11.506.944	(4,2,11,0,3) = 31.395.880	(4,3 4 6 3) = 33.601.536
(4,1,1,12,2) = 8.250.336	(4,2,10,1,3) = 36.402.944	(4,3 3 7 3) = 26.198.528
(4,1,0,13,2) = 5.843.360	(4,2 9 2 3) = 40.836.512	(4,3 2 8 3) = 19.233.024
(4,1,12,0,3) = 35.029.996	(4,2 8 3 3) = 43.174.144	(4,3 1 9 3) = 13.692.288
(4,1,11,1,3) = 38.664.112	(4,2 7 4 3) = 42.244.736	(4,3,0,10,3) = 9.625.280
(4,1,10,2,3) = 40.925.280	(4,2 6 5 3) = 38.028.032	(4,3 9 0 4) = 21.578.032
(4,1 9 3 3) = 40.842.016	(4,2 5 6 3) = 31.568.896	(4,3 8 1 4) = 25.576.096
(4,1 8 4 3) = 37.993.792	(4,2 4 7 3) = 24.399.872	(4,3 7 2 4) = 28.735.296
(4,1 7 5 3) = 32.839.680	(4,2 3 8 3) = 17.870.336	(4,3 6 3 4) = 29.336.320
(4,1 6 6 3) = 26.462.464	(4,2 2 9 3) = 12.697.856	(4,4,12,0,0) = 7.245.744
(4,1 5 7 3) = 20.071.936	(4,2,1,10,3) = 8.913.280	(4,4,11,1,0) = 9.423.744
(4,1 4 8 3) = 14.561.280	(4,2,0,11,3) = 6.196.032	(4,4,10,2,0) = 12.191.232
(4,1 3 9 3) = 10.299.776	(4,2,10,0,4) = 24.624.912	(4,4 9 3 0) = 15.664.640
(4,1,2,10,3) = 7.204.160	(4,2 9 1 4) = 27.671.792	(4,4 8 4 0) = 19.953.152
(4,1,1,11,3) = 4.993.728	(4,2 8 2 4) = 29.423.424	(4,4 7 5 0) = 25.132.032
(4,1,0,12,3) = 3.436.384	(4,3,13,0,0) = 10.079.016	(4,4 6 6 0) = 30.767.104
(4,1,11,0,4) = 26.169.816	(4,3,12,1,0) = 12.912.288	(4,4 5 7 0) = 35.872.768
(4,1,10,1,4) = 27.714.800	(4,3,11,2,0) = 16.400.832	(4,4 4 8 0) = 39.300.096
(4,2,14,0,0) = 13.536.764	(4,3,10,3,0) = 20.610.432	(4,4 3 9 0) = 40.246.784
(4,2,13,1,0) = 16.994.512	(4,3 9 4 0) = 25.556.224	(4,4,2,10,0) = 38.587.136
(4,2,12,2,0) = 21.076.736	(4,3 8 5 0) = 31.159.296	(4,4,1,11,0) = 34.866.144
(4,2,11,3,0) = 25.752.640	(4,3 7 6 0) = 36.864.000	(4,4,0,12,0) = 29.980.992
(4,2,10,4,0) = 30.894.848	(4,3 6 7 0) = 41.670.656	(4,4,11,0,1) = 11.601.744
(4,2 9 5 0) = 36.233.472	(4,3 5 8 0) = 44.527.104	(4,4,10,1,1) = 14.958.720
(4,2 8 6 0) = 41.135.616	(4,3 4 9 0) = 44.779.008	(4,4 9 2 1) = 19.138.048
(4,2 7 7 0) = 44.719.104	(4,3,3,10,0) = 42.421.696	(4,4 8 3 1) = 24.241.664
(4,2 6 8 0) = 46.197.760	(4,3,2,11,0) = 38.050.560	(4,4 7 4 1) = 30.310.912
(4,2 5 9 0) = 45.209.088	(4,3,1,12,0) = 32.568.480	(4,4 6 5 1) = 36.402.176
(4,2,4,10,0) = 41.945.856	(4,3,0,13,0) = 26.820.672	(4,4 5 6 1) = 40.978.432
(4,2,3,11,0) = 37.050.544	(4,3,12,0,1) = 15.745.560	(4,4 4 7 1) = 42.727.424
(4,2,2,12,0) = 31.355.392	(4,3,11,1,1) = 19.889.376	(4,4 3 8 1) = 41.193.472
(4,2,1,13,0) = 25.602.272	(4,3,10,2,1) = 24.820.032	(4,4 2 9 1) = 36.927.488
(4,2,0,14,0) = 20.292.736	(4,3 9 3 1) = 30.502.016	(4,4,1,10,1) = 31.145.152
(4,2,13,0,1) = 20.452.260	(4,3 8 4 1) = 36.762.368	(4,4,0,11,1) = 25.095.840

(4,4,10,0,2) = 18.315.696	(4,5 7 1 3) = 19.963.904	(4,7 8 1 0) = 3.129.856
(4,4 9 1 2) = 23.317.376	(4,5 6 2 3) = 25.505.024	(4,7 7 2 0) = 4.111.056
(4,4 8 2 2) = 29.345.280	(4,5 5 3 3) = 30.355.456	(4,7 6 3 0) = 5.171.304
(4,4 7 3 2) = 36.380.160	(4,5 4 4 3) = 32.420.864	(4,7 5 4 0) = 7.229.952
(4,4 6 4 2) = 42.493.440	(4,5 3 5 3) = 30.771.200	(4,7 4 5 0) = 9.538.560
(4,4 5 5 2) = 45.554.688	(4,5 2 6 3) = 26.054.656	(4,7 3 6 0) = 12.251.392
(4,4 4 6 2) = 44.476.416	(4,5 1 7 3) = 20.033.792	(4,7 2 7 0) = 14.851.400
(4,4 3 7 2) = 39.659.520	(4,5 0 8 3) = 14.576.256	(4,7 1 8 0) = 16.676.800
(4,4 2 8 2) = 32.661.504	(4,5 7 0 4) = 13.388.160	(4,7 0 9 0) = 17.262.976
(4,4 1 9 2) = 25.362.816	(4,5 6 1 4) = 17.129.600	(4,7 8 0 1) = 3.895.936
(4,4,0,10,2) = 19.046.528	(4,5 5 2 4) = 20.745.216	(4,7 7 1 1) = 5.152.256
(4,4 9 0 3) = 20.808.256	(4,5 4 3 4) = 22.273.536	(4,7 6 2 1) = 6.807.552
(4,4 8 1 3) = 26.128.000	(4,5 3 4 4) = 20.928.512	(4,7 5 3 1) = 8.985.600
(4,4 7 2 3) = 32.292.096	(4,5 2 5 4) = 17.289.216	(4,7 4 4 1) = 11.847.168
(4,4 6 3 3) = 37.358.848	(4,5,10,0,0) = 3.479.232	(4,7 3 5 1) = 14.964.224
(4,4 5 4 3) = 39.201.280	(4,6 9 1 0) = 4.594.688	(4,7 2 6 1) = 17.457.408
(4,4 4 5 3) = 36.986.880	(4,6 8 2 0) = 6.059.520	(4,7 1 7 1) = 18.449.200
(4,4 3 6 3) = 31.479.808	(4,6 7 3 0) = 7.977.984	(4,7 0 8 1) = 17.849.152
(4,4 2 7 3) = 24.487.936	(4,6 6 4 0) = 10.481.664	(4,7 7 0 2) = 6.408.576
(4,4 1 8 3) = 17.892.096	(4,6 5 5 0) = 13.733.376	(4,7 6 1 2) = 8.462.848
(4,4 0 9 3) = 12.730.240	(4,6 4 6 0) = 17.516.544	(4,7 5 2 2) = 11.163.648
(4,4 8 0 4) = 17.579.568	(4,6 3 7 0) = 21.135.104	(4,7 4 3 2) = 14.708.736
(4,4 7 1 4) = 21.771.776	(4,6 2 8 0) = 23.691.520	(4,7 3 4 2) = 18.081.280
(4,4 6 2 4) = 25.553.792	(4,6 1 9 0) = 24.532.608	(4,7 2 5 2) = 19.950.592
(4,4 5 3 4) = 26.921.728	(4,6,0,10,0) = 23.592.512	(4,7 1 6 2) = 19.540.992
(4,4 4 4 4) = 25.155.584	(4,6 9 0 1) = 5.710.144	(4,7 0 7 2) = 17.199.104
(4,5,11,0,0) = 5.067.744	(4,6 8 1 1) = 7.524.352	(4,7 6 0 3) = 7.603.456
(4,5,10,1,0) = 6.656.256	(4,6 7 2 1) = 9.896.448	(4,7 5 1 3) = 10.028.032
(4,5 9 2 0) = 8.717.824	(4,6 6 3 1) = 12.985.344	(4,7 4 2 3) = 13.209.600
(4,5 8 3 0) = 11.376.128	(4,6 5 4 1) = 16.985.088	(4,7 3 3 3) = 16.104.448
(4,5 7 4 0) = 14.774.272	(4,6 4 5 1) = 21.299.712	(4,7 2 4 3) = 17.347.072
(4,5 6 5 0) = 19.066.880	(4,6 3 6 1) = 24.753.664	(4,7 1 5 3) = 16.309.248
(4,5 5 6 0) = 23.941.120	(4,6 2 7 1) = 26.247.936	(4,7 0 6 3) = 13.583.360
(4,5 4 7 0) = 28.528.640	(4,6 1 8 1) = 25.373.696	(4,7 5 0 3) = 6.697.984
(4,5 3 8 0) = 31.749.632	(4,6 0 9 1) = 22.652.416	(4,7 4 1 4) = 8.824.832
(4,5 2 9 0) = 32.814.848	(4,6 8 0 2) = 9.338.560	(4,7 3 2 4) = 10.975.232
(4,5,1,10,0) = 31.580.704	(4,6 7 1 2) = 12.268.544	(4,7 2 3 4) = 11.880.448
(4,5,0,11,0) = 28.564.992	(4,6 6 2 2) = 16.074.240	(4,7 1 4 4) = 11.038.208
(4,5,10,0,1) = 8.244.768	(4,6 5 3 2) = 20.984.832	(4,7 0 5 4) = 8.946.688
(4,5 9 1 1) = 10.779.392	(4,6 4 4 2) = 25.614.336	(4,8 8 0 0) = 1.597.696
(4,5 8 2 1) = 14.034.432	(4,6 3 5 2) = 28.207.616	(4,8 7 1 0) = 2.118.656
(4,5 7 3 1) = 18.172.416	(4,6 2 6 2) = 27.742.208	(4,8 6 2 0) = 2.807.808
(4,5 6 4 1) = 23.359.488	(4,6 1 7 2) = 24.499.456	(4,8 5 3 0) = 3.718.656
(4,5 5 5 1) = 28.815.360	(4,6 0 8 2) = 19.931.136	(4,8 4 4 0) = 4.921.344
(4,5 4 6 1) = 33.116.160	(4,6 7 0 3) = 11.013.120	(4,8 3 5 0) = 6.507.648
(4,5 3 7 1) = 34.970.624	(4,6 6 1 3) = 14.422.784	(4,8 2 6 0) = 8.376.064
(4,5 2 8 1) = 33.880.064	(4,6 5 2 3) = 18.817.536	(4,8 1 7 0) = 10.171.200
(4,5 1 9 1) = 30.346.560	(4,6 4 3 3) = 22.778.880	(4,8 0 8 0) = 11.428.224
(4,5,0,10,1) = 25.549.200	(4,6 3 4 3) = 24.513.536	(4,8 7 0 1) = 2.639.616
(4,5 9 0 2) = 13.314.016	(4,6 2 5 3) = 23.188.992	(4,8 6 1 1) = 3.496.960
(4,5 8 1 2) = 17.289.472	(4,6 1 6 3) = 19.395.072	(4,8 5 2 1) = 4.629.504
(4,5 7 2 2) = 22.310.400	(4,6 0 7 3) = 14.818.048	(4,8 4 3 1) = 6.124.032
(4,5 6 3 2) = 28.546.560	(4,6 6 0 4) = 9.646.720	(4,8 3 4 1) = 8.093.952
(4,5 5 4 2) = 34.271.232	(4,6 5 1 4) = 12.595.456	(4,8 2 5 1) = 10.244.480
(4,5 4 5 2) = 37.416.960	(4,6 4 2 4) = 15.542.784	(4,8 1 6 1) = 11.966.336
(4,5 3 6 2) = 36.825.088	(4,6 3 3 4) = 16.817.152	(4,8 0 7 1) = 12.685.248
(4,5 2 7 2) = 32.789.504	(4,6 2 4 4) = 15.732.736	(4,8 6 0 2) = 4.354.304
(4,5 1 8 2) = 26.813.056	(4,6 1 5 4) = 12.808.704	(4,8 5 1 2) = 5.762.048
(4,5 0 9 2) = 20.752.000	(4,6 0 6 4) = 9.423.872	(4,8 4 2 2) = 7.618.560
(4,5 8 0 3) = 15.488.512	(4,7 9 0 0) = 2.363.776	(4 8 3 3 2) = 10.063.872

(4 8 2 4 2) = 12.395.008	(4,10,1,3,2) = 4.638.720	(4,15,1,0,0) = 97.440
(4 8 1 5 2) = 13.688.192	(4,10,0,4,2) = 5.728.256	(4,15,0,1,0) = 129.792
(4 8 0 6 2) = 13.404.160	(4,10,3,0,3) = 2.372.096	(4,15,0,0,1) = 162.144
(4 8 5 0 3) = 5.178.880	(4,10,2,1,3) = 3.146.240	(4,16,0,0,0) = 65.088
(4 8 4 1 3) = 6.846.464	(4,10,1,2,3) = 4.170.624	(5,0,15,0,0) = 9.842.197
(4 8 3 2 3) = 9.042.432	(4,10,0,3,3) = 5.107.456	(5,0,14,1,0) = 12.107.244
(4 8 2 3 3) = 11.044.864	(4,10,2,0,4) = 2.099.456	(5,0,13,2,0) = 14.648.304
(4 8 1 4 3) = 11.905.280	(4,10,1,1,4) = 2.783.296	(5,0,12,3,0) = 17.372.000
(4 8 0 5 3) = 11.186.816	(4,10,0,2,4) = 3.478.784	(5,0,11,4,0) = 20.110.752
(4 8 4 0 4) = 4.571.136	(4,11,5,0,0) = 485.888	(5,0,10,5,0) = 22.609.344
(4 8 3 1 4) = 6.038.272	(4,11,4,1,0) = 646.144	(5 0 9 6 0) = 24.506.112
(4 8 2 2 4) = 7.525.376	(4,11,3,2,0) = 859.008	(5 0 8 7 0) = 25.433.856
(4 8 1 3 4) = 8.151.552	(4,11,2,3,0) = 1.141.632	(5 0 7 8 0) = 25.166.208
(4 8 0 4 4) = 7.568.384	(4,11,1,4,0) = 1.516.704	(5 0 6 9 0) = 23.712.384
(4 9 7 0 0) = 1.076.736	(4,11,0,5,0) = 2.014.208	(5,0,5,10,0) = 21.312.672
(4 9 6 1 0) = 1.429.504	(4,11,4,0,1) = 806.400	(5,0,4,11,0) = 18.347.520
(4 9 5 2 0) = 1.896.960	(4,11,3,1,1) = 1.071.872	(5,0,3,12,0) = 15.212.720
(4 9 4 3 0) = 2.515.968	(4,11,2,2,1) = 1.424.256	(5,0,2,13,0) = 12.219.984
(4 9 3 4 0) = 3.335.040	(4,11,1,3,1) = 1.891.776	(5,0,1,14,0) = 9.558.432
(4 9 2 5 0) = 4.417.920	(4,11,0,4,1) = 2.511.712	(5,0,0,15,0) = 7.311.200
(4 9 1 6 0) = 5.695.680	(4,11,3,0,2) = 1.337.344	(5,0,14,0,1) = 14.372.291
(4 9 0 7 0) = 6.924.544	(4,11,2,1,2) = 1.776.640	(5,0,13,1,1) = 17.189.364
(4 9 6 0 1) = 1.782.272	(4,11,1,2,2) = 2.359.296	(5,0,12,2,1) = 20.095.696
(4 9 5 1 1) = 2.364.416	(4,11,0,3,2) = 3.131.648	(5,0,11,3,1) = 22.849.504
(4 9 4 2 1) = 3.134.976	(4,11,2,0,3) = 1.597.952	(5,0,10,4,1) = 25.107.936
(4 9 3 3 1) = 4.154.112	(4,11,1,1,3) = 2.121.856	(5 0 9 5 1) = 26.402.880
(4 9 2 4 1) = 5.500.800	(4,11,0,2,3) = 2.816.256	(5 0 8 6 1) = 26.361.600
(4 9 1 5 1) = 6.973.440	(4,11,1,0,4) = 1.415.616	(5 0 7 7 1) = 24.898.560
(4 9 0 6 1) = 8.153.408	(4,11,0,1,4) = 1.879.040	(5 0 6 8 1) = 22.258.560
(4 9 5 0 2) = 2.946.560	(4,12,4,0,0) = 325.632	(5 0 5 9 1) = 18.912.960
(4 9 4 1 2) = 3.905.536	(4,12,3,1,0) = 433.280	(5,0,4,10,1) = 15.382.368
(4 9 3 2 2) = 5.173.248	(4,12,2,2,0) = 576.384	(5,0,3,11,1) = 12.077.920
(4 9 2 3 2) = 6.847.488	(4,12,1,3,0) = 766.560	(5,0,2,12,1) = 9.227.248
(4 9 1 4 2) = 8.446.080	(4,12,0,4,0) = 1.019.200	(5,0,1,13,1) = 6.896.880
(4 9 0 5 2) = 9.333.376	(4,12,3,0,1) = 540.628	(5,0,0,14,1) = 5.063.968
(4 9 4 0 3) = 3.911.296	(4,12,2,1,1) = 719.488	(5,0,13,0,2) = 20.006.437
(4 9 3 1 3) = 4.650.496	(4,12,1,2,1) = 756.736	(5,0,12,1,2) = 23.002.028
(4 9 2 2 3) = 6.154.752	(4,12,0,3,1) = 1.271.840	(5,0,11,2,2) = 25.603.312
(4 9 1 3 3) = 7.528.704	(4,12,2,0,2) = 898.048	(5,0,10,3,2) = 27.366.368
(4 9 0 4 3) = 8.119.424	(4,12,1,1,2) = 1.193.948	(5 0 9 4 2) = 27.697.824
(4 9 3 0 4) = 3.104.000	(4,12,0,2,2) = 1.586.944	(5 0 8 5 2) = 26.320.320
(4 9 2 1 4) = 4.108.544	(4,12,1,0,3) = 1.074.048	(5 0 7 6 2) = 23.435.520
(4 9 1 2 4) = 5.128.704	(4,12,0,1,3) = 1.427.456	(5 0 6 7 2) = 19.618.560
(4 9 0 3 4) = 5.558.272	(4,12,0,0,4) = 952.192	(5 0 5 8 2) = 15.567.360
(4,10,6,0,0) = 723.968	(4,13,3,0,0) = 217.984	(5 0 4 9 2) = 11.851.776
(4,10,5,1,0) = 962.048	(4,13,2,1,0) = 290.176	(5,0,3,10,2) = 8.773.472
(4,10,4,2,0) = 1.277.952	(4,13,1,2,0) = 386.208	(5,0,2,11,2) = 6.376.576
(4,10,3,3,0) = 1.696.896	(4,13,0,3,0) = 513.920	(5,0,1,12,2) = 4.566.512
(4,10,2,4,0) = 2.252.160	(4,13,2,0,1) = 362.368	(5,0,0,13,2) = 3.231.056
(4,10,1,5,0) = 2.987.616	(4,13,1,1,1) = 482.240	(5,0,12,0,3) = 20.013.254
(4,10,0,6,1) = 3.752.256	(4,13,0,2,1) = 641.632	(5,0,11,1,3) = 22.070.136
(4,10,5,0,1) = 1.200.128	(4,13,1,0,2) = 602.112	(5,0,10,2,3) = 23.292.144
(4,10,4,1,1) = 1.593.856	(4,13,0,1,2) = 801.024	(5 0 9 3 3) = 23.140.496
(4,10,3,2,1) = 2.115.840	(4,13,0,0,3) = 720.640	(5 0 8 4 3) = 21.410.976
(4,10,2,3,1) = 2.807.424	(4,14,2,0,0) = 145.792	(5 0 7 5 3) = 18.401.280
(4,10,1,4,1) = 3.723.072	(4,14,1,1,0) = 194.144	(5 0 6 6 3) = 14.748.800
(4,10,0,5,1) = 4.725.664	(4,14,0,2,0) = 258.496	(5 0 5 7 3) = 11.139.840
(4,10,4,0,2) = 1.987.584	(4,14,1,0,1) = 242.496	(5 0 4 8 3) = 8.060.928
(4,10,3,1,2) = 2.637.824	(4,14,0,1,1) = 322.848	(5 0 3 9 3) = 5.695.168
(4,10,2,2,2) = 3.499.008	(4,14,0,0,2) = 303.200	(5,0,2,10,3) = 3.979.680

(5,0,1,11,3) = 2.756.448	(5 1 8 3 3) = 24.611.968	(5,2,0,11,2) = 8.566.080
(5,0,0,12,3) = 1.895.600	(5 1 7 4 3) = 23.969.088	(5,2,10,0,3) = 15.064.616
(5,0,11,0,4) = 14.925.328	(5 1 6 5 3) = 21.459.328	(5 2 9 1 3) = 18.338.480
(5,0,10,1,4) = 15.758.232	(5 1 5 6 3) = 17.715.712	(5 2 8 2 3) = 21.759.520
(5 0 9 2 4) = 15.655.672	(5 1 4 7 3) = 13.627.392	(5 2 7 3 3) = 24.222.656
(5 0 8 3 4) = 14.383.696	(5 1 3 8 3) = 9.950.464	(5 2 6 4 3) = 24.672.512
(5 0 7 4 4) = 12.167.424	(5 1 2 9 3) = 7.061.888	(5 2 5 5 3) = 22.825.216
(5 0 6 5 4) = 9.517.120	(5,1,1,10,3) = 4.952.256	(5 2 4 6 3) = 19.235.840
(5 0 5 6 4) = 6.966.400	(5,1,0,11,3) = 3.439.776	(5 2 3 7 3) = 14.938.880
(5 0 4 7 4) = 4.869.120	(5,1,10,0,4) = 14.092.424	(5 2 2 8 3) = 10.934.144
(5 0 3 8 4) = 3.329.408	(5 1 9 1 4) = 15.817.784	(5 2 1 9 3) = 7.776.448
(5 0 2 9 4) = 2.264.192	(5 1 8 2 4) = 16.755.616	(5,2,0,10,3) = 5.462.112
(5,0,1,10,4) = 1.533.216	(5 1 7 3 4) = 16.277.408	(5 2 9 0 4) = 12.367.064
(5,0,0,11,4) = 1.034.752	(5 1 6 4 4) = 14.387.648	(5 2 8 1 4) = 14.707.920
(5,0,10,0,5) = 8.947.292	(5 1 5 5 4) = 11.608.576	(5 2 7 2 4) = 16.545.696
(5,1,14,0,0) = 7.577.150	(5 1 4 6 4) = 8.652.032	(5 2 6 3 4) = 16.876.928
(5,1,13,1,0) = 9.566.184	(5 1 3 7 4) = 6.090.752	(5 2 5 4 4) = 15.446.400
(5,1,12,2,0) = 11.924.608	(5 1 2 8 4) = 4.173.312	(5 2 4 5 4) = 12.728.064
(5,1,11,3,0) = 14.633.248	(5 1 1 9 4) = 2.842.624	(5 2 3 6 4) = 9.566.720
(5,1,10,4,0) = 17.612.160	(5,1,0,10,4) = 1.927.296	(5 2 2 7 4) = 6.735.872
(5 1 9 5 0) = 20.691.072	(5 1 9 0 5) = 8.936.540	(5 2 1 8 4) = 4.618.752
(5 1 8 6 0) = 23.492.352	(5 1 8 1 5) = 9.529.808	(5 2 0 9 4) = 3.147.776
(5 1 7 7 0) = 25.505.280	(5,2,13,0,0) = 5.588.116	(5 2 8 0 5) = 8.257.256
(5 1 6 8 0) = 26.287.616	(5,2,12,1,0) = 7.207.760	(5 2 7 1 5) = 9.357.776
(5 1 5 9 0) = 25.650.432	(5,2,11,2,0) = 9.215.968	(5 2 6 2 5) = 9.694.400
(5,1,4,10,0) = 23.725.440	(5,2,10,3,0) = 11.654.336	(5,3,12,0,0) = 3.968.472
(5,1,3,11,0) = 20.895.328	(5 2 9 4 0) = 14.533.248	(5,3,11,1,0) = 5.199.552
(5,1,2,12,0) = 17.637.952	(5 2 8 5 0) = 17.803.776	(5,3,10,2,0) = 6.777.600
(5,1,1,13,0) = 14.370.244	(5 2 7 6 0) = 21.135.360	(5 3 9 3 0) = 8.775.424
(5,1,0,14,0) = 11.368.640	(5 2 6 7 0) = 23.938.048	(5 3 8 4 0) = 11.262.720
(5,1,13,0,1) = 11.555.218	(5 2 5 8 0) = 25.595.136	(5 3 7 5 0) = 14.289.408
(5,1,12,1,1) = 14.283.032	(5 2 4 9 0) = 25.728.768	(5 3 6 6 0) = 17.601.536
(5,1,11,2,1) = 17.341.888	(5,2,3,10,0) = 24.346.016	(5 3 5 7 0) = 20.614.656
(5,1,10,3,1) = 20.591.072	(5,2,2,11,0) = 21.804.736	(5 3 4 8 0) = 22.645.248
(5 1 9 4 1) = 23.769.984	(5,2,1,12,0) = 18.635.744	(5 3 3 9 0) = 23.216.896
(5 1 8 5 1) = 26.293.632	(5,2,0,13,0) = 15.326.080	(5,3,2,10,0) = 22.258.752
(5 1 7 6 1) = 27.518.208	(5,2,12,0,1) = 8.827.404	(5,3,1,11,0) = 20.099.616
(5 1 6 7 1) = 27.069.952	(5,2,11,1,1) = 11.224.176	(5,3,0,12,0) = 17.269.344
(5 1 5 8 1) = 25.013.248	(5,2,10,2,1) = 14.092.704	(5,3,11,0,1) = 6.430.632
(5 1 4 9 1) = 21.800.448	(5 2 9 3 1) = 17.412.160	(5,3,10,1,1) = 8.355.648
(5,1,3,10,1) = 18.065.216	(5 2 8 4 1) = 21.074.304	(5 3 9 2 1) = 10.773.248
(5,1,2,11,1) = 14.380.576	(5 2 7 5 1) = 24.466.944	(5 3 8 3 1) = 13.750.016
(5,1,1,12,1) = 11.102.336	(5 2 6 6 1) = 26.740.736	(5 3 7 4 1) = 17.316.096
(5,1,0,13,1) = 8.367.136	(5 2 5 7 1) = 27.252.224	(5 3 6 5 1) = 20.913.664
(5,1,12,0,2) = 17.010.846	(5 2 4 8 1) = 25.862.400	(5 3 5 6 1) = 23.627.776
(5,1,11,1,2) = 20.400.744	(5 2 3 9 1) = 22.963.264	(5 3 4 7 1) = 24.675.840
(5,1,10,2,2) = 23.840.256	(5,2,2,10,1) = 19.263.456	(5 3 3 8 1) = 23.788.544
(5 1 9 3 2) = 26.948.896	(5,2,1,11,1) = 15.466.752	(5 3 2 9 1) = 21.300.608
(5 1 8 4 2) = 28.817.280	(5,2,0,12,1) = 12.016.416	(5,3,1,10,1) = 17.940.480
(5 1 7 5 2) = 28.742.784	(5,2,11,0,2) = 13.620.948	(5,3,0,11,1) = 14.439.072
(5 1 6 6 2) = 26.621.696	(5,2,10,1,2) = 16.961.232	(5,3,10,0,2) = 10.280.664
(5 1 5 7 2) = 22.956.544	(5 2 9 2 2) = 20.731.616	(5 3 9 1 2) = 13.190.848
(5 1 4 8 2) = 18.587.648	(5 2 8 3 2) = 24.736.448	(5 3 8 2 2) = 16.726.784
(5 1 3 9 2) = 14.329.984	(5 2 7 4 2) = 27.859.584	(5 3 7 3 2) = 20.882.176
(5,1,2,10,2) = 10.695.936	(5 2 6 5 2) = 29.014.528	(5 3 6 4 2) = 24.511.232
(5,1,1,11,2) = 7.824.096	(5 2 5 6 2) = 27.763.712	(5 3 5 5 2) = 26.341.888
(5,1,0,12,2) = 5.631.936	(5 2 4 7 2) = 24.172.576	(5 3 4 6 2) = 25.723.904
(5,1,11,0,3) = 17.956.372	(5 2 3 8 2) = 20.064.128	(5 3 3 7 2) = 22.901.248
(5,1,10,1,3) = 20.848.128	(5 2 2 9 2) = 15.563.648	(5 3 2 8 2) = 18.812.672
(5 1 9 2 3) = 23.357.776	(5,2,1,10,2) = 11.670.048	(5 3 1 9 2) = 14.580.352

(5,3,0,10,2) =	10.937.664	(5 4 5 3 3) =	17.410.048	(5 5 3 3 4) =	9.523.712
(5 3 9 0 3) =	11.790.752	(5 4 4 4 3) =	18.654.720	(5 5 2 4 4) =	8.899.584
(5 3 8 1 3) =	14.917.440	(5 4 3 5 3) =	17.704.960	(5 5 1 5 4) =	7.209.984
(5 3 7 2 3) =	18.565.248	(5 4 2 6 3) =	14.949.376	(5 5 0 6 4) =	5.280.256
(5 3 6 3 3) =	21.579.392	(5 4 1 7 3) =	11.448.576	(5 5 5 0 5) =	3.891.520
(5 3 5 4 3) =	22.689.024	(5 4 0 8 3) =	8.311.680	(5 5 4 1 5) =	4.871.808
(5 3 4 5 3) =	21.396.480	(5 4 7 0 4) =	7.547.840	(5 5 3 2 5) =	5.406.976
(5 3 3 6 3) =	18.163.712	(5 4 6 1 4) =	9.747.008	(5 5 2 3 5) =	5.095.936
(5 3 2 7 3) =	14.078.976	(5 4 5 2 4) =	11.891.200	(5 5 1 4 5) =	4.101.120
(5 3 1 8 3) =	10.262.016	(5 4 4 3 4) =	12.809.984	(5 5 0 5 5) =	2.951.168
(5 3 0 9 3) =	7.294.976	(5 4 3 4 4) =	12.032.000	(5 6 9 0 0) =	1.243.328
(5 3 8 0 4) =	10.026.208	(5 4 2 5 4) =	9.905.152	(5 6 8 1 0) =	1.655.040
(5 3 7 1 4) =	12.504.576	(5 4 1 6 4) =	7.302.656	(5 6 7 2 0) =	2.202.624
(5 3 6 2 4) =	14.752.192	(5 4 0 7 4) =	5.088.768	(5 6 6 3 0) =	2.930.688
(5 3 5 3 4) =	15.573.376	(5 4 6 0 5) =	5.402.912	(5 6 5 4 0) =	3.898.368
(5 3 4 4 4) =	14.539.776	(5 4 5 1 5) =	6.639.360	(5 6 4 5 0) =	5.184.000
(5 3 3 5 4) =	12.058.624	(5 4 4 2 5) =	7.307.136	(5 6 3 6 0) =	6.706.688
(5 3 2 6 4) =	9.026.560	(5 4 3 3 5) =	6.920.192	(5 6 2 7 0) =	8.171.336
(5 3 1 7 4) =	6.316.032	(5 4 2 4 5) =	5.663.232	(5 6 1 8 0) =	9.202.816
(5 3 0 8 4) =	4.327.936	(5,5,10,0,0) =	1.853.280	(5 6 0 9 0) =	9.534.080
(5 3 7 0 5) =	6.973.952	(5 5 9 1 0) =	2.463.232	(5 6 8 0 1) =	2.066.752
(5 3 6 1 5) =	8.290.016	(5 5 8 2 0) =	3.271.424	(5 6 7 1 1) =	2.750.208
(5 3 5 2 5) =	8.920.768	(5 5 7 3 0) =	4.340.224	(5 6 6 2 1) =	3.658.752
(5 3 4 3 5) =	8.390.144	(5 5 6 4 0) =	5.749.760	(5 6 5 3 1) =	4.866.048
(5,4,11,0,0) =	2.737.392	(5 5 5 5 0) =	7.601.152	(5 6 4 4 1) =	6.469.632
(5,4,10,1,0) =	3.621.504	(5 5 4 6 0) =	9.774.080	(5 6 3 5 1) =	8.229.376
(5 4 9 2 0) =	5.938.048	(5 5 3 7 0) =	11.864.576	(5 6 2 6 1) =	9.641.984
(5 4 8 3 0) =	6.288.128	(5 5 2 8 0) =	13.347.072	(5 6 1 7 1) =	10.231.296
(5 4 7 4 0) =	8.236.032	(5 5 1 9 0) =	13.839.232	(5 6 0 8 1) =	9.865.344
(5 4 6 5 0) =	10.722.304	(5,5,0,10,0) =	13.508.000	(5 6 7 0 2) =	3.433.664
(5 4 5 6 0) =	13.568.512	(5 5 9 0 1) =	3.073.184	(5 6 6 1 2) =	4.567.296
(5 4 4 7 0) =	16.263.168	(5 5 8 1 1) =	4.079.616	(5 6 5 2 2) =	6.073.344
(5 4 3 8 0) =	18.165.376	(5 5 7 2 1) =	5.409.024	(5 6 4 3 2) =	8.073.216
(5 4 2 9 0) =	18.806.144	(5 5 6 3 1) =	7.159.296	(5 6 3 4 2) =	9.989.120
(5,4,1,10,0) =	18.102.912	(5 5 5 4 1) =	9.452.544	(5 6 2 5 2) =	11.054.592
(5,4,0,11,0) =	16.366.560	(5 5 4 5 1) =	11.947.008	(5 6 1 6 2) =	10.820.608
(5,4,10,0,1) =	4.505.616	(5 5 3 6 1) =	13.955.072	(5 6 0 7 2) =	9.499.392
(5 4 9 1 1) =	5.938.048	(5 5 2 7 1) =	14.829.568	(5 6 6 0 3) =	4.108.928
(5 4 8 2 1) =	7.796.480	(5 5 1 8 1) =	14.331.392	(5 6 5 1 3) =	5.463.552
(5 4 7 3 1) =	10.183.936	(5 5 0 9 1) =	12.776.768	(5 6 4 2 3) =	7.262.208
(5 4 6 4 1) =	13.208.576	(5 5 8 0 2) =	5.086.048	(5 6 3 3 3) =	8.910.848
(5 4 5 5 1) =	16.414.720	(5 5 7 1 2) =	6.738.432	(5 6 2 4 3) =	9.621.504
(5 4 4 6 1) =	18.957.824	(5 5 6 2 2) =	8.909.568	(5 6 1 5 3) =	9.030.144
(5 4 3 7 1) =	20.067.584	(5 5 5 3 2) =	11.745.792	(5 6 0 6 3) =	7.492.096
(5 4 2 8 1) =	19.446.912	(5 5 4 4 2) =	14.441.472	(5 6 5 0 4) =	3.644.416
(5 4 1 9 1) =	17.399.680	(5 5 3 5 2) =	15.963.136	(5 6 4 1 4) =	4.844.544
(5,4,0,10,1) =	14.630.208	(5 5 2 6 2) =	15.704.064	(5 6 3 2 4) =	6.068.224
(5 4 9 0 2) =	7.370.480	(5 5 1 7 2) =	13.833.216	(5 6 2 3 4) =	6.584.320
(5 4 8 1 2) =	9.654.912	(5 5 0 8 2) =	11.222.144	(5 6 1 4 4) =	6.104.064
(5 4 7 2 2) =	12.571.392	(5 5 7 0 3) =	6.058.496	(5 6 0 5 4) =	4.924.928
(5 4 6 3 2) =	16.233.216	(5 5 6 1 3) =	8.008.064	(5 6 4 0 5) =	2.667.008
(5 4 5 4 2) =	19.620.864	(5 5 5 2 3) =	10.552.576	(5 6 3 1 5) =	3.359.744
(5 4 4 5 2) =	21.500.928	(5 5 4 3 3) =	12.866.048	(5 6 2 2 5) =	3.725.312
(5 4 3 6 2) =	21.177.344	(5 5 3 4 3) =	13.890.560	(5 6 1 3 5) =	3.485.696
(5 4 2 7 2) =	18.826.240	(5 5 2 5 3) =	13.130.752	(5 6 0 4 5) =	2.795.008
(5 4 1 8 2) =	15.352.448	(5 5 1 6 3) =	10.938.368	(5 7 8 0 0) =	831.616
(5 4 0 9 2) =	11.860.736	(5 5 0 7 3) =	8.324.352	(5 7 7 1 0) =	1.107.456
(5 4 8 0 3) =	8.664.064	(5 5 6 0 4) =	5.348.672	(5 7 6 2 0) =	1.474.560
(5 4 7 1 3) =	11.269.632	(5 5 5 1 4) =	7.052.928	(5 7 5 3 0) =	1.963.008
(5 4 6 2 3) =	14.531.200	(5 5 4 2 4) =	8.772.864	(5 7 4 4 0) =	2.612.736

(573 50) =	3.476.736	(583 04) =	1.636.864	(5,11,3,0,1) =	275.912
(572 60) =	4.500.736	(582 14) =	2.178.816	(5,11,2,1,1) =	367.104
(571 70) =	5.488.000	(581 24) =	2.732.032	(5,11,1,2,1) =	489.216
(570 80) =	6.179.648	(580 34) =	2.964.992	(5,11,0,3,1) =	651.904
(577 01) =	1.383.296	(582 05) =	1.198.976	(5,11,2,0,2) =	458.752
(576 11) =	1.841.664	(581 15) =	1.511.936	(5,11,1,1,2) =	611.328
(575 21) =	2.451.456	(580 25) =	1.676.800	(5,11,0,2,2) =	814.592
(574 31) =	3.262.464	(596 00) =	371.200	(5,11,1,0,3) =	550.144
(573 41) =	4.310.736	(595 10) =	494.592	(5,11,0,1,3) =	733.056
(572 51) =	5.524.736	(594 20) =	658.944	(5,11,0,0,4) =	488.768
(571 61) =	6.475.264	(593 30) =	877.824	(5,12,3,0,0) =	110.336
(570 71) =	6.871.296	(592 40) =	1.169.280	(5,12,2,1,0) =	147.072
(576 02) =	2.300.032	(591 50) =	1.557.312	(5,12,1,2,0) =	196.032
(575 12) =	3.061.248	(590 60) =	2.017.600	(5,12,0,3,0) =	261.280
(574 22) =	4.073.472	(595 01) =	617.984	(5,12,2,0,1) =	122.624
(573 32) =	5.419.008	(594 11) =	823.296	(5,12,1,1,1) =	163.456
(572 42) =	6.708.736	(593 21) =	1.096.704	(5,12,0,2,1) =	326.528
(571 52) =	7.425.792	(592 31) =	1.460.736	(5,12,1,0,2) =	306.176
(570 62) =	7.267.328	(591 11) =	1.945.344	(5,12,0,1,2) =	408.064
(575 03) =	2.754.304	(590 51) =	2.477.888	(5,12,0,0,3) =	367.232
(574 13) =	3.664.896	(594 02) =	1.028.608	(5,13,2,0,0) =	73.600
(573 23) =	4.875.264	(593 12) =	1.370.112	(5,13,1,1,0) =	98.112
(572 33) =	5.985.280	(592 22) =	1.824.768	(5,13,0,2,0) =	130.784
(571 43) =	6.463.488	(591 32) =	2.429.952	(5,13,0,0,1) =	122.624
(570 53) =	6.064.384	(590 42) =	3.010.432	(5,13,0,1,1) =	163.456
(574 04) =	2.444.288	(593 03) =	1.232.896	(5,13,0,0,2) =	204.288
(573 14) =	3.251.712	(592 13) =	1.641.984	(5,14,1,0,0) =	49.088
(572 24) =	4.075.520	(591 23) =	2.186.496	(5,14,0,1,0) =	65.440
(571 34) =	4.422.656	(590 33) =	2.686.208	(5,14,0,0,1) =	81.812
(570 44) =	4.098.560	(592 04) =	1.094.912	(5,15,0,0,0) =	32.736
(573 05) =	1.789.696	(591 14) =	1.458.048	(6,0,14,0,0) =	3.911.833
(572 15) =	2.255.872	(690 24) =	1.828.864	(6,0,13,1,0) =	4.945.044
(571 25) =	2.501.632	(591 05) =	802.240	(6,0,12,2,0) =	6.170.112
(570 35) =	2.339.840	(590 15) =	1.011.968	(6,0,11,3,0) =	7.578.196
(587 00) =	555.776	(5,10,5,0,0) =	247.808	(6,0,10,4,0) =	9.117.888
(586 10) =	740.352	(5,10,4,1,0) =	330.240	(60 950) =	10.704.960
(585 20) =	986.112	(5,10,3,2,0) =	440.064	(60 860) =	12.139.392
(584 30) =	1.313.280	(5,10,2,3,0) =	586.368	(60 770) =	13.158.144
(583 40) =	1.748.736	(5,10,1,4,0) =	781.248	(60 680) =	13.537.024
(582 50) =	2.328.192	(5,10,0,5,0) =	1.040.800	(60 590) =	13.184.640
(581 60) =	3.015.296	(5,10,4,0,1) =	412.672	(6,0,4,10,0) =	12.174.528
(580 70) =	3.677.888	(5,10,3,1,1) =	549.888	(6,0,3,11,0) =	10.706.736
(586 01) =	924.928	(5,10,2,2,1) =	732.672	(6,0,2,12,0) =	9.026.784
(585 11) =	1.231.872	(5,10,1,3,1) =	976.128	(6,0,1,13,0) =	7.347.024
(584 21) =	1.610.448	(5,10,0,4,1) =	1.300.352	(6,0,0,14,0) =	5.807.568
(583 31) =	2.184.192	(5,10,3,0,2) =	687.104	(6,0,13,0,1) =	5.978.265
(582 41) =	2.907.648	(5,10,2,1,2) =	915.456	(6,0,12,1,1) =	7.395.180
(581 51) =	3.702.400	(5,10,1,2,2) =	1.219.584	(6,0,11,2,1) =	8.981.280
(580 61) =	4.340.480	(5,10,0,3,2) =	1.621.576	(6,0,10,3,1) =	10.660.080
(585 02) =	1.538.816	(5,10,2,0,3) =	823.808	(60 941) =	12.292.032
(584 12) =	2.049.024	(5,10,1,1,3) =	1.097.472	(60 851) =	13.573.824
(583 22) =	2.727.936	(5,10,0,2,3) =	1.461.888	(60 761) =	14.176.896
(582 32) =	3.631.104	(5,10,1,0,4) =	731.776	(60 671) =	13.915.904
(581 42) =	4.497.152	(5,10,0,1,4) =	974.784	(60 581) =	12.832.256
(580 52) =	4.978.560	(5,10,0,0,5) =	536.288	(60 491) =	11.164.416
(584 03) =	1.843.712	(5,11,4,0,0) =	165.376	(6,0,3,10,1) =	9.238.944
(583 13) =	2.454.528	(5,11,3,1,0) =	220.416	(6,0,2,11,1) =	7.387.280
(582 23) =	3.267.072	(5,11,2,2,0) =	293.760	(6,0,1,12,1) =	5.667.264
(581 33) =	4.012.544	(5,11,1,3,0) =	391.488	(6,0,0,13,1) =	4.268.112
(580 43) =	4.333.568	(5,11,0,4,0) =	521.696	(6,0,12,0,2) =	8.812.095

(6,0,11,1,2) = 10.567.380	(6,1,12,0,1) = 4.561.350	(6,2,9,3,0) = 4.536.192
(6,0,10,2,2) = 12.338.880	(6,1,11,1,1) = 5.809.080	(6,2,8,4,0) = 5.834.112
(6,0,9,3,2) = 13.923.984	(6,1,10,2,1) = 7.302.480	(6,2,7,5,0) = 7.415.040
(6,0,8,4,2) = 14.855.616	(6,1,9,3,1) = 9.028.128	(6,2,6,6,0) = 9.144.832
(6,0,7,5,2) = 14.779.968	(6,1,8,4,1) = 10.924.224	(6,2,5,7,0) = 10.715.904
(6,0,6,6,2) = 13.654.912	(6,1,7,5,1) = 12.669.696	(6,2,4,8,0) = 11.769.600
(6,0,5,7,2) = 11.748.608	(6,1,6,6,1) = 13.788.160	(6,2,3,7,0) = 12.057.984
(6,0,4,8,2) = 9.496.576	(6,1,5,7,1) = 14.062.336	(6,2,2,10,0) = 11.548.128
(6,0,3,9,2) = 7.313.472	(6,1,4,8,1) = 13.318.272	(6,2,1,11,0) = 10.416.816
(6,0,2,10,2) = 5.485.824	(6,1,3,9,1) = 11.803.680	(6,2,0,12,0) = 8.941.344
(6,0,1,11,2) = 3.987.692	(6,1,2,10,1) = 9.887.856	(6,2,11,0,1) = 3.313.620
(6,0,0,12,2) = 2.868.960	(6,1,1,11,1) = 7.930.368	(6,2,10,1,1) = 4.315.680
(6,0,11,0,3) = 9.299.610	(6,1,0,12,1) = 6.155.856	(6,2,9,2,1) = 5.576.832
(6,0,10,1,3) = 10.786.080	(6,1,11,0,2) = 7.056.810	(6,2,8,3,1) = 7.132.032
(6,0,9,2,3) = 12.060.328	(6,1,10,1,2) = 8.796.880	(6,2,7,4,1) = 8.995.968
(6,0,8,3,3) = 12.674.880	(6,1,9,2,2) = 10.753.776	(6,2,6,5,1) = 10.874.624
(6,0,7,4,3) = 12.308.640	(6,1,8,3,2) = 12.820.320	(6,2,5,6,1) = 12.286.976
(6,0,6,5,3) = 10.988.736	(6,1,7,4,2) = 14.415.168	(6,2,4,7,1) = 12.823.296
(6,0,5,6,3) = 9.049.344	(6,1,6,5,2) = 14.915.840	(6,2,3,8,1) = 12.346.368
(6,0,4,7,3) = 6.948.864	(6,1,5,6,2) = 14.299.648	(6,2,2,9,1) = 11.038.272
(6,0,3,8,3) = 5.069.440	(6,1,4,7,2) = 12.574.208	(6,2,1,10,1) = 9.287.504
(6,0,2,9,3) = 3.595.968	(6,1,3,8,2) = 10.289.088	(6,2,0,11,1) = 7.465.872
(6,0,1,10,3) = 2.520.672	(6,1,2,9,2) = 7.972.032	(6,2,10,0,2) = 5.317.740
(6,0,0,11,3) = 1.750.224	(6,1,1,10,2) = 5.972.880	(6,2,9,1,2) = 6.837.984
(6,0,10,0,4) = 7.386.100	(6,1,0,11,2) = 4.381.344	(6,2,8,2,2) = 8.687.232
(6,0,9,1,4) = 8.161.436	(6,1,10,0,3) = 7.813.140	(6,2,7,3,2) = 10.859.904
(6,0,8,2,4) = 8.620.880	(6,1,9,1,3) = 9.511.812	(6,2,6,4,2) = 12.753.280
(6,0,7,3,4) = 8.348.880	(6,1,8,2,3) = 11.273.744	(6,2,5,5,2) = 13.699.328
(6,0,6,4,4) = 7.357.152	(6,1,7,3,3) = 12.525.024	(6,2,4,6,2) = 13.359.616
(6,0,5,5,4) = 5.920.512	(6,1,6,4,3) = 12.725.376	(6,2,3,7,2) = 11.819.440
(6,0,4,6,4) = 4.404.864	(6,1,5,5,3) = 11.739.264	(6,2,2,8,2) = 9.730.176
(6,0,3,7,4) = 3.098.624	(6,1,4,6,3) = 9.865.728	(6,2,1,9,2) = 7.532.736
(6,0,2,8,4) = 2.122.496	(6,1,3,7,3) = 7.645.568	(6,2,0,10,2) = 5.646.240
(6,0,1,9,4) = 1.445.376	(6,1,2,8,3) = 5.590.464	(6,2,9,0,3) = 6.114.448
(6,0,0,10,4) = 979.776	(6,1,1,9,3) = 3.973.728	(6,2,8,1,3) = 7.749.920
(6,0,9,0,5) = 8.925.540	(6,1,0,10,3) = 2.789.808	(6,2,7,2,3) = 9.656.896
(6,0,8,1,5) = 4.898.216	(6,1,9,0,4) = 6.410.764	(6,2,6,3,3) = 11.227.968
(6,0,7,2,5) = 4.797.216	(6,1,8,1,4) = 7.615.976	(6,2,5,4,3) = 11.796.096
(6,0,6,3,5) = 4.233.840	(6,1,7,2,4) = 8.548.816	(6,2,4,5,3) = 11.103.744
(6,0,5,4,5) = 3.381.888	(6,1,6,3,4) = 8.648.640	(6,2,3,6,3) = 9.401.344
(6,0,4,5,5) = 2.477.376	(6,1,5,4,4) = 7.933.632	(6,2,2,7,3) = 7.268.352
(6,0,3,6,5) = 1.707.520	(6,1,4,5,4) = 6.517.632	(6,2,1,8,3) = 5.292.288
(6,0,2,7,5) = 1.146.368	(6,1,3,6,4) = 4.887.808	(6,2,0,9,3) = 3.759.744
(6,0,1,8,5) = 768.256	(6,1,2,7,4) = 3.472.384	(6,2,8,0,4) = 5.205.552
(6,0,0,9,5) = 514.176	(6,1,1,8,4) = 2.356.992	(6,2,7,1,4) = 6.500.352
(6,0,8,0,6) = 2.449.108	(6,1,0,9,4) = 1.605.888	(6,2,6,2,4) = 7.671.008
(6,1,13,0,0) = 2.878.602	(6,1,8,0,5) = 4.271.412	(6,2,5,3,4) = 9.090.304
(6,1,12,1,0) = 3.719.976	(6,1,7,1,5) = 4.830.184	(6,2,4,4,4) = 7.537.152
(6,1,11,2,0) = 4.764.528	(6,1,6,2,5) = 4.989.024	(6,2,3,5,4) = 6.232.064
(6,1,10,3,0) = 6.033.504	(6,1,5,3,5) = 4.575.840	(6,2,2,6,4) = 4.651.520
(6,1,9,4,0) = 7.530.816	(6,1,4,4,5) = 3.736.512	(6,2,1,7,4) = 3.251.712
(6,1,8,5,0) = 9.227.520	(6,1,3,5,5) = 2.758.784	(6,2,0,8,4) = 2.227.200
(6,1,7,6,0) = 10.948.608	(6,1,2,6,5) = 1.399.520	(6,2,7,0,5) = 3.621.248
(6,1,6,7,0) = 12.374.528	(6,1,1,7,5) = 1.275.392	(6,2,6,1,5) = 4.455.776
(6,1,5,8,0) = 13.224.576	(6,1,0,8,5) = 854.784	(6,2,5,2,5) = 4.628.576
(6,1,4,9,0) = 13.271.424	(6,1,7,0,6) = 2.397.108	(6,2,4,3,5) = 4.343.040
(6,1,3,10,0) = 12.537.552	(6,1,6,1,6) = 2.494.512	(6,2,3,4,5) = 3.570.688
(6,1,2,11,0) = 11.212.704	(6,2,12,0,0) = 2.037.228	(6,2,2,5,5) = 2.621.696
(6,1,1,12,0) = 9.571.526	(6,2,11,1,0) = 2.675.424	(6,2,1,6,5) = 1.792.000
(6,1,0,13,0) = 7.863.696	(6,2,10,2,0) = 3.495.552	(6,2,0,7,5) = 1.202.688

(6 2 6 0 6) ==	2.116.920	(6 3 5 0 6) ==	1.690.944	(6 5 9 0 0) ==	629.856
(6 2 5 1 6) ==	2.287.920	(6 3 4 1 6) ==	1.668.256	(6 5 8 1 0) ==	839.808
(6 2 4 2 6) ==	2.171.520	(6 3 3 2 6) ==	1.785.344	(6 5 7 2 0) ==	1.118.744
(6,3,11,0,0) ==	1.399.032	(6 3 2 3 6) ==	1.466.496	(6 5 6 3 0) ==	1.194.992
(6,3,10,1,0) ==	1.855.296	(6,4,10,0,0) ==	942.768	(6 5 5 4 0) ==	1.994.656
(6 3 9 2 0) ==	2.454.912	(6 4 9 1 0) ==	2.555.680	(6 5 4 5 0) ==	2.654.208
(6 3 8 3 0) ==	3.238.272	(6 4 8 2 0) ==	1.671.552	(6 5 3 6 0) ==	3.442.176
(6 3 7 4 0) ==	4.253.184	(6 4 7 3 0) ==	2.223.360	(6 5 2 7 0) ==	4.202.496
(6 3 6 5 0) ==	5.552.640	(6 4 6 4 0) ==	2.953.728	(6 5 1 8 0) ==	4.734.720
(6 3 5 6 0) ==	7.043.328	(6 4 5 5 0) ==	3.916.800	(6 5 0 9 0) ==	4.905.088
(6 3 4 7 0) ==	8.455.680	(6 4 4 6 0) ==	5.050.368	(6 5 8 0 1) ==	1.049.760
(6 3 3 8 0) ==	9.451.584	(6 4 3 7 0) ==	6.142.464	(6 5 7 1 1) ==	1.399.680
(6 3 2 9 0) ==	9.784.512	(6 4 2 8 0) ==	6.916.608	(6 5 6 2 1) ==	1.866.240
(6,3,1,10,0) ==	9.413.472	(6 4 1 9 0) ==	7.172.160	(6 5 5 3 1) ==	2.488.320
(6,3,0,11,0) ==	8.504.704	(6,4,0,10,0) ==	6.994.888	(6 5 4 4 1) ==	3.317.760
(6,3,10,0,1) ==	2.311.560	(6 4 9 0 1) ==	1.568.592	(6 5 3 5 1) ==	4.230.144
(6 3 9 1 1) ==	3.054.528	(6 4 8 1 1) ==	2.037.424	(6 5 2 6 1) ==	4.962.816
(6 3 8 2 1) ==	4.021.632	(6 4 7 2 1) ==	2.775.168	(6 5 1 7 1) ==	5.266.944
(6 3 7 3 1) ==	5.268.096	(6 4 6 3 1) ==	3.684.096	(6 5 0 8 1) ==	5.075.456
(6 3 6 4 1) ==	6.852.096	(6 4 5 4 1) ==	4.879.872	(6 5 7 0 2) ==	1.749.600
(6 3 5 5 1) ==	8.534.016	(6 4 4 5 1) ==	6.183.936	(6 5 6 1 2) ==	2.332.800
(6 3 4 6 1) ==	9.735.936	(6 4 3 6 1) ==	7.234.560	(6 5 5 2 2) ==	3.110.400
(6 3 3 7 1) ==	10.447.488	(6 4 2 7 1) ==	7.690.752	(6 5 4 3 2) ==	4.147.200
(6 3 2 8 1) ==	10.117.440	(6 4 1 8 1) ==	7.427.712	(6 5 3 4 2) ==	5.142.528
(6 3 1 9 1) ==	9.042.432	(6 4 0 9 1) ==	6.615.616	(6 5 2 5 2) ==	5.695.488
(6,3,0,10,1) ==	7.595.936	(6 4 8 0 2) ==	2.606.256	(6 5 1 6 2) ==	5.571.072
(6 3 9 0 2) ==	3.797.496	(6 4 7 1 2) ==	3.462.912	(6 5 0 7 2) ==	4.884.468
(6 3 8 1 2) ==	4.988.736	(6 4 6 2 2) ==	4.593.024	(6 5 6 0 3) ==	2.099.520
(6 3 7 2 2) ==	6.514.560	(6 4 5 3 2) ==	6.085.648	(6 5 5 1 3) ==	2.799.360
(6 3 6 3 2) ==	8.431.096	(6 4 4 4 2) ==	6.674.688	(6 5 4 2 3) ==	3.732.480
(6 3 5 4 2) ==	10.215.936	(6 4 3 5 2) ==	8.285.184	(6 5 3 3 3) ==	4.589.568
(6 3 4 5 2) ==	11.202.048	(6 4 2 6 2) ==	8.146.944	(6 5 2 4 3) ==	4.958.208
(6 3 3 6 2) ==	11.026.944	(6 4 1 7 2) ==	7.164.672	(6 5 1 5 3) ==	4.617.936
(6 3 2 7 2) ==	9.787.392	(6 4 0 8 2) ==	5.803.520	(6 5 0 6 3) ==	3.818.704
(6 3 1 8 2) ==	7.967.424	(6 4 7 0 3) ==	3.115.008	(6 5 5 0 4) ==	1.866.240
(6 3 0 9 2) ==	6.149.440	(6 4 6 1 3) ==	4.130.496	(6 5 4 1 4) ==	2.488.320
(6 3 8 0 3) ==	4.478.976	(6 4 5 2 3) ==	5.461.632	(6 5 3 2 4) ==	3.124.224
(6 3 7 1 3) ==	6.524.256	(6 4 4 3 3) ==	6.674.688	(6 5 2 3 4) ==	3.391.488
(6 3 6 2 3) ==	7.555.392	(6 4 3 4 3) ==	7.211.520	(6 5 1 4 4) ==	3.139.584
(6 3 5 3 3) ==	9.068.544	(6 4 2 5 3) ==	6.810.624	(6 5 0 5 4) ==	2.527.232
(6 3 4 4 3) ==	9.720.576	(6 4 1 6 3) ==	5.660.160	(6 5 4 0 5) ==	1.368.576
(6 3 3 5 3) ==	9.216.000	(6 4 0 7 3) ==	4.612.736	(6 5 3 1 5) ==	1.728.000
(6 3 2 6 3) ==	7.764.480	(6 4 6 0 4) ==	2.757.024	(6 5 2 2 5) ==	1.916.928
(6 3 1 7 3) ==	5.932.416	(6 4 5 1 4) ==	3.647.808	(6 5 1 3 5) ==	1.790.996
(6 3 0 8 3) ==	4.302.784	(6 4 4 2 4) ==	4.549.248	(6 5 0 4 5) ==	1.432.576
(6 3 7 0 4) ==	3.910.752	(6 4 3 3 4) ==	4.942.080	(6 5 3 0 6) ==	853.760
(6 3 6 1 4) ==	5.064.480	(6 4 2 4 4) ==	4.762.608	(6 5 2 1 6) ==	699.760
(6 3 5 2 4) ==	6.190.848	(6 4 1 5 4) ==	3.726.336	(6 5 1 2 6) ==	896.000
(6 3 4 3 4) ==	6.671.232	(6 4 0 6 4) ==	2.722.816	(6 5 0 3 6) ==	721.280
(6 3 3 4 4) ==	6.257.664	(6 4 5 0 5) ==	2.010.528	(6 6 8 0 0) ==	419.904
(6 3 2 5 4) ==	5.137.920	(6 4 4 1 5) ==	2.523.456	(6 6 7 1 0) ==	559.872
(6 3 1 6 4) ==	3.777.792	(6 4 3 2 5) ==	2.802.816	(6 6 6 2 0) ==	746.496
(6 3 0 7 4) ==	2.630.144	(6 4 2 3 5) ==	2.638.080	(6 6 5 3 0) ==	995.328
(6 3 6 0 5) ==	2.804.112	(6 4 1 4 5) ==	2.116.608	(6 6 4 4 0) ==	1.327.104
(6 3 5 1 5) ==	3.452.544	(6 4 0 5 5) ==	1.519.616	(6 6 3 5 0) ==	1.769.972
(6 3 4 2 5) ==	3.801.024	(6 4 4 0 6) ==	1.238.688	(6 6 2 6 0) ==	2.294.784
(6 3 3 3 5) ==	5.450.240	(6 4 3 1 6) ==	1.379.392	(6 6 1 7 0) ==	2.801.664
(6 3 2 4 5) ==	2.932.992	(6 4 2 2 6) ==	1.310.848	(6 6 0 8 0) ==	3.156.480
(6 3 1 5 5) ==	2.118.144	(6 4 1 3 6) ==	1.059.072	(6 6 7 0 1) ==	699.840
(6 3 0 6 5) ==	1.442.560	(6 4 0 4 6) ==	759.808	(6 6 6 1 1) ==	933.120

(6 6 5 2 1) =	1.244.160	(6 7 1 4 2) =	2.285.568	(6 9 4 0 1) =	207.360
(6 6 4 3 1) =	1.658.880	(6 7 0 5 2) =	962.880	(6 9 3 1 1) =	276.480
(6 6 3 4 1) =	2.211.840	(6 7 4 0 3) =	933.120	(6 9 2 2 1) =	368.640
(6 6 2 5 1) =	2.820.096	(6 7 3 1 3) =	1.244.160	(6 9 1 3 1) =	491.520
(6 6 1 6 1) =	3.308.544	(6 7 2 2 3) =	1.658.880	(6 9 0 4 1) =	655.360
(6 6 0 7 1) =	3.511.296	(6 7 1 3 3) =	2.039.808	(6 9 3 0 2) =	345.600
(6 6 6 0 2) =	1.166.400	(6 7 0 4 3) =	1.018.368	(6 9 2 1 2) =	460.800
(6 6 5 1 2) =	1.555.200	(6 7 3 0 4) =	829.440	(6 9 1 2 2) =	614.400
(6 6 4 2 2) =	2.073.600	(6 7 2 1 4) =	1.105.920	(6 9 0 3 2) =	819.200
(6 6 3 3 2) =	2.764.800	(6 7 1 2 4) =	1.388.544	(6 9 2 0 3) =	414.720
(6 6 2 4 2) =	3.428.352	(6 7 0 3 4) =	1.250.560	(6 9 1 1 3) =	552.960
(6 6 1 5 2) =	3.796.992	(6 7 2 0 5) =	608.256	(6 9 0 2 3) =	737.280
(6 6 0 6 2) =	3.714.048	(6 7 1 1 5) =	768.000	(6 9 1 0 4) =	368.640
(6 6 5 0 3) =	1.399.680	(6 7 0 2 5) =	1.544.192	(6 9 0 1 4) =	491.520
(6 6 4 1 3) =	1.866.240	(6 7 1 0 6) =	384.128	(6 9 0 0 5) =	270.336
(6 6 3 2 3) =	2.488.320	(6 7 0 1 6) =	427.392	(6,10,4,0,0) =	82.944
(6 6 2 3 3) =	3.059.712	(6 8 6 0 0) =	186.624	(6,10,3,1,0) =	110.592
(6 6 1 4 3) =	3.305.472	(6 8 5 1 0) =	448.832	(6,10,2,2,0) =	147.456
(6 6 0 5 3) =	3.098.624	(6 8 4 2 0) =	331.776	(6,10,1,3,0) =	196.608
(6 6 4 0 4) =	1.244.160	(6 8 3 3 0) =	442.368	(6,10,0,4,0) =	262.144
(6 6 3 1 4) =	1.658.880	(6 8 2 4 0) =	589.824	(6,10,3,0,1) =	138.468
(6 6 2 2 4) =	2.082.816	(6 8 1 5 0) =	786.432	(6,10,2,1,1) =	184.320
(6 6 1 3 4) =	2.260.992	(6 8 0 6 0) =	1.019.904	(6,10,1,2,1) =	245.760
(6 6 0 4 4) =	2.093.056	(6 8 5 0 1) =	311.040	(6,10,0,3,1) =	307.200
(6 6 3 0 5) =	912.384	(6 8 4 1 1) =	414.720	(6,10,2,0,2) =	230.400
(6 6 2 1 5) =	1.152.000	(6 8 3 2 1) =	552.960	(6,10,1,1,2) =	307.200
(6 6 1 2 5) =	1.277.952	(6 8 2 3 1) =	737.280	(6,10,0,2,2) =	409.600
(6 6 0 3 5) =	1.193.984	(6 8 1 4 1) =	983.040	(6,10,1,0,3) =	276.480
(6 6 2 0 6) =	573.184	(6 8 0 5 1) =	1.253.376	(6,10,0,1,3) =	368.640
(6 6 1 1 6) =	637.696	(6 8 4 0 2) =	518.400	(6,10,0,0,4) =	245.760
(6 6 0 2 6) =	601.344	(6 8 3 1 2) =	691.200	(6,11,3,0,0) =	55.296
(6 7 7 0 0) =	279.936	(6 8 2 2 2) =	921.600	(6,11,2,1,0) =	73.728
(6 7 6 1 0) =	373.248	(6 8 1 3 2) =	1.228.800	(6,11,1,2,0) =	98.304
(6 7 5 2 0) =	497.664	(6 8 0 4 2) =	1.523.712	(6,11,0,3,0) =	131.072
(6 7 4 3 0) =	663.552	(6 8 3 0 3) =	622.080	(6,11,2,0,1) =	92.160
(6 7 3 4 0) =	884.736	(6 8 2 1 3) =	829.440	(6,11,1,1,1) =	122.780
(6 7 2 5 0) =	1.179.648	(6 8 1 2 3) =	1.105.920	(6,11,0,2,1) =	163.840
(6 7 1 6 0) =	1.529.856	(6 8 0 3 3) =	1.359.872	(6,11,1,0,2) =	153.600
(6 7 0 7 0) =	444.640	(6 8 2 0 4) =	552.960	(6,11,0,1,2) =	204.800
(6 7 6 0 1) =	466.560	(6 8 1 1 4) =	809.280	(6,11,0,0,3) =	184.320
(6 7 5 1 1) =	722.080	(6 8 0 2 4) =	925.696	(6,12,2,0,0) =	36.864
(6 7 4 2 1) =	829.440	(6 8 1 0 5) =	405.504	(6,12,1,1,0) =	49.152
(6 7 3 3 1) =	1.105.920	(6 8 0 1 5) =	512.000	(6,12,0,2,0) =	65.536
(6 7 2 4 1) =	1.474.560	(6 8 0 0 6) =	256.000	(6,12,1,0,1) =	61.440
(6 7 1 5 1) =	1.880.064	(6 9 5 0 0) =	124.416	(6,12,0,1,1) =	81.920
(6 7 0 6 1) =	772.736	(6 9 4 1 0) =	165.888	(6,12,0,0,2) =	102.400
(6 7 5 0 2) =	777.600	(6 9 3 2 0) =	221.184	(6,13,1,0,0) =	24.576
(6 7 4 1 2) =	1.036.800	(6 9 2 3 0) =	294.912	(6,13,0,1,0) =	32.768
(6 7 3 2 2) =	1.382.400	(6 9 1 4 0) =	391.216	(6,13,0,0,1) =	40.960
(6 7 2 3 2) =	1.843.200	(6 9 0 5 0) =	524.288	(6,14,0,0,0) =	16.384

Tengevolge van de formules heeft men verder:

$$\begin{aligned}
 (p+1, q, r, s, t) &= \\
 &= \frac{1}{2} (p, q+1, r, s, t) \text{ voor } p \geq 6.
 \end{aligned}$$

Delft, Januari 1905.

A. TOXOPEUS.

Liquatie (ongelijkslachtingheid) van binaire metaallegeeringen

DOOR

Dr. C. HOITSEMA.

Met medewerking van J. W. A. HAAGEN SMIT.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel IX. N° 2.

(Met 50 figuren in den tekst.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

October 1905.

Liquatie (ongelijkslachtingheid) van binaire metaallegeeringen

DOOR

Dr. C. HOITSEMA.

Met medewerking van J. W. A. HAAGEN SMIT.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel IX. N^o 2.

(Met 50 figuren in den tekst.)

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1905.

Liquatie (ongelijkslachtheid) van binaire metaallegeringen

DOOR

C. HOITSEMA.

MET MEDEWERKING VAN

J. W. A. HAAGEN SMIT.

(*Met 50 figuren.*)

- § 1. Inleiding.
 - § 2. Liquatie bij zilver-koper-legeringen.
 - § 3. Zwaartekrachts-liquatie.
 - § 4. Liquatie en stolfiguur.
 - § 5. Liquatie bij binaire legeringen in de praktijk.
-

§ 1. Inleiding.

Legeringen worden in de praktijk (bijna zonder uitzondering) verkregen als een gevolg van het stollen van gemengde smelten.

Zulk eene stolling is een samengesteld proces, aangezien:

1°. in het algemeen ¹⁾ vastwording van elk gedeelte der massa plaats grijpt, niet bij een enkele temperatuur, maar langs een min of meer uitgebreid temperatuurstraject;

2°. hetzij voortdurend, hetzij nu en dan gedurende het vastworden wijzigingen optreden in de chemische natuur van hetgeen in den vasten toestand overgaat, en

¹⁾ Er zijn gevallen mogelijk, en ook in de praktijk komen zij enkele malen voor, dat eene legeringssmelt bij één bepaalde temperatuur stolt, terwijl tevens noodzakelijkerwijze elk gestold fragment chemisch dezelfde samenstelling heeft als de smelt. Dit is te verwachten: *a.* wanneer de smelt geheel en al bestaat uit ééne enkele gesmolten (ongedissocieerde) chemische verbinding; *b.* wanneer zich van den aanvang af eene vaste oplossing afzet, van precies dezelfde samenstelling als de smelt. De daarbij ontstane vaste legeringen zijn even homogeen als de gesmoltene.

Een gesmolten eutektikum stolt wel bij ééNZelfde temperatuur, en ook blijft gedurende de stolling de samenstelling der vloeistof en der vaste phase dezelfde, maar gelijkslachtig is de laatste toch niet.

3°. niet in alle onderdeelen der metaal massa tezelfdertijd dezelfde verschijnselen optreden, daar de warmteafgifte, die de stolling inleidt en vergezelt, samenhangt met aard, vorm, afmetingen van het materiaal en met de omgeving.

Eene legering is dus bijna steeds een magma van meerdere soorten kristallijne ¹⁾ deeltjes (elementen, verbindingen, vaste oplossingen) in eene zekere volgorde na elkander, maar in verschillende deelen van het gietstuk niet steeds onder gelijke omstandigheden, ontstaan.

Te verwachten is het derhalve dat zeer dikwijls ongelijkslachtigheid in de overtalrijke soorten van legeringen, die in de praktijk van het dagelijksch leven gebruikt worden, zal voorkomen.

Nu behoort weliswaar ongelijkslachtigheid van sommige zeer bepaalde legeringen reeds langen tijd tot de bekende feiten, maar toch is de meening zeer verspreid dat bedoelde legeringen als uitzonderingen op den regel zijn te beschouwen. Dit ligt wel voor een deel hieraan dat de *graad* van ongelijkslachtigheid in vele gevallen gering is, zoodat deze in onderscheidene deelen van het vaste metaal, *in hun geheel* beschouwd, niet in het oog valt, hoewel onmiddellijk aan elkaar grenzende kleine deeltjes in tamelijk hooge mate ongelijksoortig kunnen zijn. Door de gebruikelijke wijze van analyseeren van legeringen voor technisch gebruik, waarbij men van grootere hoeveelheden materiaal uitgaat en daarvan gemiddelde monsters neemt, wordt die opvatting nog in de hand gewerkt. Al is toe te geven dat het voor de praktische kennis van vele legeringen vaak reeds voldoende is wanneer de chemische samenstelling op een dergelijke wijze wordt bepaald, is het toch als zeker te beschouwen dat in vele gevallen eene ongelijkslachtigheid als gevolg van het stollingsproces, ook zelfs als zij slechts plaatselijk voorkomt, op sommige mechanische eigenschappen van de vaste legeringen in haar geheel een belangrijken invloed heeft. Daarom zal het dikwijls aanbeveling verdienen meer aandacht te schenken aan de chemische geaardheid van het materiaal in verschillende onderdeelen, in plaats van zich tevreden te stellen met zgn. „Bauschanalysen” ²⁾.

Terwijl langzamerhand het aantal gevallen, waarin het optreden eener ongelijkslachtigheid in legeringen werd geconstateerd, toenam

¹⁾ Voor zoover tot nu toe bekend.

²⁾ Naar mijne meening is deze wenschelijkheid sterk sprekend in de ijzer- en staalchemie waar langzamerhand eene wanverhouding is ontstaan tusschen den vooruitgang der kennis der mechanische eigenschappen en wijzigingen, daarin aan te brengen, aan de ééne zijde en de kennis van den samenhang tusschen chemische constitutie en de hoedanigheden van het materiaal (eens als zooveel belovend beschouwd) aan den anderen kant.

en het ook bleek dat bepaalde verschijnselen constant voorkwamen, is eene redelijke poging tot verklaring daarvan (als men afziet van enkele phantastische besprekingen van specifieke afstootingen der metaaldeeltjes door de wanden van gietvormen van andere temperatuur) nimmer gedaan.

De vooruitgang onzer kennis op het gebied der heterogene evenwichten ¹⁾, hier bepaaldelijk die, welke optreden bij het stollen van smelten, maakt het *nu* mogelijk van algemeene gezichtspunten uit het optreden der bedoelde ongelijkslachtigheid, vooral die bij *binaire metaallegeringen* nader te onderzoeken, haar ontstaan in kwalitatieven zin na te gaan en de uitkomsten der studie te toetsen aan de ervaring.

Daartoe is bij legeringen van bepaalde metalen slechts noodig, maar dit is dan ook voldoende, de *stollingskrommen* van alle smelten dier metalen (er wordt hier van nu af een beperking tot *binaire* legeringen ingevoerd), de „*stolfiguur*” te kennen. ²⁾

Zoodra verband gezocht wordt met de uitkomsten van experimenten (of met de bestaande ervaringen) treedt een andere factor sterk op den voorgrond, die tevens van grooten invloed is op den omvang der bestudeerde verschijnselen, de *tijd*, waarin de overgang van den vloeibaren in den vasten toestand plaats heeft.

Die samenhang tusschen liquatiegraad en stollingsduur geeft reeds aanstonds eenige toelichting tot de bovengemaakte opmerking, dat zoo dikwijls het voorkomen van ongelijkslachtigheid bij legeringen onopgemerkt blijft tengevolge van haren geringen omvang. Immers, bijna alle in de praktijk voorkomende legeringen smelten en stollen bij „hooge” temperaturen, die medewerken tot een buitengewoon snel verloop van het stollingsproces. Het zal nog nader blijken dat die omstandigheid het optreden van ongelijkmatigheid zeer sterk kan tegengaan.

Het komt mij wenschelijk voor de meer in bijzonderheden tredende behandeling van dit onderwerp aan te vangen met eene uitvoerige bespreking van de ongelijkslachtigheid der *silver-koper-legeringen*. De betrekking tusschen dit verschijnsel en de stolfiguur dier legeringen, alsmede de experimenteele bevestiging der mede te deelen beschouwingen zullen dan onmiddellijk conclusies toelaten voor alle andere binaire legeringen met gelijke stolfiguur. Analoge

¹⁾ Bakhuis Roozeboom. Die heterogenen Gleichgewichte. 2^{tes} Heft. 1904.

²⁾ „Erstarrungsbild” (Heyn). Slechts het voorkomen van onderkoelingen zoude aan de conclusies eenigszins afbreuk kunnen doen; hoewel bij metalen niet onbekend, schijnen zij toch slechts een meer ondergeschikte rol te spelen. Zij zullen voorloopig buiten beschouwing kunnen blijven.

afleidingen voor weder andere binaire legeeringen zullen daarop volgen. Eindelijk zijn deze dan nog te toetsen aan het zeer verspreide materiaal, dat daarvoor reeds beschikbaar is.

Deze vooropzetting der zilver-koperlegeeringen moge voldoende grond vinden in de volgende omstandigheden:

Vooreerst hebben zij van oudsher tot de belangrijkste legeeringen behoord, o. a. door hare toepassing als muntmateriaal; en is juist het optreden van ongelijkslachtingheid vooral aan deze groep van legeeringen het langst met eenige zekerheid bekend geweest. Daarvoor zijn als oorzaken te noemen de relatief hooge nauwkeurigheid waarmee de analytische bepaling van zilver reeds lang heeft kunnen geschieden, gepaard aan het geldelijk belang dat bestond om goed op de hoogte te zijn van de innerlijke hoedanigheid van materiaal uit deze legeeringen vervaardigd (munten, baren). Verder is een bekende, zeer eigenaardige, richtingsverandering der liquatie bij deze legeeringen, indien de samenstelling daarvan zich regelmatig wijzigt, het uitgangspunt voor mij geweest van deze studie en eindelijk hebben zij voor de laatste het materiaal geleverd dat aan experimenteel onderzoek is onderworpen.

§ 2. Liquatie bij zilver-koper-legeeringen.

Zoolang zilver en koper te zamen geallieerd, gegoten en als zeer waardevol materiaal verhandeld en vermuut werd, zal wel de kennis bestaan hebben van de ongelijkheid van het zilveragehalte in verschillende deelen van grootere geldstukken dezer legeeringen. De nauwkeurigheid toch van de oude gehaltebepalingsmethode van het zilver (cupellatie) liet zeer gemakkelijk de herkenning daarvan toe. Zoo wordt reeds in de 16^e eeuw ¹⁾ en ook later ²⁾ van deze heterogeniteit gewag gemaakt. Door Jars ³⁾ is, tijdens een verblijf in de Saksische mijnstreken de ongelijkslachtingheid van koperhoudende zilverbaren nader bestudeerd. Hij maakte attent op de tamelijk groote gehalteverschillen die daarin kunnen voorkomen, trachtte na te gaan in hoeverre de temperatuur van den gietvorm vóór het smelten, van invloed was en nam het bijzondere verschijnsel waar dat in baren van betrekkelijk laag zilveragehalte (slecht pasmuntzilver dier dagen) het centrum het armst, de buitenzijden daarentegen het rijkst aan zilver waren. Deze laatste, inderdaad juiste

¹⁾ L. Ercker. *Allerfurnem. Mineral. Erzt und Bergw. arten.* Frankfort 1580 p. 20 en 26.

²⁾ Cramerus. *Ars docim.* Duitsche vertaling v. Gellert. 1746, pag. 384.

³⁾ *Voyages métallurgiques* III, 270 (1781).

waarneming wordt in uitgebreiden vorm nog door P. J. Kasteleyn in zijne *Beschr. en werkz. Chemie*, 1794, III^e deel pag. 113 in eene aanhaling van Knorre, muntmeester te Hamburg, medegedeeld, waar hij zegt dat bij het gieten van zilver en koper „het grootste deel (dus het meest aanwezige) van het mengsel, hetzij zilver, hetzij koper, het kleinste deel naar de buitenzijde drijft”. Men heeft haar daarna geheel uit het oog verloren; — en zoo kon het gebeuren, dat toen omstreeks 1823 in groote hoeveelheden zilver in den vorm van baren van laag gehalte, afkomstig van oude Duitsehe muntspeciën in Frankrijk werden ingevoerd, waarvan de gehalten bepaald waren door analyse van kapsels genomen van een of meer der hoekpunten (dus van de buitenzijde) men na omsmelting stuitte op zeer groote verschillen (en wel nadeelige) tusschen de smelt-gehalten en die, waarop de overname was gebaseerd. Bij een onderzoek dezer zaak, aan d’Arcet ¹⁾ opgedragen werd met groote bevreemding geconstateerd dat inderdaad de samenstelling der baren zeer ongelijk was en dat vermoedelijk bedrog in het spel was geweest. De gietvormen zouden nl. vóór het gieten met poeder van fijn zilver rondom zijn bedeed om een aan de buitenzijde (waarvan de proeven genomen werden) hooger gehalte te verkrijgen. Toen echter bleek dat dit vermoeden, dat reeds als zeker was bekend gemaakt, onjuist was, werden de proeven herhaald om na te gaan of werkelijk ongelijkheid in gehalte optrad en dit vermoeden bevestigd gevonden. Baren van laag zilveragehalte waren steeds in het centrum lager, en niet onbelangrijk dikwijls dan aan de buitenzijden; bij hoog zilveragehalte was dit andersom. Zeer fraai waren deze proeven niet; men had de baren waarop de bepalingen geschiedden verkregen door gieten in van boven open ijzeren vormen („à ciel ouvert” zooals de baren voor den handel worden gegoten) waardoor de regelmaat der uitkomsten geschaad werd.

Meer systematische, beter ingerichte proefnemingen over dit onderwerp zijn daarna door Levol ²⁾ verricht. Om de ware betrekking tusschen gemiddeld gehalte en de mate van ongelijkslachtigheid experimenteel op te sporen, begreep hij afstand te moeten doen van de ook in de proeven van d’Arcet gevolgde wijze van gieten der zilver-koperlegeeringen. Daar, naar zijne meening de samenstelling der vaste legering afhankelijk was van de wijze waarop de warmteafgifte bij het stollen plaats had, was men aangewezen op het toepassen van gesloten ijzeren gietvormen. Hij gebruikte zulke van □ of ○ gedaante, uit twee helften samengevoegd en slechts van

¹⁾ *Recherches de M. d’Arcet sur la liquation*. M. S. Bibliotheek van ’s Rijks Munt.

²⁾ *Ann. Chim. Phys.* [3] **31** 193 (1852).

een gietgat aan de bovenzijde voorzien. Door smelten van zeer uiteenlopende samenstelling te nemen, vond hij 1° dat regelmatig bij legeringen met laag zilveragehalte het centrum zilver-arter dan de buitenlagen was, en dat bij hoog zilveragehalte omgekeerde verhoudingen optraden (dit was reeds bekend) 2° dat er eene verhouding der beide componenten bestond waarbij de ongelijkslachtheid ophield, welk gehalte tevens de scheiding aangaf tusschen de legeringen der beide groepen, zoo juist bedoeld. Hoe verdienstelijk dit experimenteel onderzoek ¹⁾ ook was, tot een juist inzicht van de oorzaken dier opmerkelijke ervaringen, heeft Levol het niet gebracht, gelijk nog nader zal blijken.

De volgende tabel geeft een overzicht der voornaamste proefnemingen. Het gehalte van elke smelt werd door middel van een geschepte proef vóór de gieting bepaald. De ronde vorm had een diameter van 50 mM., de kubusvormige eene zijde van 42 mM.

Gietvorm	Zilvergehalte der smelt in ‰	Zilvergehalte gestolde legering		Grootste gevonden afwijking	$a-b$
		Buiten-zijde ²⁾ a	Centrum b		
Bol	631.9	633.2	619	15.0	14.2
„	672.9	673.7	671.8	2.2	1.9
„	693.7	693.8	693.7	0.7	0.1
„	694.1	694.3	693.8	6.5(?)	0.5
„	718.3	718.1	718.1	0.6	0.0
„	720.9	721.4	721.6	0.7	—0.2
Kubus	773.1	771.2	783.2	13.1	—12.0
Bol	774.2	772.9	785.9	13.1	—13.0
„	873.0	872.5	881.2	9.1	—8.7
„	901.3	898.7	907.3	8.9	—8.6
Kubus	903.1	900.1	909.5	9.9	—9.4
„	947.0	947.1	950.0	3.5	—2.9
„	948.4	947.7	950	3.1	—2.3

¹⁾ Het is niet van algemeene bekendheid, dat onmiddellijk na en op grond van Levol's proeven hier te lande op initiatief van den toenmaligen President van het Muntcollege, later Minister, Dr. A. Vrolik, werd bewerkt dat de Indische zilveren pasmunt (ingesteld bij de wet van 1 Mei 1854 Stbld. n°. 75) zou worden geslagen op „het gehalte van Levol” van 720 duizendsten. Deze rationeele handelwijze heeft opmerkelijkerwijze nimmer navolging gevonden.

²⁾ Onder weglating van het gehaltcijfer bij de ingietopening gevonden.

Deze Levolsche proeven, terecht zeer bekend geworden, zijn onder gelijke omstandigheden genomen; de uitkomsten derhalve vergelijkbaar. De cijfers der laatste kolom hebben slechts relatieve waarde; wij weten nu dat de gehalteverschillen tusschen centrum en buitenlagen geene constante waarden geven maar dat zij samenhangen met de wijze van stolling, in 't bijzonder met de snelheid. Niet juist is later de slotsom gebleken door Levol uit zijne waarnemingen getrokken, dat de groote mate van gelijkslachtheid, welke het vastgeworden alliage van omstreeks 720 duizendsten zilver vertoont, zijn oorsprong hieraan dankt, dat de vloeibare, zoowel als de vaste legering van dat gehalte uit de chemische verbinding Ag_3Cu_2 (in tegenwoordige schrijfwijze) bestaat, terwijl alle andere legeringen zouden zijn opgebouwd uit deze verbinding benevens uit vrij zilver — of koper. Intusschen werd deze meening vrij algemeen aangenomen en werd het uit atoomgewichten berekende gehalte van 718.93 duizendsten, met zijn grooten schijn van nauwkeurigheid (bij de nu geldende atoomgewichten zoude het 718.0 zijn) tot op den huidigen dag in de metallurgische literatuur overgenomen, als zijnde dat der zilver-koperlegering welke tot een homogene vaste legering stolt.

Dit „alliage van Levol” bleek later te zijn: het eutektikum van zilver-koper, geene verbinding dus.

In 1874 heeft Roberts Austen ¹⁾ bij een onderzoek naar de stollingskurven van zilver-koper-legeringen (het eerste, maar ook niet zeer juiste, van dien aard) als zijne meening uitgesproken — evenwel niet afgeleid uit de gevonden stolkurven — dat er verband moest bestaan tusschen de liquatie dier legeringen en hunne stollings-snelheid. Hij heeft getracht door eenige proefnemingen daarvan bevestiging te vinden, en goot daartoe zijn materiaal van verschillend gehalte in een □ chamottevorm, geplaatst in een dikke zandlaag in een vuurvasten kroes; door mindere of meerdere verhitting van den kroes kon de vorm vóór het gieten verschillende temperaturen aannemen; de warmteafgifte, en dus de stollingsduur, lieten zich zoodoende wijzigen. De uitkomsten in vereenvoudigden vorm, waren de volgende (op elk der gietstukken werd een groot aantal proeven genomen):

¹⁾ Journ. Chem. Soc. **27** 197 (1874). Proc. Roy. Soc. **23** 492 (1875).

Zilvergehalte der smelt in ‰	Gehalte der gestolde legeering		Verschil	Wijze van afkoeling
	maximum	minimum		
925.1	935.5	922.7	12.8	snel
924.9	925.7	923.9	1.8	langzaam
900.4	899.6	898.3	1.3	„
719.0	719.5	718.2	1.3	„
630.2	636.0	614.9	21.1	„
333.4	342.8	330.0	12.8	„

Het valt niet te ontkennen dat deze waarnemingen slechts op zeer beperkte wijze konden toelichten wat de bedoeling van den onderzoeker was; immers slechts bij één enkel gehalte (het eerste in de tabel) werd een vergelijking tusschen eene snellere en eene langzamere afkoeling gemaakt. Des te meer treft dit als men bedenkt, dat uit dit enkel stel waarnemingen de conclusie werd getrokken (zij was daarom niet onjuist) dat eene langzamere bekoeling dezer zilver-koperlegeeringen het verkrijgen van minder ongelijkslachtig metaal in de hand werkte. Want het kon gezegd worden dat dit een zeer opmerkelijk feit zoude zijn, daar eene eenvoudige redeneering leert dat eene gesmolten en homogene legeering in on-eindig korten tijd stollende geheel homogeen zal moeten zijn, zoodat bij afname van den stollingstijd slechts een toenemen der ongelijkslachtigheid mogelijk is (vanaf het niet te verwezenlijken geval dat zij = 0 is). Daarmede was dan toch de medegedeelde gevolgtrekking in strijd.

Terwijl ik beneden duidelijk zal maken hoe deze schijnbare tegenstrijdigheid hare gereede verklaring kan vinden, moge de praktische zijde van de door Roberts Austen gestelde vraag hier nog vermeld worden. Het was namelijk van zeer hoog gewicht de voorwaarden te kennen, waaronder een zoo gelijkslachtig mogelijke samenstelling der zilverlegeering van 925 duizendsten kon worden verkregen. De gehaltebepalingen van het Engelsche muntzilver moeten toch reeds sinds onheugelijke tijden betrokken worden op standaard-monsters van de aangegeven samenstelling „the old standard of England” in plaats van onmiddellijk op zuiver zilver. Met vol-

ledige zekerheid is het gestelde doel niet te bereiken; onderlinge gehalte-afwijkingen ook van het best geslaagde praeparaat zullen steeds blijven bestaan; de vraag doet zich steeds voor of deze grooter of kleiner dan de onvermijdelijke fout der gehaltebepaling zelve kunnen worden.

Hoezeer gebrek bestond aan het juiste inzicht, zelfs nog in het verband tusschen de ongelijkslachtheid en den duur der stolling, kan wel blijken uit de empirische proeven, die Matthey ¹⁾ aan dit voor den zilverhandel bij uitstek belangrijke onderwerp wijdde. Daaruit toch kwam men tot een tegengesteld resultaat. Matthey regelde de snelheid van stolling van zijne proeflegeering (wederom die van 925 duizendsten) door in ijzeren vormen platen daarvan te gieten, die steeds dunner werden gemaakt — en derhalve, ceteris paribus, telkens sneller konden stollen. Zoo vond hij dan bij het onderzoek van porties uit die platen, van zoodanige grootte als hij voor zijne gehaltebepalingen noodig had, dat het grootste verschil was

bij platen van 6 mM. dik 0.7 duizendsten, maar
„ „ „ 4 „ „ 0.1 „

De snelst vastgeworden legeering gaf dus de grootste gelijkslachtheid. Later (Proc. Roy. Soc. **73** 124, (1904) herhaalde hij nog dergelijke waarnemingen en vervaardigde dunne platen der zelfde legeering door gieten in vormen door ijswater gekoeld of van afwijkenden vorm, die een zeer plotseling bekoelen in de hand werkten. Daarbij was de liquatie praktisch = 0 geworden. Er is dus, zegt hij, tegenspraak met de bewering van R. Austen dat „molecular rearrangement is comparatively slight if the mass of metal is slowly and uniformly solidified.” Maar het zal later blijken dat deze tegenspraak niet bestaat; beide opvattingen hebben recht van bestaan.

Eigen onderzoekingen.

Boven werd reeds de ervaring der techniek der zilver-koperlegeeringen medegedeeld, *dat gietstukken van laag zilveragehalte in centrale deelen armer aan zilver zijn dan de peripherische en dat bij hoog zilveragehalte het omgekeerde verschijnsel optreedt.* De overgang tusschen beide groepen kan worden geacht te liggen bij het opmerkelijke gehalte van 720 duizendsten (Levol).

Ik heb mij de vraag gesteld hoe deze ervaring te rijmen viel

¹⁾ Proc. Roy. Soc. **55** 265 (1894).

met de bekende stolfiguur van zilver-koper. De laatste bestaat uit twee krommen, afdalende van de smeltpunten van zilver en van koper, totdat zij elkaar bij eene temperatuur van 777° en bij eene samenstelling van 60 at. $\%$ *Ag* en 40 at. $\%$ *Cu* — volgens Heycock en Neville ¹⁾ (zie fig. 1) — in een eutektisch punt snijden. Als een stolling

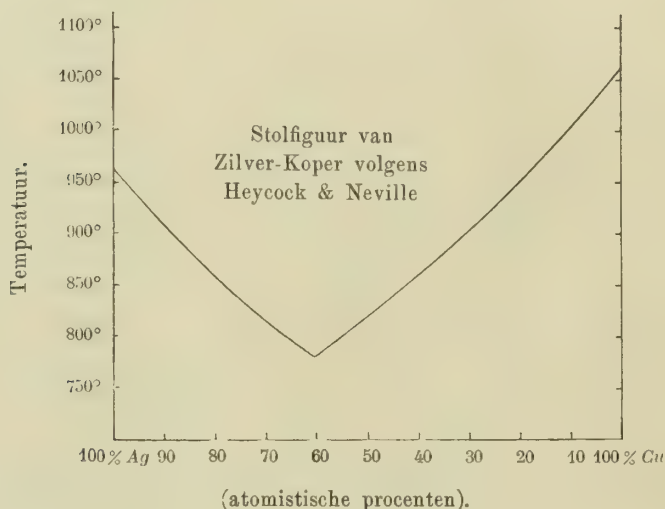


Fig. 1.

plaats heeft op een punt van de linker kromme, dan zet zich zilver, op een punt der rechter kromme koper uit de smelt af, waarbij hier wordt afgezien van de nog te bestudeeren mogelijkheid dat in plaats van de zuivere metalen, mengkristallen tot op zekere hoogte, zich kunnen formeeren. De volgende beschouwingen worden slechts kwalitatief aangedaan door eventueel later bewijs dat niet de zuivere metalen uit de smelten kristalliseeren; vereenvoudiging der beschrijving moge het rechtvaardigen dat hier wordt aangenomen dat dit wel het geval is.

Eene *oppervlakkige* beschouwing voert tot eene lijnrechte tegenspraak tusschen de ervaring over de gehalte-ongelijkheid en de stollings-figuur. Immers, wanneer eene legering met hoog zilvergehalte (dus links van het eutektikum in fig. 1) stolt en zich dus *zilver* begint af te zetten, terwijl in normale gevallen de warmteafgifte plaats heeft van binnen naar buiten, zoodat aan den omtrek

¹⁾ Phil. Trans. 189, 32, 1897.

De samenstelling van het eutektikum zal misschien bij nader onderzoek nog een kleine wijziging kunnen ondergaan.

van de stollende massa steeds de temperatuur, zij het ook uiterst weinig, lager is dan in de opvolgende lagen, dan zal men geneigd zijn te verwachten dat juist daardoor aan de buitenzijde van de vaste legering eene betrekkelijke rijkdom aan zilver zal optreden en diensgevolge verlaging van het gehalte in de meer centrale deelen een gevolg moet zijn. Bij zilverarmere legeringen kan men tot de omgekeerde gevolgtrekking komen. Beide uitkomsten zijn tegenovergesteld aan de werkelijkheid; zij berusten op eene valsche redeneering.

Evenmin kan dienen de verklaring, die Behrens¹⁾ van het eigenaardige verschijnsel trachtte te geven, waar hij meende, dat bij zilverrijkere legeringen de eerst zich vormende zilverkristallieten van de wanden van den vorm af naar binnen toe aangroeiende, zich daarbij steeds meer en meer zouden vertakken en diensgevolge zilverarmere smelt gedwongen zou zijn zich naar de buitenzijde te verplaatsen. Terwijl het op geen enkelen grond berust waarom niet wordt aangenomen dat de vertakkingen evengoed aan de eerst gevormde kristalgroepen zich zouden ontwikkelen, zal ook door mikroskopische onderzoeken worden duidelijk gemaakt, dat de door Behrens gegeven voorstelling niet juist is.

Allereerst was noodig een zeer nauwkeurige en in details afdalende bestudeering van de eigenaardige verdeeling van zilver en koper in legeringen van hoog en laag gehalte.

Reeds vroeger²⁾ had ik nagegaan of deze zich op overeenkomstige wijze voordeed bij den anderen vorm (dan zilverbaren) waarin de grootste hoeveelheid zilver-koper legeringen gegoten wordt, nl. in dien van de z.n. munttinnen³⁾. Deze geven een voorbeeld van tamelijk snelle stolling, een gevolg van hunne afmetingen en van de omstandigheid dat algemeen zeer zware ijzeren gietvormen worden gebezigd. Ik had onderzocht een munttin met een smeltgehalte van ± 945 duizendsten en eene van ± 634 duizendsten. Afmetingen der eerste waren $400 \times 60 \times 12$ mM., die der tweede $375 \times 44 \times 8$ mM. Bij beide werden op regelmatige afstanden over het midden der lange zijde gaten met een vlakke boor van 22 mM. diameter geboord zoodanig, dat afzonderlijk werd verzameld het boorsel verkregen nadat telkens $\frac{1}{3}$ deel van de dikte der tin was ingeboord. Het was toen slechts om een grove vergelijking

¹⁾ Das mikrosk. Gefüge der Metalle und Legierungen. pag. 44.

²⁾ Verslag van het Muntcollege over 1899. Bijlage pag. 37.

³⁾ Munttinnen zijn platte langwerpige staven, de vorm waarin alle muntmateriaal wordt gegoten en die geplet worden tot de dikte van muntplaten, welke uit de verkregen repen worden uitgeponst.

tusschen het centrale deel en de buitenzijden te doen. Gevonden werd het volgende:

Tin van ± 0.945				Tin van ± 0.634			
1 ^e buiten- zijde. a	Midden. b	2 ^e buiten- zijde. c	$b - \frac{1}{2}$ $(a + c)$	1 ^e buiten- zijde a	Midden b	2 ^e buiten- zijde c	$b - \frac{1}{2}$ $(a + c)$
0.9456	0.9466	0.9457	0.0009 ⁵	0.6380	0.6240	0.6282	-0.0091
55	69	61	11	86	352	354	18
69	81	76	8 ⁵	82	321 ⁵	55	47
58	70	65	8 ⁵	78	265	60	101 ⁵
				73	290	59	76
				96 ⁵	333	72	51
				404	17	70	60
				390	24	24	34
				88	40	59	33 ⁵

De verschillen hadden bij de beide tinnen (één van „hoog”, een van „laag” gehalte), verschillend teeken. Maar bij elke tin afzonderlijk was over de geheele lengte de buitenlaag in eenzelfde richting afwijkend van gehalte vergeleken met de centrale deelen der legering die op overeenkomstige hoogte zich bevonden. De oude waarnemingen aan zilver-koper in baarvorm werden ook hier bevestigd gevonden.

Hierop is nu een zeer zorgvuldig onderzoek gevolgd van de wijze waarop het gehalte van materiaal gelijk aan het zoo juist genoemde zich in dunne lagen, ongeveer loodrecht genomen op de richting waarin de afkoeling en dus de stolling heeft plaats gehad, wijzigt. Wederom zijn gebezigd gedeelten van tinnen, dienende voor de vervaardiging van Nederlandsche muntspeciën, eene voor grove zilveren munt, de andere voor zilveren pasmunt.

Van de eerste, waarvan het gemiddeld zilveragehalte bleek te zijn 0.944⁷⁵ gegoten in een gietblok van de afmetingen $400 \times 60 \times 12$ mM. werd ongeveer uit het midden (lengterichting) der tin een stuk genomen van $8 \times 6 \times 12$ cM., hetwelk machinaal rondom in lagen van ± 1 mM. dik (snede in de lengterichting der tin) werd afgeschaafd, zoodanig dat van elk breedtevlak telkens 3 porties (elk ongeveer $\frac{1}{3}$ der breedte beslaande) en van de dikte eene enkele portie werd weggenomen. Fig. 2 laat een doorsnede zien door het onderzochte stuk der tin genomen loodrecht op haar lengterichting en op die van de schaafstreek; de afscheidende lijnen maken zicht-

baar op welke wijze de verschillende monsters zijn genomen. De gehaltebepalingen werden met zeer groote nauwgezetheid verricht; de uitkomsten zijn ter vereenvoudiging in de laatstbedoelde figuur zelve ingevoegd.

940,93	942,00	940,65
944,35	944,37	944,89
945,18	944,91	944,91
944,70	946,05	944,80
945,20	946,50	945,20
945,34	946,9-947,2-947,2-947,2-947,3-947,2	945,58
945,20	946,50	945,20
944,37	945,98	945,03
944,63	945,19	944,46
944,43	944,13	944,71
941,97	943,44	941,57

Fig. 2.

De regelmatigheid der gehalte-verandering is stellig verrassend; over de geheele buitenste laag (1 mM. dik) is het gehalte lager dan in de daaropvolgende; tot aan het midden plant zich de verhooging voort. Zij is in hoofdzaak eene geleidelijke; alleen meer nabij de buitenwanden wordt zij sterker veranderlijk. Aan de smalle zijden is de wijziging eenigszins anders dan aan de lange zijden; hier is de stijging in de tweede laag bv. merkbaar grooter dan ginds. Dan is bij de naar buiten gelegen gedeelten aan de lange zijden de middenportie steeds van eenigszins hooger gehalte dan de beide die aan weerszijden daarvan lagen.

Dergelijke goed vergelijkbare resultaten gaf een even uitvoerig onderzoek naar de liquatie in de richting der stolling van een stuk gesneden uit een tin van veel lager gehalte, blijkens de totaal-analyse 0.6367, gegoten in een gietblok met de afmetingen $375 \times 44 \times 8$ mM. Van dit metaalstuk groot $8 \times 44 \times 0.84$ cM. werden op de zooeven beschreven wijze weder dunne lagen afgeschaafd, op welk materiaal de gehalteproeven verricht zijn, die de uitkomsten gaven, vermeld in fig. 3. Deze figuur stelt weder een doorsnede loodrecht op de lengterichting der tin voor, met aan-

638,6	639,6	638,8
637,3	638,8	637,9
637,4	634,8	636,9
636,8	632,4	635,5
636,6	637,8	635,6
637,8	639,3	638,5
639,2		

Fig. 3.

duiding der grenzen tusschen de afzonderlijk onderzochte porties.

Aan de buitenzijde de hoogste gehalten; steeds afdaling in de meer naar binnen gelegen lagen. Zeer laag in 't centrum. Weinig verschil aan de lange buitenzijde.

Wanneer ook deze resultaten ¹⁾, evenals bij de vorige tin van hoog zilveragehalte, verrassend van regelmatigheid worden genoemd, dan slaat dit vooral op de omstandigheid dat dit geheele kristallisatieproces in een willekeurig stuk eener tin afloopt in een tijd die stellig dikwijls niet meer dan een enkele sekonde duurt, en dat deze geleidelijke gehaltewijzigingen op zulke geringe afstanden (die van de buitenzijde tot aan het midden, over de kortste afmeting genomen, bedragen toch slechts 6.0 resp. 3.6 mM.) zoo duidelijk sprekend zijn gebleken. Dit geheele gebrek aan wisselvalligheid is voldoende aanwijzing dat enkel uit het feit dat op elk deel van het gietstuk snelle warmteafgifte plaats heeft naar de dichtst daarbij gelegen ijzermassa's van den gietvorm zonder verdere complicaties op aannemelijke wijze moet zijn te verklaren, hoe het verloop van de vastwording zal zijn waarbij deze liquatieverschijnselen optreden, wanneer men slechts de opvolgende fasen van het stollingsproces kent.

Dit zal ik in de volgende beschouwingen trachten te doen.

Als voorbeeld kies ik een middenstuk van een tin (als boven)

¹⁾ Een verificatie op groote schaal van de betrouwbaarheid der waarden, welke gevonden werden voor de liquatie in de verschillende gedeelten der beide soorten zilverlegeering, die in 's Rijks Munt worden verwerkt gaven de volgende fabricageproeven:

a. Wanneer tinnen van het gehalte van ± 0.945 worden verwerkt op muntplaten voor halve guldens dan worden na walsing de verkregen metaalreepen in de lengte gesneden in 3 even breede reepen waaruit de platen worden geponst. De doorboorde overblijvende reepen, het „schroot”, zal niet gelijk van samenstelling zijn met de platen en evenmin zal het gehalte van het schroot der beide buitenste reepen gelijk zijn aan dat der middenreep. Dit volgt reeds uit Fig. 2. Met behulp der bekende afmetingen van de muntplaten en de breedte der schrootreepen is uit dezelfde figuur te berekenen hoe groot (bij een gegeven gemiddeld gehalte) het gehalte van platen en dat van „middenschroot” en „buitenschroot” zal zijn. In het gegeven geval zal het gehalte van het voorlaatste worden 0.945^{48} , dat van het laatste 0.944^{28} : verschil 1.2 duizendsten. Bij een proef in het groot werd daarop gevonden, dat bij een zeker gehalte der smelten waaruit de tinnen waren gegoten (2400 KG.), het daarvan verkregen „buitenschroot”, omstreeks 700 KG. een gehalte had van 0.944^{88} , terwijl het „middenschroot”, omstreeks 370 KG. na omsmelting werd bevonden op 0.946^{95} . Het verschil 1.17 duizendsten is opvallend gelijk aan de berekende waarde.

b. Voor de andere legeering, die der Nederlandsche zilveren pasmunt, werd uit Fig. 3 afgeleid, dat wanneer, zooals bij de 25 centstukken het geval is, twee reepen worden gesneden uit de lengte van elke gewalste tin het verschil tusschen het gemiddeld gehalte der tin en het daaruit verkregen schroot zal bedragen 0.5 duizendsten (het eerste is het hoogst). Een opzettelijk onderzoek in 't groot gaf bij tinnen vervaardigd van twee smelten à 100 KG. met een gemiddeld gehalte van 0.636^{75} een hoeveelheid schroot van ± 70 KG. hetwelk bij samensmelten een gehalte aanwees van 0.636^2 dus 0.5^5 duizendste lager. Een herhaling gaf bij overeenkomstige hoeveelheden: speciesmelten, gehalte 0.636^{18} en voor het afkomende schroot 0.635^{76} dus 0.4 duiz. lager. Deze beide verschillen wijken dus slechts weinig af van het uit de uitvoerige gehalte-analyse der tin berekende verschil.

van een gehalte $\pm 0,945$. Uit de reeds medegedeelde stollingsfiguur valt af te leiden dat bij temperatuursdaling van een smelt van dat gehalte tweemaal een plotselinge onderbreking van geleidelijke toestandsverandering optreedt. Bij $\pm 940^\circ$ begint nl. vorming van zilverkristallen; op elke plaats waar dit geschiedt wordt voortdurend de vloeistof rondom een aangroeiend kristal zilverarmer, totdat op die plaats de smelt gedaald is tot een gehalte van ± 0.718 en de temperatuur tot 777° . Dan is 80 % der legering als zilverkristallen afgescheiden, en 20 % is nog vloeibaar. Onder tijdelijken temperatuurstilstand en bij hoeveelheden per tijdseenheid, die evenredig zijn aan de warmteafgifte, wordt nu zonder verandering van samenstelling, alles wat nog vloeibaar was, vast. Wat in de vaste massa nog veranderen kan, blijft hier buiten beschouwing, als zijnde bij relatief snelle bekoeling, gelijk steeds in de praktijk, voor ons onderwerp zonder veel belang. Verder wordt ook nu geen acht geslagen op de mogelijkheid van onderkoeling, die alsdan kleine variaties aanbrengen kan, maar de hoofdzaken onaangetast laat.

Een tin als bovenbedoeld wordt zoodanig gegoten dat hare lengterichting den vertikalen stand heeft; in dezelfde richting zullen dus opeenvolgende gedeelten van beneden naar boven achtereenvolgens onder gelijke omstandigheden verkeerren. Een belangrijke rol spelen nu bij die stollingen de volume-veranderingen, welke uit tweeërlei oorzaken optreden; er kristalliseert zilver uit eene gemengde smelt, welke laatste eerst 5.5 % koper en ten slotte 28 % koper bevat, en verder wordt het eutektikum vast. Ik laat daarom eerst een opgave der dichtheidsveranderingen volgen, die bij zilver-koper legeringen in het spel zijn en waarover gelukkig reeds voldoende waarnemingen bestaan. Door Roberts Austen ¹⁾ zijn op bijzondere pyknometrische wijze de dichtheden bepaald van gesmolten zilver, koper en van hun eutektikum; uit de bekende dichtheidswaarden dierzelfde stoffen bij gewone temperatuur laten zich die, welke gelden voor hoogere temperaturen, afleiden met behulp van de uitzettingscoëfficiënten volgens le Chatelier ²⁾. Men verkrijgt dan voor de dichtheden bij gelijke temperaturen (bij overgang vast-vloeibaar ongeveer):

¹⁾ Proc. Roy. Soc. **23**, 495, (1875).

²⁾ Contributions à l'étude des alliages. Pag. 396.

	Dichtheid.		Soort. volumina.	
	Vast	Vloeibaar	Vast	Vloeibaar
Zilver	10.2	9.5	0.098	0.105
Eutektikum (Zilver-koper)	9.6	9.0 ⁵	0.104	0.110
Koper	8.5	8.2	0.118	0.122

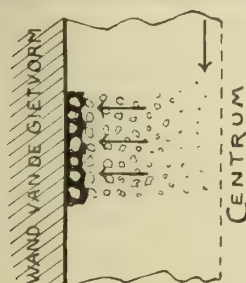
In elk der drie gevallen is er contractie bij het vastworden.

Met aan zekerheid grenzende waarschijnlijkheid is nu ook nog te betoogen, dat wanneer zilver of koper zelf uit gemengde smelten zich uitscheidt, daarbij volume-vermindering optreedt. Immers van een legering als het eutektikum is het waar dat de vorming der smelt uit de beide gesmolten componenten zonder belangrijke volumewijziging plaats heeft, daar toch het soort. volumen van gesmolten eutektikum berekend uit de cijfers der componenten tot een waarde van 0.110 voert, overeenkomende met het gemeten cijfer. Bij andere verhoudingen van zilver en koper bestaat nergens aanleiding om aan plotselinge afwijkingen in de volume-verhouding der vaste of vloeibare fasen te denken. Daarom zal de verandering van volume bij het stollen van elk der beide metalen, ten minste wat haar teeken betreft ook blijven bestaan, al heeft de kristallisatie plaats uit een gemengde smelt.

Beschouwen wij thans practisch het kristallisatie-proces van een munttin van 0.945, wier smelt in den van boven open ijzeren gietvorm wordt gegoten en kiezen wij daartoe een gedeelte op willekeurige hoogte, mits niet van het beneden- of boveneinde. Afgifte van warmte heeft zeer snel plaats aan het gedeelte van den dikken ijzeren gietvorm waarmede het beschouwde deel van de smelt in aanraking is. Er moet diensgevolge een temperatuurval zijn, in een horizontaal vlak van het midden der smelt naar den wand. Bovendien moet de temperatuur van iedere fractie der smelt toenemen als men overgaat naar een onmiddellijk daarboven gelegen deeltje. Uit de beschouwde horizontale laag begint op een gegeven oogenblik het eerst zilver uit te kristalliseeren onmiddellijk aan den wand, onder voortzetting zoowel naar binnen toe als naar boven, naarmate de warmteafgifte voortgaat. Er wordt geen kristalfragment gevormd of op hetzelfde oogenblik heeft de overal aanwezige smelt, die onder den druk van de hoogere lagen staat de samentrekking

op die plaats gevolgd. Dit proces gaat op elke plek door totdat daar 80 % der smelt als zilverkristallen is afgescheiden op het oogenblik dat de temperatuur ter plaatse tot 777° is gedaald en de omspoelende smelt daar de eutektische samenstelling heeft verkregen. Dat oogenblik wordt achtereenvolgens bereikt in de verschillende gedeelten der massa, in de richting van buiten naar binnen en tevens, maar met geringere tijdsverschillen, van beneden naar boven. Het eerste steeds aan den wand. Maar nu gebeurt er iets anders. Wanneer in een stuk van de buitenste laag, de daar aanwezige zilverkristallen beginnen samengekit te worden door het daartusschen zich bevindende eutektikum dan moet door de *volumevermindering van het stollende eutektikum* in elk vertikaal laagje een onmiddellijke aanvulling door het nog vloeibare deel van het daarnaast gelegen laagje geschieden, hetwelk bestaat uit smelt, ook reeds van de eutektische samenstelling of misschien nog zilverrijker. In ieder geval ontvangt elk stollend vertikaal laagje niet ver van den buitenwand daardoor een, zij het kleine, toevoer van vloeistof komende van de aangrenzende laag waar de temperatuur nog iets hoger is. Wat toegevoerd wordt in een bepaald volumedeeltje is daarbij steeds van lager gehalte dan de gemiddelde samenstelling van dat deeltje; het zal wel niet ver van de waarheid afwijken als wij zeggen dat het ongeveer de samenstelling van het eutektikum heeft. De buitenlagen ondervinden dus een invloed, die plaatselijk het gehalte *verlaagt* (steeds in het geval eener smelt van „hoog” zilvergehalte.)

Schematische voorstelling
eener vertikale doorsnede
door een kristalliserende tin.



- Zilverkristallieten.
- Vast eutektikum.

Fig. 4.

In maxima zou deze verlaging zooveel kunnen bedragen als veroorzaakt wordt door eene toestrooming van zooveel eutektikum op een bepaald gedeelte als noodig is om de inkrumping van het op die plaats zelve vastgeworden eutektikum weder aan te vullen. Daarover nog beneden.

In Fig. 4, eene schematische voorstelling van den toestand op het oogenblik gedurende de stolling, waarop de buitenste laag geheel vast geworden is, stellen de horizontale pijltjes de verschuivingsrichting van het eutektikum voor.

In de centrale gedeelten van de smelt moet noodzakelijkerwijze het complement van de veranderingen (in gehalte) aan de buitenzijde optreden. Dat laat zich ook niet moeilijk beredeneeren. De totale opschuiving van eutektikum in de richting der horizontale pijltjes gaat gepaard met gelijktijdige vloeistofverplaat-

sing van boven naar beneden in de in het midden gelegen gedeelten, en in min of meer schuine richting in daartusschen gelegen lagen. Die richtingen zullen moeten samenhangen met de viscositeit der nog niet gestolde massa's, die geleidelijk verandert naar het midden toe en tevens naar boven, waar de temperatuur voortdurend iets hooger blijft. Hoe de stand der kristallisatie in het midden is, wanneer de buitenkorst begint in haar geheel vast te worden, laat zich niet zeggen, maar wel moet het voorkomen dat er vloeistofverschuivingen (van boven naar beneden met kleinere of grootere afwijkingen) daar ter plaatse geschieden zoolang er stollingen van eutektikum elders plaats hebben, dus tot aan het laatst der stolling. Dan echter heeft ook in het middelste gedeelte reeds zilverkristallisatie plaats gehad; de daarbij behorende vloeistof echter wordt gedwongen te verschuiven naar beneden¹⁾ of naar ter zijde. Daarbij wordt zij vervangen door vloeistof die *minder* zilver heeft afgescheiden en het einde kan niet anders zijn dan dat hier bij het eindpunt der stolling zilverkristallisatie optreedt (natuurlijk weder te midden van eutektikum) met relatief *meer* zilver in haar geheel genomen dan overeenstemt met de samenstelling der oorspronkelijke smelt.

Tusschen buitenlaag met *verlaagd*, en middenlagen met *verhoogd* gemiddeld zilveragehalte liggen de gedeelten die daartusschen den overgang vormen.

De hier gevolgde redeneeringen, die van toepassing waren op zilver-koperlegeeringen met zilveragehalte hooger dan die van het eutektikum, $\pm 0,720$, blijven geheel van kracht voor het geval van dergelijke legeeringen met lager zilveragehalte dan 0,720, mits in plaats van een aanvankelijk uitkristalliseeren van zilver, gesproken worde van een vastwording van koperkristallen, geheel in overeenstemming met hetgeen de stolfiguur (Fig. 1) omtrent de stolling van dergelijke legeeringen toelaat te besluiten. Een analoge betoogtrant leidt dan tot de slotsom dat bij de laatst bedoelde legeeringen het zilveragehalte der buitenlagen *hooger*, dat der centrale lagen *lager* dan dat der smelt moet zijn, geheel in overeenstemming met de steeds, ook weder bij dit onderzoek, verkregen ervaringen (zie boven, Fig. 3.)

De hierboven gegeven schets van het verloop der snelle stolling van zilver-koperlegeeringen, tracht voor de eerste maal een inzicht te geven in de oorzaken der daarbij optredende en zoo opmerkelijke

¹⁾ Deze verschuiving van gedeeltelijk gesmolten massa in het midden van boven naar beneden geeft het aanzijn aan de zoo veelvuldig in gietstukken voorkomende „zuiggaten”. (Lunker) die dikwijls het bovengedeelte van gietstel moeten doen verwerpen.

liquatieverschijnselen; zij zal onmiddellijk van toepassing moeten zijn op elke andere binaire legering met overeenkomstige stoffiguur (gelijk beneden uitvoerig zal worden aangetoond). Aan haar zal des te meer gewicht kunnen worden toegekend indien het blijkt dat nieuwe deducties daaruit, getoetst aan waarnemingen, blijken in overeenstemming te zijn met de laatste.

Wanneer ik er toe overga daarvoor bewijzen aan te voeren, mogen een drietal punten vooropgezet worden, die alvast met de gegeven wijze van voorstelling niet in strijd zijn:

1°. Ik deelde boven de uitvoerige analytische onderzoeken van 1 mM. dikke lagen van gedeelten van munttinnen van tweeërlei gehalte mede. Elke laag had (zie fig. 2 en 3) nog een behoorlijke breedte en men zou kunnen wenschen dat nog verder gegaan was en bijv. van elke laag nog gedeelten van 1 mM. breedte afscheiden en daarop afzonderlijke gehaltebepalingen waren gedaan. Ik achtte echter de verkregen resultaten voor het begrip der liquatie in deze gevallen voldoende; zij zijn toch reeds in staat om het verband zichtbaar te maken tusschen de wijze van afkoeling, zooals die uit de afmetingen der gietvorm volgt, en de liquatie, welke de gevonden gehaltecijfers aangeven. Uit den langgerekten vorm der horizontale doorsnede eener tin volgt onmiddellijk dat oppervlakken van gelijke temperatuur tijdens de afkoeling op doorsnede zich ongeveer zullen vertoonen als in Fig. 5.

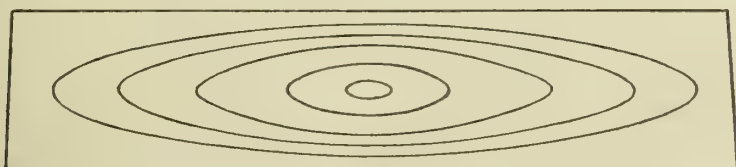


Fig. 5.

Warmteafvoer heeft aan de smalle zijden sneller plaats dan aan de lange zijden; een isothermisch oppervlak nadert de laatste derhalve meer dan de eerste. Bij de gehaltebepalingen aan het zilver van 0.945 vonden wij in overeenstemming hiermede, dat de gehalteveranderingen in de buitenlagen aan de lange zijvlakken sterker dan aan de smalle voortschrijden. Dat verder van de drie deelen waarin telkens een laag langs de lange zijvlakken verdeeld werd, het middelste steeds een iets geringere gehalteverlaging vertoont dan de beide burens, behoeft niet te verwonderen, aangezien de laatste, in de nabijheid der hoekpunten, iets vlugger in temperatuur zullen dalen.

2°. Wanneer de stolling op de aangegeven wijze plaats heeft, zoodat zij het eerst aangrijpt op de plaatsen in aanraking met de wanden maar het sterkst bij de hoekpunten, dan komt er een

oogenblik dat aan de lange zijkanten, bij de stolling van het eerste eutektikum een dun massief laagje is ontstaan, terwijl aan de korte zijkanten dit reeds zwaarder is. Vanaf dat oogenblik komt de inkrimping van dit *geheel* vastgeworden metaal in aanmerking, waarbij het dan zeer goed begrijpelijk is (omdat de smalle zijkanten steviger zijn dan de lange) dat een flauwe naarbinnen-buiging van de beide zijvlakken vooral in 't midden zal optreden. Dit verschijnsel vindt nu vrij regelmatig bij de timmen plaats, bij de pasmunttinnen (die het dunst zijn) zeer zwak, iets sterker bij die van een gehalte 0.945. Zoo gaven diktemetingen aan een tin der laatste soort, genomen op afstanden van telkens 5 mM., van ééne zijde tot de andere, de waarden:

12.21, 12.17, 12.13, 12.11, 12.07, 11.85, 11.80, 11.97, 12.01, 12.06, 12.05, 12.10, 12.16 mM.

Dus een duidelijke inzinking van 0.4 mM. in 't midden. Deze bewerkt eene geringe vermindering van de vloeistofbeweging in het centrale gedeelte van boven naar beneden.

3°. In gegoten legeringen, zooals de hier besprokene, gelijk trouwens veel algemeener, komen in mindere of meerdere mate poriën voor, van mikroskopische afmetingen tot dezulke die met het bloote oog duidelijk zichtbaar zijn. In vergelijkbare gietstukken blijkt de talrijkheid van dit optreden (ook de grootte der poriën) afhankelijk te zijn van een aantal omstandigheden, als snelheid van afkoeling, samenstelling der legering e. a. zonder dat het nog voldoende zeker bekend is, hoe de juiste vorm dezer afhankelijkheid is. Bij het hier onderzochte materiaal was opvallend de afwezigheid van poriën in de buitenste lagen, terwijl zij dikwijls in de meer naar het midden gelegen gedeelten veel voorkwamen.

Ook was hun optreden talrijker bij de legering met het gehalte 0.636 dan bij dat van 0.945. Maar hoe het zij, bevreemdend is dit voorkomen geenszins waar het geheele stolproces, vanaf het oogenblik dat een vaste buitenlaag is geformeerd, begeleid wordt door samentrekking van het daarbinnen liggende materiaal, die volledig en snel slechts wordt geneutraliseerd door toevoer van hoogere lagen zoolang de dunvloeibaarheid van de toestroomende legering dat mogelijk maakt. Gebeurt dit onvolkomen dan moeten er luchtledige kleinere of grootere holten het gevolg daarvan zijn. Als voorbeeld moge Fig. 6 dienen, een photo van een vertikale doorsnede over het midden van een deel van een munttin (gehalte 0.636), welk vlak eenigszins gepolijst en met fijne houtskool ingewreven werd.

Overgaande tot de meer directe gevolgtrekkingen uit de boven gegeven voorstelling van het mechanisme der stolling als oorzaak



Fig. 6.

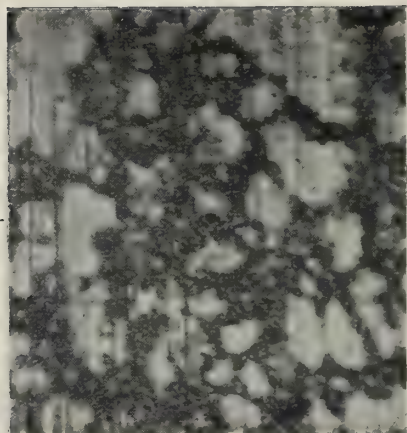


Fig. 7.



Rand.

Fig. 8.

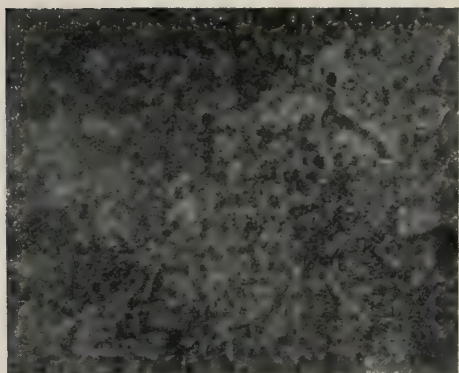


Fig. 9.

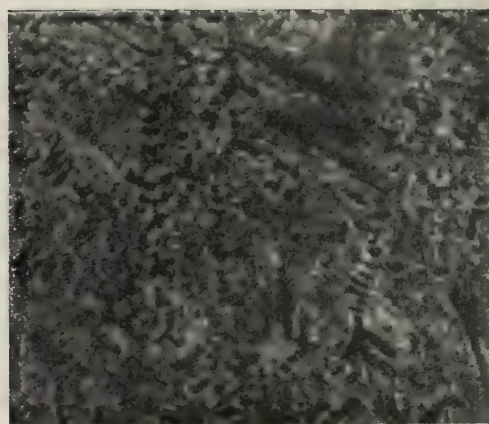


Fig. 10.

van de liquatieverschijnselen bij zilver-koperlegeeringen, zijn het wederom drie punten die vooral de aandacht trekken. Dit zijn *A* het mikroskopisch onderzoek; *B* de samenhang tusschen liquatie en snelheid van stolling; *C* een schematische berekening der maximale liquatie. Zij worden achtereenvolgens besproken.

A. Mikroskopisch onderzoek van slijpvlakken der bestudeerde legeeringen, genomen loodrecht op de lengterichting der munttinnen heeft bij veelvuldige herhaling en verwisseling van materiaal nimmer eenige bevestiging gegeven van de meening door Behrens uitgesproken over den bijzonderen aard der kristallisatie die de liquatieverschijnselen tengevolge zoude hebben (waarover reeds boven werd gehandeld). Er is noch bij de zilver- noch bij de koperrijkere legering sprake van een overheerschende richting van mikroskopische kristalgroepeeringen loodrecht op de wandrichting met een toenemende vertakking naar het midden. Ik voeg ter verduidelijking eenige mikrophotografiën bij van slijpvlakken, gelegen zooals zoo juist werd aangegeven. De vlakken werden gepolijst ¹⁾, door aanloopen geëtsd en daarna gefotografeerd. De pijl bij de reproductie geeft de richting aan loodrecht op de meest nabijgelegen zijkant van het onderzochte monster.

1. Randgedeelte van een slijpvlak. Gehalte legering 0.945. Witte zilverkristallieten, waartusschen onregelmatige afscheidingen, uit eutektikum bestaande (Fig. 7).

2. Zelfde slijpvlak als 1, maar een gedeelte verder van den rand gelegen (de streping is evenals in Fig. 7 een gevolg van onvolledige polijsting. (Fig. 8.)

3. Gehalte der legering 0.636. Slijpvlak onmiddellijk naast de zijkant genomen. Koperkristallen + eutektikum. (Fig. 9.)

4. Slijpvlak als 3; gedeelte meer uit het midden van de doorsnede genomen. (Fig. 10.) Alle vergrootingen zijn $240 \times$ lineair.

B. Aansluitende aan de gegeven voorstelling van het oorzakelijk verband tusschen liquatie en het stollingsproces zooals dit uit de bekende stolfiguur moet worden afgeleid, kan men, verder gaande, een eenigszins quantitative betrekking tusschen den omvang der liquatie en de snelheid waarmede stolling in vergelijkbaar materiaal plaats heeft, vaststellen. Daaraan moet de opmerking voorafgaan dat de eigenlijke liquatie (voorloopig steeds van zilver-koperlegeeringen sprekende) zooals men die begrijpt als het gehalteverschil tusschen de gedeelten met de meest uiteenlopende gehalten, i. e. het midden

¹⁾ Het polijsten der zilverrijkere legeeringen is door de zachtheid van dit materiaal nogal bezwaarlijk.

en de buitenzijde van de gietstukken, dient te worden gesplitst in twee gedeelten en wel het gehalteverschil 1°. tusschen buitenzijden en het totale gemiddeld (smelt-)gehalte en 2°. tusschen het laatste en het gehalte van de centrale deelen. Beide zullen den invloed der stollingssnelheid ondervinden.

Bij oneindig snelle vastwording van eene homogene binaire smelt zou de gestolde legering volkomen gelijkslachtig moeten zijn. Te verwezenlijken is dit natuurlijk niet¹⁾; steeds is, zij het een uiterst gering, tijdsverloop noodig om de kristalvorming, gepaard met warmteafgifte aan de omgeving, te bewerkstelligen. Eene liquatie- $\text{graad} = 0$ is dus een grensgeval. Hoe gering ook, een zekere waarde moet zij hebben, en dit geldt voor elk der beide helften waarin wij de liquatie zooeven splitsten. De liquatie in de buitenlagen, veroorzaakt door een naar buiten gerichte verschuiving van eutektikum, zooals wij die boven beschreven, stelt voorop dat, hoe snel de stolling ook moge geschieden, er nog voldoende tijd is, dat in een horizontale laag van het gietstuk de verschillende stadia der kristallisatie elkaar op zoo'n wijze opvolgen dat de bedoelde stofverschuiving ongeveer horizontaal gericht kan plaats vinden. Hoe sneller nu de stolling in zoo'n laag hoe geringer de temperatuurverschillen (en die der kristallisatie dus) daarin tusschen peripherische en centrale gedeelten. Maar dan tevens des te grooter het verschil op elk punt eener horizontale laag met elk deeltje daarboven dat later in den gietvorm is gegoten. Bij zeer sterke toeneming der stollingssnelheid zal de „aanvullende” stroom van vloeibare legering van andere samenstelling steeds minder horizontaal, maar steeds meer van boven naar beneden gericht zijn, zoowel aan den omtrek als in het midden. Maar ook des te minder reden voor verschil tusschen de buitenste lagen en de daaropvolgende. Dergelijke redeneering is ook toe te passen op het optreden van de liquatie in de middelste lagen (vergeleken met de smelt).

Terwijl nu bij verminderde stolsnelheid de omstandigheden zich kunnen voordoen dat zoo goed mogelijk het vroeger beschreven geval (waarvan Fig. 4 een schematisch beeld trachtte te geven) wordt verwezenlijkt, zal bij verdere voortzetting in dezelfde richting, dus bij toenemenden duur van het proces, ten slotte weer een overeenkomstige toestand als bij zeer plotseling vastworden in het leven worden geroepen. Men denke zich slechts zeer dicht bij het grensgeval (waartoe men zoo ver als de experimenteerkunst gedooft zal kunnen naderen) waarbij dus de stolling bij uitstek langzaam plaats

¹⁾ Noodzakelijk zou zijn stolling zonder warmte-effect tot één amorphe of kristallijne vaste fase.

heeft. Dan is in elke horizontale laag de kristallisatie-toestand op het oogenblik zoo goed als dezelfde; terzelfdertijd wordt dus de eutektische temperatuur bereikt en, daar toch steeds tengevolge van de wijze van gieten iedere hoogere laag iets ten achteren is bij een lagere, wordt samenkrimping door het stollen van eutektikum op elk plekje gevolgd door aanvulling van een gelijkzaamengestelde smelt er boven gelegen. Er is dus ook *dan* nauwelijks reden voor ongelijkheid van gehalte tusschen centrum en peripherie. In Fig. 11 mogen *a*, *b* en *c* een schematisch beeld geven van de toestroomingen van smelt tengevolge van stolling in een horizontale laag.

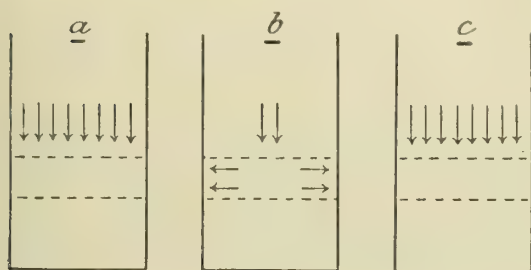


Fig. 11.

a stelt daarbij dan een uiterst snelle, zoo goed als momentane stolling voor, *c* een uiterst langzame en *b* een tussengeval. *a* en *c* stemmen overeen; *b* verbeeldt een ideaal geval van zuiver horizontale en vertikale verplaatsingen.

Tusschen *a* en *b* evenals tusschen *b* en *c* zijn dan weer overgangstoestanden, die ook waarden geven voor de liquatie (zooowel de peripherische als de centrale) welke theoretisch = 0 is bij *a* en *c* en maximaal bij *b*.



Fig. 12.

een maximum gaande later weer te dalen. Fig. 12 stelt dit in beeld voor; de eindtoestanden (liquatie = 0) zijn natuurlijk nooit geheel te bereiken.

Tot bevestiging van de hoofdzaak van het voorafgaande, een stijgende en later weder dalende liquatie bij toenemenden duur der stolling, al het overige gelijk gebleven, worden de volgende proefnemingen vermeld:

Wij hebben materiaal vervaardigd, weder in den vorm van munt-

M. a. w. wil dit zeggen dat elk der beide onderdeelen der liquatie bij afnemende snelheid der vastwording van een gietsel, ceteris paribus, in omvang stijgt om over

tinnen, zoowel van de legering met een gehalte van ± 0.945 als dat van ± 0.636 , maar zoodanig dat met zekerheid de volgorde bekend was van den tijd waarin de stolling van telkens 4 soorten overigens gelijk materiaal, had plaats gevonden. Die volgorde toch was af te leiden uit de omstandigheden van het gieten.

Bij de eerste reeks proeven was het gemiddeld gehalte van het materiaal 944.74 duizendsten, bij de tweede reeks 635.6 duizendste. In elke reeks 4 variaties:

I. Gegoten in een kouden ijzeren gietvorm. Van de verkregen tin werd het onderste gedeelte genomen dat wel zoo snel gestold is als praktisch uitvoerbaar is.

II. Van dezelfde tin als sub I werd materiaal genomen ongeveer ter halver hoogte van de tin; de stolling kan niet dezelfde snelheid gehad hebben.

III. In denzelfden gietvorm werd gegoten nadat deze eenigszins was voorgewarmd. Er werd weder een deel der legering genomen ter halver hoogte van de tin. Stollingsduur noodzakelijk lager dan sub II.

IV. Een tin van dezelfde afmetingen, gegoten niet in ijzeren vorm, maar in zand. Nog langzamer bekoeling.

De gietvorm was bij de 1^e en bij de 2^e serie dezelfde.

Bij elke proef werd nu bepaald het gehalte van proefmetaal, 1^e genomen uit het midden van het voorhanden stuk der tin; 2^e genomen in een laag van 1 mM. dik, rondom van hetzelfde stuk. Het laatste gehalte noem ik a , het eerste c . De bovengenoemde gehalten der smelt s .

Dan geeft de volgende tabel van beide seriën en elk der 4 proeven de waarden a , c , de onderlinge gehalteverschillen en die met s .

	Proef	Gemiddeld gehalte der buiten- zijde a	Gehalte in het centrum c	$s-a$	$c-s$	$c-a$
1 ^e Serie. Gehalte der smelt: $s = 0.944^{74}$.	I	943.9	945.0	0.8	0.3	1.1
	II	942.56	947.5	2.2	2.8	5.0
	III	942.04	947.2	2.7	2.5	5.2
	IV ¹⁾	944.97	946.0	—0.2	1.3	1.0
2 ^e Serie. Gehalte der smelt: $s = 0.635^6$.	I	635.55	635.0	0.0 ⁵	—0.6	—0.5 ⁵
	II	636.18	634.9	—0.6	—0.7	—1.3
	III	638.6	623.8	—3.0	—11.8	—14.8
	IV	637.02	632.2	—1.4	—3.4	—4.8

¹⁾ Nog op een ander geval van nog veel langzamer stollen van deze smelt dan bij IV kom ik nader terug. Niet hier omdat door geheel andere omstandigheden der proef de vergelijking onjuist zou zijn. Daarbij komt intusschen een nog veel geringere liquatie voor.

Ik acht deze uitkomsten bij uitstek gunstig wegens hunne volledige regelmatigheid. In elk der 2 seriën opklimmende van proef I tot IV, dus tevens in duur van den stollingstijd, gaat de totale liquatie ($c-a$), zijnde het verschil van centrum en buitenlaag, zoo- wel als elk harer componenten, dat zijn de gehalteverschillen aan buitenzijde of in het centrum met het oorspronkelijk gehalte, eerst geregeld en zonder eenige uitzondering toenemen en later weer afnemen. Ook zijn weder de teekens dier verschillen bij het hooge zilvergehalte en bij het lage tegengesteld. En omdat de proefnemingen vergelijkbaar zijn zoude men het haast wagen uit deze cijfers nog de conclusie te trekken dat de maximale liquatie in de 1^e serie merkbaar kleiner zal zijn dan in de tweede, hetwelk niets bevreemdends heeft, zooals nog zal blijken.

Deze eigenaardige betrekking, nu wel vastgesteld tusschen liquatie en stollingsduur, zoodanig dat de eerste een maximumwaarde moet hebben, leidde onmiddellijk tot een, naar mijne meening, interessant resultaat. Zij geeft toch direct de verklaring voor het opmerkelijke feit, boven vermeld, dat Roberts Austen een sterk verminderde liquatie had gevonden bij zilver-koper met sterk verlengde stollingsduur, hetgeen met de meer primitieve opvattingen omtrent het stollingsproces evenzeer in strijd was als met de later door Matthey gevonden resultaten. De oplossing is nu zeer eenvoudig; beide onderzoekers hebben juist geëxperimenteerd; alleen Roberts Austen heeft liquaties gemeten welke lagen, in Fig. 12 *rechts* van het maximum, zooals bijv. *b* en *c*, terwijl Matthey met veel grooter snelheid van stolling experimenteerende, een liquatie als bijv. van het punt *a links* van het maximum heeft bepaald.

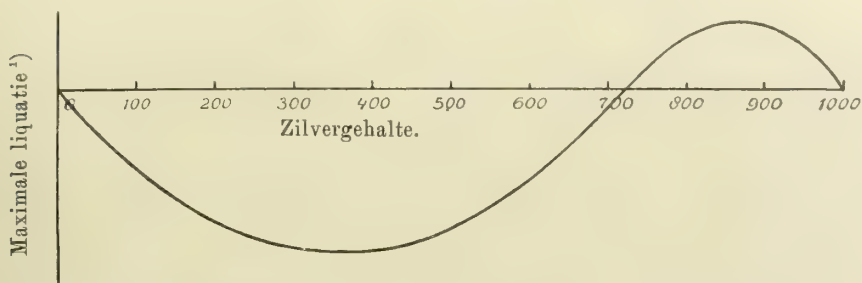
Op gevaar af van te vergaande gevolgtrekkingen af te leiden uit de verkregen resultaten waag ik het voor de overigens alleen kwalitatief besprokene liquatie een numerieke betrekking af te leiden die haar verbinden moet (bij de zilver-koperlegeringen en analoga) met de variaties in zilveragehalte der legeringen. Dit kan dan slechts hoogstens gelden voor de liquatie opgevat als gehalteverschil van de buitenste lagen der legering en het oorspronkelijk smelt-gehalte. Deze is immers afhankelijk, zooals betoogd werd, van de verschuiving van eutektikum naar de buitenlagen; de mate waarop dit geschiedt hangt samen met den stollingstijd, maar één waarde ervan zal berekend kunnen worden en wel de maximumwaarde die deze liquatie zal kunnen bereiken. Geen grooter wijziging in gehalte is toch in de buitenste laag der legering te veroorzaken dan die,

welke geldt voor het geval, dat de totale volumevermindering, ontstaan door het vastworden van het eutektikum tusschen de eerstafgescheiden zilver (of koper) kristallieten wordt aangevuld door smelt met 't laagst mogelijk, dat is eutektisch gehalte. Nu zagen wij reeds dat het soortelijk volumen van zilver-koper-eutektikum bij 't vastworden afneemt van 0.110^5 tot 0.104 , eene contractie derhalve van $\pm 6\%$. Dan is de maximale gehalteverlaging bij eene zilverrijke legering leverende a -deelen zilver en $1000 - a$ deelen eutektikum licht te berekenen. (Zilvergehalte dier legering is $0.28 a + 720$, het eutektikum tegen 720 duizendsten gerekend). Na stolling waarbij het ontbrekende door eutektikum is aangevuld, is behalve a deelen zilver $(1000 - a) 1.06$ eutektikum aanwezig. Het zilvergehalte ter plaatse is daardoor geworden $\frac{1000 a + 720 (1060 - 1.06 a)}{1060 - 0.06 a}$ hetwelk door aftrekking van het oorspronkelijk gehalte de vermindering daarvan aangeeft. Dit verschil $\frac{16.8 a - 0.0168 a^2}{1060 - 0.06 a} = F(a)$ zal een maximum-waarde verkrijgen wanneer $\frac{dF(a)}{da} = 0$ hetgeen bij berekening geeft een waarde $a = 507$ duizendsten, waarmede een zilvergehalte 0.862 en een maximumwaarde der „peripherische” liquatie van 4.1 duizendsten overeenstemt.

Op eenvoudige wijze is die liquatie ook voor elk ander gehalte te berekenen. Voor het gehalte 0.720 wordt zij 0 en negatief voor lagere waarden (d. i. het gehalte der buitenlaag is hooger dan dat der smelt). Een maximale negatieve waarde wordt dan weder bereikt bij een gehalte dat door berekening op 0.395 wordt gevonden, waar dan de liquatie aan de buitenzijde 10.3 duizendsten zou bedragen. Voor verschillende gevallen wordt de zoo berekende liquatie der buitenste lagen (maximaalwaarden voor ieder gehalte) de volgende:

Gehalte	Liq.	Gehalte	Liq.
1000	0	636	—4.2
945	2.7	600	—5.7
900	3.8	500	—8.8
862	4.1	395	—10.3
800	3.3	300	—10.2
720	0	200	—8.5
700	—1.1	100	—5.1
		50	—2.8

In Fig. 13 wordt deze samenhang tusschen gehalte en grootst bereikbare liquatie in de buitenste lagen voorgesteld.



¹) In de buitenlagen.

Fig. 13.

Het is nu wel eenigszins opmerkelijk dat de waarden der hier bedoelde liquatie, zooals zij bij de verschillende proeven opgenomen, in de tabel op pag. 28 experimenteel werd bepaald, nimmer de op de juist aangegeven wijze berekende hoogste waarden overschrijden. De berekening toch leerde dat die hoogste waarde kan zijn voor

Gehalte 0.945

Gehalte 0.636

2.7

4.1

terwijl de hoogst gevonden waarden waren voor

Gehalte 0.945

Gehalte 0.636

2.7

3.0

Geen overschrijding derhalve.

Ten overvloede zij nogmaals opgemerkt, dat deze berekeningen alleen van toepassing kunnen zijn op de liquatie in de buitenlagen van het gietstuk. De liquatie daarentegen in de centrale gedeelten berust op een anderen grond; daarvoor is een analoge berekening van het maximum niet goed uitvoerbaar. Omdat in de boven gegeven wijze van voorstelling de centrale liquatie wordt veroorzaakt doordat rondom reeds afgezette kristalaggregaten, van zilver of koper de smelt wegvloeit en wordt vervangen door eene van iets hoger zilver (of koper) gehalte, maar niet te bepalen in welke mate, is geene grenswaarde van de verandering op te geven. Wel is het aan te nemen dat bij gelijke verschuiving het gehalte der smelt des te sterker daar ter plaatse verandert door reeds gevormd zilver of koper, naarmate het gehalte der smelt verder afwijkt van 1000 zilver (bij de zilverrijkere), of van 0 zilver, bij de koperrijkere legeringen. De „centrale” liquatie zal dus waarschijnlijk toenemen

bij hoog zilveragehalte, naar gelang dit laatste tot zeer dicht bij de eutektische samenstelling daalt, om dan snel tot 0 af te nemen, een evensnel weer toenemende negatieve waarde daarop aannemende tot spoedig een maximumwaarde (maar aanmerkelijk grooter dan bij het hoogere zilver) bereikt is, die dan geleidelijk kan dalen naarmate het gehalte lager wordt. Dit deel der liquatie zou daarnaar wel op andere wijze met het gehalte in betrekking staan dan het deel dat aan de buitenzijde haar hoogste waarde vertoont. Met de boven in de tabel op pag. 26 vermelde cijfers stemt deze opmerking wel overeen. De som, d. i. de totale liquatie, kan echter moeilijk in betrekking worden gebracht met het gehalte van een bepaald soort legeringen. Zeer in het ruwe kan men hoogstens zeggen dat bij de zilver-koperlegeringen (en andere binaire met analoge stolfiguur) de liquatie (totale) = 0 is bij de gehalte 0 en 1000 voor het eene metaal en bij de eutektische legering; dat zij echter van de laatste uitgaande spoedig stijgt en wel het hoogst bij verplaatsing naar de zijde van datgene der twee metalen, dat op den grootsten afstand van het eutektikum ligt.

Eindelijk zij hier nog een eigenaardige proef vermeld, welke een voorbeeld geeft van een buitengewoon langzame bekoeling bij een zilver-koperlegering van ± 0.945 gehalte en die dus, in overeenstemming met fig. 12 een zeer geringe liquatie moest vertoonen. Zij doet dit inderdaad maar geeft tevens nog een ander feit waar te nemen, dat wel vermelding verdient, nl. in een zeer dun laagje aan de buitenzijde van het metaal een optreden van zeer merkbare gehalte-verandering, maar in een richting tegengesteld aan die welke normaal optreedt; en wel in dit geval een gehalte-verhooging. Schijnbaar dus een uitzondering op de gewone en algemeen geldende regel. Vooreerst de beschrijving der proef:

Er werd gesmolten zilver-koperlegering van bovengenoemd gehalte in een dikwandige (2 cM. wand) magnesiëtkroes, en wel in een vertikalen, cilindrischen kryptoloven, die zelve ook reeds dikwandig, in dit geval het voordeel aanbood een uiterst langzame afkoeling van het daarin geplaatste toe te laten, aangezien snellere afkoeling door de aanwezigheid van de dikke laag wit gloeiend kryptol sterk werd tegengegaan. De legering werd niet gegoten maar onder kool in den gesloten oven gelaten. De verkregen metaalcylinder werd na bekoeling rondom over het middengedeelte in zeer dunne lagen, in den beginne van $1/20$ en $1/10$ mM., daarna $1/2$ en 1 mM.,

mechanisch afgedraaid en van iedere portie het gehalte bepaald. De uitkomsten (van buiten naar binnen gaande) waren de volgende:

$\frac{1}{20}$ mM.	$\frac{1}{10}$ mM.	$\frac{1}{2}$ mM.
951.4 (buitenzijde)	945.0	944.3
951.5	4.9	4.3
952.5	4.4	4.4
948.	4.1	1 mM.
948.	4.2	
946.8	4.2	4.6
$\frac{1}{10}$ mM.	4.3	4.6
	4.1	4.8
	4.6	4.2
	4.5	Middengedeelte in 't geheel 944.5
4.8	4.4	
4.4	4.5	

Een zeer dun laagje aan de buitenzijde, nog geen halve mM. dik vertoont dus een zeer opmerkelijke gehalteverhooging; vandaar af naar het midden was overigens de ongelijkslachtheid opvallend gering. Dit laatste stemt geheel overeen met de boven voorziene verwachting bij een zoo uiterst langzaam gestolde smelt. Maar ook het verschijnsel aan de buitenzijde vindt gemakkelijk hare verklaring. Wanneer toch de liquatie in dit geval zoo zeer gering is, dan zoude dit zoo zijn omdat bijna tezelfder tijd de geheele massa op de temperatuur van het eutektikum gedaald zijnde, al dat eutektikum dat als water in een spons tusschen het samenhangende netwerk der zilverkristallisatie is opgenomen bijna gelijkmatig stollen kan, waardoor geen reden voor ongelijkheid bestaat. Maar is het dan te verwonderen dat dit bijna in haar geheel gelijktijdig stollen van het eutektikum, onder inkrimping geschiedende, tengevolge kan hebben een zwakke terugtrekking van die stollende massa ook in de richting van buiten naar binnen (in hoofdzaak stellig nog van boven naar beneden) zoodat de reeds vaste zilverkristallieten aan de buitenzijde, die op haar plaats blijven, tot op zeer geringe diepte een deel van het eutektikum dat hen omgaf heeft verloren, waardoor het gehalte ter plaatse iets wordt verhoogd? De bovenstaande proef geeft het antwoord alsmede de te voren gedane waarneming dat een duidelijk netwerk van kristalaggregaten op de buitenkant, bij het uitnemen uit de kroes, zichtbaar was.

§ 3. „Zwaartekrachtsliquatie“.

Wanneer zooals hier, sprake is van ongelijkslachtingheid van zilver-koperlegeeringen tengevolge van de processen die de stolling begeleiden, dan dient nog melding te worden gemaakt van een nog niet besproken andere oorzaak voor ongelijke verdeeling der samenstellende metalen. Bij het onderhavige onderzoek deden zich enkele malen gevallen daarvan voor en wel in het bijzonder bij zeer langzame bekoelingen. Bedoeld wordt eene ontmenging der twee metalen tengevolge van de werking der zwaartekracht op half gestolde smelten. Als bij eene stolling een metaal zich begint af te zetten, b.v. zilver zooals hier, dat soortelijk zwaarder is dan de vloeistof waarin het zich heeft gevormd en op zoodanige wijze dat eene verplaatsing uit eigen beweging niet geheel wordt verhinderd, dan zal een neiging bestaan voor dat zilver om in de onderste lagen van het metaalstuk in relatief grooter proportie dan in de bovenste voor te komen. Een lichter metaal zal omgekeerd trachten zich in opwaartsche richting te bewegen.

Slechts bij uitzondering zal deze vorm van liquatie, die men de „zwaartekrachtsliquatie” zou kunnen noemen, haren invloed in de techniek doen gelden ¹⁾. Er is toch voor noodig een rustig en zeer langzaam stollen. In de praktijk worden smelten bijna steeds uitgegoten in vormen waarin zij bijna altijd zeer snel bekoelen. Bij gemakkelijk smeltende legeeringen, gegoten in ruime hoeveelheden en met groot verschil in soortelijk gewicht der componenten, zou een optreden zijn te verwachten. Een goed voorbeeld daarvan levert de stolling van hardlood, eene legering van lood met een zeker percentage (tot ± 20) aan antimonium. Daarbij hebben de antimonium-kristallen, welke zich het eerst afzetten, wanneer hun gehalte grooter dan 12 % is, gelegenheid in de soortelijk zeer zware smelt voor een deel op te stijgen en zich te verzamelen onder de door afkoeling aan de lucht spoedig ontstane vaste bovenkorst. ²⁾

Enkele voorbeelden die zich bij opzettelijk zeer langzaam uitgevoerde stollingen van zilver-koper hebben voorgedaan, mogen ter verduidelijking worden aangehaald. Het materiaal, zilveragehalte ± 0.945 , waarvan in de beide vorige bladzijden sprake was, is

¹⁾ Niet te verwarren met een scheiding, die aanleiding geeft tot de vorming van twee vloeistofflagen.

²⁾ Het is hier niet de plaats uitvoeriger hierop in te gaan. Beschrijving en illustraties zijn te vinden o. a. in Heyn. Die Metallographie im Dienste der Hüttenkunde, 1903, pag. 22.

in deze richting onderzocht, doordat de langzaam bekoelde metaalcylinder vanaf de boven- en de onderzijde in dunne, eenigszins schuin toeloopende lagen, is afgedraaid, en elk dier monsters werd geanalyseerd. De gehaltecijfers waaraan even voor en even na het middelgedeelte (gehalte 944.5 duiz.) enkele ontbreken, waren van boven naar beneden de volgende (in duizendsten):

941.7	•	Midden.	
943.7		945.3	
944.3		945.2	
944.5		944.9	(De tweede reeks
944.8		944.0	dezer getallen
945.1		944.6	volgt op de eerste)
945.2		945.4	
944.7		947.0	
944.4		950.1	

Afziende van enkele onregelmatigheden blijft toch het positieve resultaat, dat het gehalte aan het bovenoppervlak het laagst en dat aan de onderzijde het hoogst was.

Veel sterkere verschillen treden op bij een dergelijken metaalcylinder van een gehalte van ± 0.640 , die op overeenkomstige wijze is verkregen. Hierbij scheiden zich eerst koperkristallen af, die, als lichter dan de vloeistof zullen trachten te gaan drijven, daardoor het gehalte in de bovenste lagen te doen verlagen, zoodat een gehalteverhooging beneden is te verwachten. Deze laatste gehalteverhooging moet natuurlijk een bovenste grens hebben en wel de waarde van het gehalte van het eutektikum, omdat bij zoo volledig mogelijke opstijging van het koper alleen eutektikum aan de onderzijde overblijft; hooger gehalte is uitgesloten. Inderdaad laten de volgende cijfers zien dat bijna zuiver eutektikum in de benedenste lagen voorkwam.

De gehalten waren, weder van boven naar beneden (in duizendsten):

280 (boven)	624	702 ⁵
419	(hlaat)	706
467	656 (midden)	712
497 ⁵	(hlaat)	709
529	668 ⁵	709
562	676	710
585	682	709
613	689	709
601	694	711 (onder).

Dit is wel een ontmenging (van 280 tot 711 duiz.) op zeer groote schaal. Het is niet bevreemdend dat de zwaartekrachtsliquatie bij dit laatste gehalte zooveel aanzienlijker blijkt dan in het voorafgaande voorbeeld. Van veel gewicht zullen toch de relatieve hoeveelheden van het eerst stollende metaal en die van het eutektikum zijn. Bij het gehalte 0.945 heeft men 80 % zilver + 20 % eutektikum; bij 0.640 echter 11 % koper + 89 % eutektikum. Weinig kristallen in een overmaat vloeistof zullen meer gelegenheid hebben aan de werking der zwaartekracht gehoor te geven dan bij tegengestelde omstandigheden waar, zooals in ons geval van zilverovermaat, de samenhang van die dichte kristalaggregaten veel hechter en inniger is dan wanneer deze laatste tot een gering bedrag voorkomen.

In het zoo juist vermelde geval van groote ongelijkheid bij een gehalte van 0.640 was ook nog de liquatie in horizontalen zin onderzocht. De uitkomsten daarvan waren in een zelfde horizontale schijf, afgedraaid van den cylinder, uitermate grillig; uit den aard der zaak, waar zulke omvangrijke dislocaties hadden plaats gehad als boven is gebleken. De verdere mededeeling kan daarom achterwege blijven.

Eindelijk kon verwacht worden dat bij bekoeling van smelten met gehalten, aanzienlijk lager dan 0.945 maar hooger dan de eutektische legering, b.v. van \pm 750 duizendsten, eene zwaartekracht-liquatie zou zijn te verkrijgen, waarbij grooter verschillen konden optreden; wellicht zoozeer dat bij zinken der eerst gevormde zilverkristallen de bovenlagen min of meer tot het gehalte van het eutektikum konden zijn genaderd. Dit bleek waar te zijn. Gehalte der smelt was 0.749 (dus ruim 10 % zilver, en bijna 90 % eutektikum). Analyse der lagen van boven naar beneden gaf in duizendsten:

717.3 (boven)	749 (midden)
716.7	781.5
717.4	806
740	819
735.5	821
740.5	832 (onder)

De interessante vraag die zich hierbij aansluit, in hoeverre of eene dergelijke zwaartekrachts-liquatie bij het eutektikum zelve mogelijk is, wordt hier slechts aangestipt. Zij is in onderzoek.

§ 4. Liquatie en stolfiguur.

De in het voorgaande gegeven beschouwingen over de oorzaken en het ontstaan van liquatie bij zilver-koper-legeeringen ¹⁾ bevestigd wordende door alle daaraan verrichte onderzoekingen, zijn van wijdere strekking. Daar toch het verschijnsel, zooals het zich hier voordeed in direct verband bleek te staan met de gedaante der stolfiguur en slechts gebruik gemaakt is van het feit dat de stolling der aggregaten, die zich uit de smelt afzetten onder volumenvermindering plaats heeft, zullen analoge conclusiën kunnen worden getrokken voor de liquatie van andere binaire legeeringen, die aan dezelfde voorwaarden voor stolfiguur en contractie voldoen. Maar het is bovendien zeer eenvoudig om af te leiden of en zoo ja in welke richting liquatie mogelijk kan zijn bij binaire legeeringen welke niet op dezelfde wijze zich bij hun vastworden verhouden. Daarom moge hier nog voor eenige voorbeelden van de verschillende stollingswijzen kort worden aangegeven, hoe men in die gevallen ongelijkslachtheid der vaste legeeringen kan voorspellen.

Er zal daaraan worden toegevoegd eene opsomming van de voornamere en experimenteel onderzochte gevallen van liquatie bij binaire legeeringen, die het tot dusverre hebben moeten stellen zonder eenige verklaring, en waarvan sommige ook nu nog verdere toelichting noodig hebben.

Legeeringen van twee metalen (of een metaal + een metalloïde) die tot eene enkele homogene vloeistof gesmolten op regelmatige wijze door warmteafgifte aan de omgevende wanden tot stolling worden gebracht, kunnen dit op meermalen beschrevene wijzen doen, waarvan de eenvoudige typen voor ons doel zijn aan te halen.

a. De beide metalen zetten zich onvermengd uit de smelten van verschillende gehalten af; slechts bij ééne concentratie (die van het eutektikum) kristalliseeren zij gelijktijdig in vaste verhouding. De stolfiguur bestaat uit twee krommen, afdalende van de smeltpunten der enkele metalen, totdat zij elkander in het eutektische punt snijden. Wanneer, wat bijna altijd het geval zal zijn, het eutektikum bij het vastworden inkrimpt, dan zal de vastgeworden legering in de buitenste lagen min of meer armer en in het centrum min of meer rijker zijn aan datgene der twee metalen, dat in de smelt in

¹⁾ Er wordt nu verder afgezien van de zwaartekrachtliquatie die op andere gronden berust en van geringer beteekenis is, omdat zij bijna alleen onder abnormale omstandigheden merkbaar gaat worden.

hoogere mate aanwezig is, dan beantwoordt aan de eutektische samenstelling.

Valt de verandering van dichtheid van het stollende eutektikum in andere richting, dan moet ongelijkslachtheid in tegengestelden zin optreden.

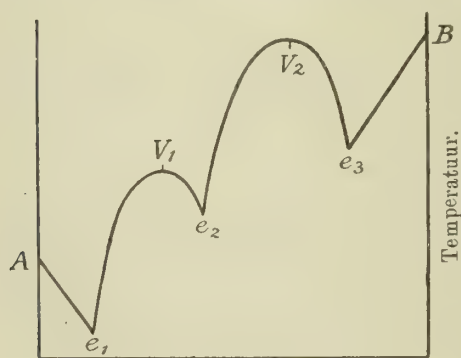
Bij de zuivere metalen en het eutektikum is de liquatie = 0; welke waarde zij bij tusschengelegen gehalten kan aannemen, is op niet nauwkeurig te formuleeren wijze afhankelijk o. a. van de plaats die het eutektikum in de reeks der gehalteverhoudingen inneemt en van de snelheid der stolling.

Maar des te grooter zal zij, in overigens gelijksoortige omstandigheden verwacht kunnen worden te zijn (dus b.v. bij combinaties van dezelfde twee metalen, die op gelijkvormige wijze worden behandeld), naarmate het eutektikum meer éézijdig ligt en het legeringsgehalte zich verplaatst tot, ruwweg geschat, halverwege het eutektikum en het daarin in de geringste hoeveelheid voorkomend metaal.

Wanneer bij stolling in plaats van de zuivere metalen, vaste oplossingen daarvan tot zekere concentratiegrenzen optreden, verandert dit de voorgaande conclusie slechts in zooverre, dat overal de liquatie zich in verminderden

omvang zal uiten.

b. De stolfiguur moge er ééne zijn als in nevenstaande figuur 14. Bij samenstellingen in de nabijheid der componenten *A* en *B* zelve scheiden deze bij bekoeling zich eerst af; daartusschen ligt de mogelijkheid van het optreden van twee verbinden V_1 en V_2 wier samenstelling beantwoordt aan de toppen der beide middenkurven in de figuur. Er zijn drie



Samenstelling.

Fig. 14.

eutektika e_1 , e_2 en e_3 ; de beide uiterste uit een der componenten + eene verbinding bestaande, e_2 uit V_1 en V_2 samengesteld. Wanneer wij aannemen dat alle stollingen onder samentrekking geschieden, dan zijn de volgende kwalitatieve conclusies omtrent liquatie te trekken uit beschouwingen, analoog aan de vroeger gegevene:

Smelten met samenstellingen tusschen *A* en e_1 geven legeringen bij welke de buitenzijde armer is aan *A* dan het centrum. Hetzelfde is het geval met smelten, liggende tusschen V_1 en e_2 en tusschen V_2 en e_3 . Daarentegen zal zich het tegengestelde voordoen bij de

smelten tusschen e_1 en V_1 , tusschen e_2 en V_2 en tusschen e_3 en B . Geen liquatie bij de drie eutektika, de zuivere componenten en bij verhoudingen, die overeenstemmen met de verbindingen V_1 en V_2 .

Zijn de verbindingen in gesmolten toestand gedissocieerd, dan zullen bij zoo snelle stolling, dat bij kristalliseeren eener verbinding niet spoedig genoeg nieuwe vorming uit de componenten plaats heeft, eenige complicaties te dien aanzien optreden.

c. Wanneer de beide metalen in alle verhoudingen gemengd kunnen kristalliseeren, terwijl in de kurve, die de beide metaal-smeltpunten verbindt, geen maximum of minimum voorkomt, zooals in fig. 15, dan zal bij eene zeer langzame vastwording niet alleen om de bovenvermelde reden geen merkbare liquatie optreden, maar ook omdat de mengkristallen a_1 die bij eerste stolling uit eene smelt S_1 zich afzetten gedurende het verdere stollen zich geleidelijk wijzigen langs de kurve dier vaste mengkristallen tot a_2 , om zoo-doende in evenwicht te blijven met de in samenstelling ook intusschen gewijzigde smelt, die op het laatste oogenblik tot S_2 zal zijn genaderd. Dan zou ten slotte ééne homogene massa a_2 zijn verkregen. Maar dit theoretisch verloop zal in werkelijk-

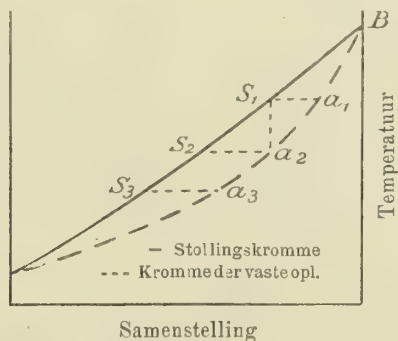
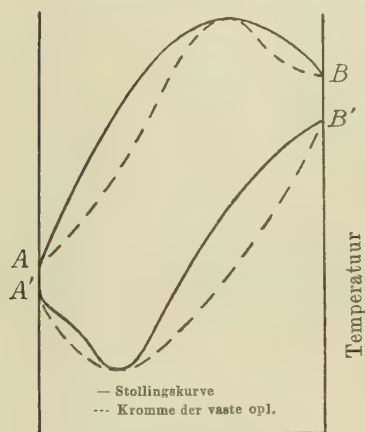


Fig. 15.

heid anders zijn. Bij zekere gemiddelde snelheden van afkoeling zal het volgende kunnen geschieden: Terwijl eerst weder de kristallisatie inzet met a_1 (Smelt S_1) verandert de smelt voortdurend in de richting S_2 zonder dat de omzetting in de vaste fase daarmede ook maar eenigszins gelijken tred houdt. Voortdurend zetten zich dan andere mengkristallen, tusschen a_1 en a_2 gelegen af. Nu zal echter het stoltraject zich verder gaan uitstrekken dan S_2 en b.v. tot S_3 kunnen genaderd zijn bij het einde der vastwording, terwijl zich tevens mengkristallen in grooter variatie van samenstelling (tusschen a_1 en a_3) hebben gevormd. Dit alles geschiedt weder eerst aan de buitenzijde van een gietstuk, en elk onderdeel van het proces iets later op verder naar het midden gelegen plaatsen. Bij eene contraheerende stolling is weer gemakkelijk te betoogen dat een vloeistofverschuiving naar buiten gericht zal voorkomen, die maakt dat het gehalte aan de buitenzijde iets hooger zal zijn, dan in het midden, aan datgene der twee bestanddeelen, dat het laagste smeltpunt bezit, en wel des te meer naarmate het traject $S_1 S_3$ grooter is. Hoeveel, is weder afhankelijk van den loop der stollingskromme ASB

(d. i. practisch het verschil in smeltpunt tusschen A en B) en van den al of niet grooten afstand van deze curve tot die der vaste oplossingen AaB . De laatste omstandigheden schijnen echter meesttijds wel van dien aard te zijn dat een eenigszins belangrijke



Samenstelling

Fig. 16.

de samenstelling der smelt ligt tusschen het maximum en B (of minimum en A').

graad van liquatie in gevallen als deze gewoonlijk niet zal worden aangetroffen. De mogelijkheid daarvan is echter niet uitgesloten.

d. Heeft de stollingskromme bij onderbroken reeks van mengkristallen der beide metalen een maximum (of minimum) als in Fig. 16, dan kan in de buitenlagen van het vaste metaal een iets grooter rijkdom verwacht worden aan metaal A dan in het centrum, wanneer de samenstelling der smelt ligt tusschen het maximum en A (of minimum en B'), daarentegen aan metaal B , wanneer

§ 5. Liquatie bij binaire legeringen in de praktijk.

Behalve de zilver-koperlegeringen zijn er een aantal andere binaire alliages, waaraan bepalingen omtrent de mate van ongelijkslachtingheid zijn verricht. Uit den aard der zaak spelen daarbij de meer kostbare metalen een groote rol. Bij gebrek aan leidend beginsel gaan echter deze bepalingen voor het meerendeel mank aan het euvel dat zij niet systematisch genoeg zijn opgezet, of het onderzoek niet volledig genoeg is geweest, om te kunnen zeggen dat men de beschouwde legeringen, wat hunne liquatie betreft, in voldoende mate kent. Al blijft er in dit opzicht bij verschillende legeringen, waaronder voor de techniek hoogst belangrijke (en juist hier is de liquatie een factor van zoo groot gewicht) veel te doen over, wat nu, naar ik vermeen, met meer succes dan te voren zal kunnen geschieden, toch acht ik het nuttig om samen te stellen welke resultaten reeds zijn bereikt en deze uitkomsten tevens, voor zoover dit mogelijk is, te vergelijken met de leidende begrippen, welke boven ontwikkeld werden. Het zal daarbij blijken dat voorzoover zekerheid bestaat in de uitkomsten van vroeger onderzoek, een voortdurend goede overeenstemming met de laatste aan het licht komt.

Achtereenvolgens zullen verschillende der onderzochte binaire legeringen worden besproken, zonder dat op volledigheid aanspraak wordt gemaakt.

Goud-koper. Het moge misschien eenige verwondering wekken, maar in de kennis van de al of niet volledige gelijkslachtheid dezer legeringen, van zoo buitengewoon groot gewicht voor den handel in dit kostbaar materiaal zijn nog duistere punten. Niet zoozeer heerscht onzekerheid omtrent de vraag of dergelijke liquaties als bij zilver-koper aangetroffen worden, hier mogelijk zijn; dit is stellig niet zoo en de liquatie goud-koper kan slechts van zeer lage orde zijn; anders had men niet tot op den huidigen dag, zelfs onder deskundigen die zich met onderzoek hebben beziggehouden, algemeen van meening kunnen zijn dat er geene liquatie quantitatief waarneembaar is. Dit zou goed overeenstemmen met een vorm van de smeltkrommen bestaande uit een vrijwel rechte horizontale lijn tusschen de smeltpunten van goud (1065°) en koper (1083°), een geval dat aanleiding ertoe moet geven, dat een smelt van willekeurige samenstelling zoo goed als geheel bij één temperatuur en gelijkslachtig, in den vorm van ternauwernood gevarieerde mengkristallen vast wordt.

Door recente onderzoeken is nu wel reden ontstaan om aan het een en het ander te twijfelen.

Van de oudere waarnemingen vermeld ik die van Levöl ¹⁾ die onvoldoende beschreven proeven mededeelt over een speciaal onderzoek naar ongelijkheid in goud-koperlegeringen van de gehalten (goud) 0.925, 0.903, 0.816², 0.756, 0.608 en 0.236⁸ (de uitvoering zal ook wel geleden hebben onder het feit dat de smeltingen zonder kooldek hebben plaats gehad). Liquatie kon hij niet ontdekken.

Evenmin wist Pélilot ²⁾ in legeringen van 0.900 goud een spoor daarvan aan te treffen, waaruit men heeft af te leiden dat de liquatie de grens van nauwkeurigheid zijner proeven niet zal overtreffen (deze was 0.2 duizendsten).

Weder geen ander resultaat bij verschillende herhalingen door Robert Austen, hier niet uitvoeriger te vermelden omdat zij later weder zijn opgenomen, maar waarin hij tot de slotsom komt dat, als er liquatie plaats heeft in goud-koper-baren deze dan beneden een waarde $\frac{1}{10000}$ moet blijven. Wel vond hij gehalteverschillen maar niet grooter dan dit cijfer.

¹⁾ Ann. Chim. Phys. [3] **39**, 8, (1853).

²⁾ Bull. Soc. d'Enc. de l'Ind. nat. [4] **4**, 481, (1889).

Het was eigenlijk wel duidelijk dat het noodig was, vóórdát met zekerheid zoo groote homogeniteit als bewezen werd aangenomen, dat eerst de hand werd geslagen aan eene verbetering van de nauwkeurigheid der goudproef. Naar mijne meening is zelfs door overigens zeer betrouwbare onderzoekers de (toch al groote) nauwkeurigheid dezer analytische methode overschat.

Intusschen is de zaak in een ander stadium gekomen nu door Roberts Austen en Rose ¹⁾ weder ten deele bevestigd werd, zij het ook met belangrijke wijzigingen, hetgeen Riche en Charpy ²⁾ gevonden hadden, dat nl. de stolfiguur goud-koper ³⁾ bestaat uit twee dalende kurven, elkaar snijdende in een eutektikum, hetwelk volgens laatstgenoemde onderzoekers zou liggen bij 940° en een gehalte van 55% goud. Zij maakten daarbij de opmerking dat hier vermoedelijk, te oordeelen naar het mikroskopisch onderzoek, een geval van onderlinge oplosbaarheid der vaste metalen in hooge mate zou voorkomen.

Intusschen gaven de waarnemingen van Roberts Austen en Rose een dergelijke stolfiguur, waarbij echter het eutektikum zou liggen bij 905°, bevattende niet 55 maar 82% goud. (Opmerkelijk: bijna 60 atoom % goud en 40 koper; eutektikum zilver-koper houdt eveneens 60 at. % zilver). Dit belangrijk punt van onzekerheid, niet alleen omtrent den vorm van de stolfiguur maar ook van hare beteekenis ten opzichte van het stollingsproces zelve ware allereerst tot klaarheid te brengen.

Omtrent de liquatie zelve in deze legeringen is evenzeer nadere studie nog noodig, ook na hetgeen door R. Austen en Rose in laatstvermeld onderzoek daaromtrent wordt medegedeeld. Terecht zagen zij in dat bij eene stolfiguur zooals nu was bepaald de mogelijkheid voor liquatie grooter was geworden. Zij hebben daarom opnieuw bepalingen gedaan aan de goudlegering van een gehalte ± 0.9166 en meenen, hoewel veel onregelmatigs zich voordeed, dat toch in 't algemeen eene neiging zou bestaan voor een iets lager goudgehalte (hoogstens enkele tienduizendste deelen) in het midden van hun materiaal dan aan de zijden. Is inderdaad de laatstbekende stolfiguur juist dan zal dit niet zoo kunnen zijn. Ook om andere reden is dit liquatie-onderzoek te herhalen en wel omdat door R. A. en R. niet is gebruik gemaakt van gegoten materiaal zonder meer maar

¹⁾ Proc. Roy. Soc. **67**, 105, (1901).

²⁾ Administration des Monnaies et Médailles. Rapport au Ministre des Finances, 1899, p. XXXVIII.

³⁾ Een klein deel dezer stolfiguur, en wel aan de koperzijde, nog bij Heycock en Neville: Phil. Trans. **189**, 46, (1897).

eerst nadat het in twee richtingen was uitgeplet, hetgeen de ongelijkslachtingheid stellig zal hebben gewijzigd. En bovendien dient de goud-cupellatie zelve, wat hare nauwkeurigheid betreft nog zoodanig gewijzigd te worden, dat bij dergelijk minutieus onderzoek grooter zekerheid wordt verkregen.

Goud-zilver. Eene merkbare liquatie is niet met zekerheid geconstateerd. Levöl¹⁾ reeds onderzocht met dit doel in ijzeren kogelvorm gegoten materiaal van de gehalten:

1° 645.1, 2° 480, 3° 312.5 en 4° 83.4 duiz. goud.

Van verschillende gedeelten der vaste legering analyses makende, vond hij de volgende grootste verschillen:

1° Midden	645.25.	Enkele plaatsen aan de buitenzijde	{	645.0
				.2 ⁵
				.0
				.2 ⁵
2° „	480.0	„ „ „ „ „ „	{	480.2 ⁵
				.7 ⁵
				.5
				.2 ⁵
3° „	312.25	„ „ „ „ „ „	{	312.5
				3.0
				2.2 ⁵
				2.2 ⁵
4° Overall	geheel	gelijk.		

De gevonden verschillen, in verband met de onzekerheid der gehaltebepaling, laten geen behoorlijke conclusie toe.

Tot afwezigheid van liquatie van grooter omvang dan de goudproef toelaat waar te nemen, besloot later Roberts Austen²⁾ bij de goud-zilverlegering van 984.7 duiz., waarvan in een kubusvormige ijzeren vorm een hoeveelheid van 45 KG. gegoten werd. Dat daarbij het gehalte-onderzoek verricht werd op een vertikale schijf uit het midden gesneden, maar eerst nadat deze door walsen dun uitgeplet was, heeft de kans op opsporing van eventueele ongelijkslachtingheid onnoodig verkleind. Nu viel de grootste afwijking onder 0.1 duiz. van het gehalte.

Het blijft echter nog steeds wenschelijk, evenals bij de goud-

¹⁾ Ann. Chim. Phys. [3] 39, 163, (1853).

²⁾ Introduction to the study of metallurgy, p. 82.

koperlegeeringen, inderdaad op afdoende wijze uit te maken in hoeverre of werkelijk de homogeniteit van deze legeeringen gaat. Niettegenstaande de verschillende onderzoekingen is dit nog niet met juistheid uitgemaakt. Ook hier dient verdere verbetering in

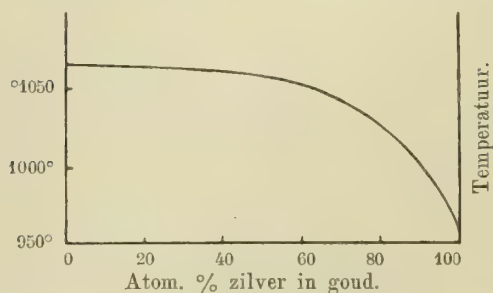


Fig. 17.

de standvastigheid der uitkomsten van de goudcupellatie vooraf te gaan.

In ieder geval blijkt het wel dat, als ook nog eenige liquatie gevonden wordt, zij uiterst gering zal zijn. Dit is in overeenstemming met de stoffiguur. De eerste bepaling daarvan is verricht door

Gautier ¹⁾ die een rechte lijn, verbindende de beide smeltpunten als stollingskromme vond. Deze waarnemingen blijken niet geheel juist te zijn geweest. Nieuwe bepalingen zijn weder aan Roberts Austen en Rose ²⁾ te danken, wier grafische voorstelling in bovenstaande Fig. 17 is overgenomen. Daar ook deze gedaante wijst op het in hoofdzaak voorkomen van isomorf kristalliseerende mengsels der beide metalen, en daar de smeltpunten der afzonderlijke metalen niet zoo heel veel verschillen, is een liquatie, die maximaal toch nog slechts een klein bedrag bereikt, geheel verklaarbaar.

Onderzoekingen omtrent de liquatie dezer goud-zilver- en eveneens die der goud-koperlegeeringen hadden voor de Engelsche munt om een eigenaardige reden hare nuttige zijde. Er is daar toch voorgeschreven dat de officieele goudgehalte-bepalingen, die overal elders rationeel worden betrokken op zuiver goud, moeten worden verricht in vergelijking met standaardmonsters van het bekende engelsche goudgehalte $916\frac{2}{3}$ duiz.; een voorschrift, dat eeuwen reeds bestaat (iets dergelijks als bij het zilver, gelijk boven reeds vermeld) en dat niet is kunnen worden afgeschaft, al worden daarnaast in de praktijk, de analyses toch ook op zuiver goud betrokken. Dat noodzakelijke standaardmetaal diende nu natuurlijk volmaakt homogeen en van het vastgestelde gehalte te zijn. Daartoe zijn vele pogingen aangewend die in absoluten zin echter hun doel niet konden bereiken, zoodat werd getracht de omstandigheden te vinden, waarbij zoo goed mogelijk het gewenschte was te verkrijgen. Voor goud is men ten slotte tot het besluit gekomen dat uit liquatie-oogpunt de legering met zilver nog boven die met koper de

¹⁾ Bull. Soc. d'Encour. Octobre 1896.

²⁾ Proc. Roy. Soc. 71, 161, (1903).

voorkeur verdient. Met grooter zekerheid zou men zich op dit terrein bewegen als beter opgezet systematisch liquatie-onderzoek dezer legeringen werd ter hand genomen.

Zilver-lood. Deze legeringen zijn uit het oogpunt der liquatie weer zeer belangrijk, omdat deze combinatie in de metallurgie zoo uiterst veelvuldig voorkomt. Men bedenke daartoe dat verreweg de grootste hoeveelheid van het zilver, hetwelk uit de ertsen wordt verkregen het stadium doormaakt, dat het met lood, in groote overmaat, is geallieerd. Wanneer men nu bij dit tussehenprodukt, het „werklood”, alleen maar de ruwe kennis van het zilveragehalte noodig had, zooals inderdaad voldoende is voor een groot deel der technische manipulaties, dan behoefde men zich om ongelijkslachtigheid niet te bekommeren. Maar geheel anders wordt dit wanneer zooals in

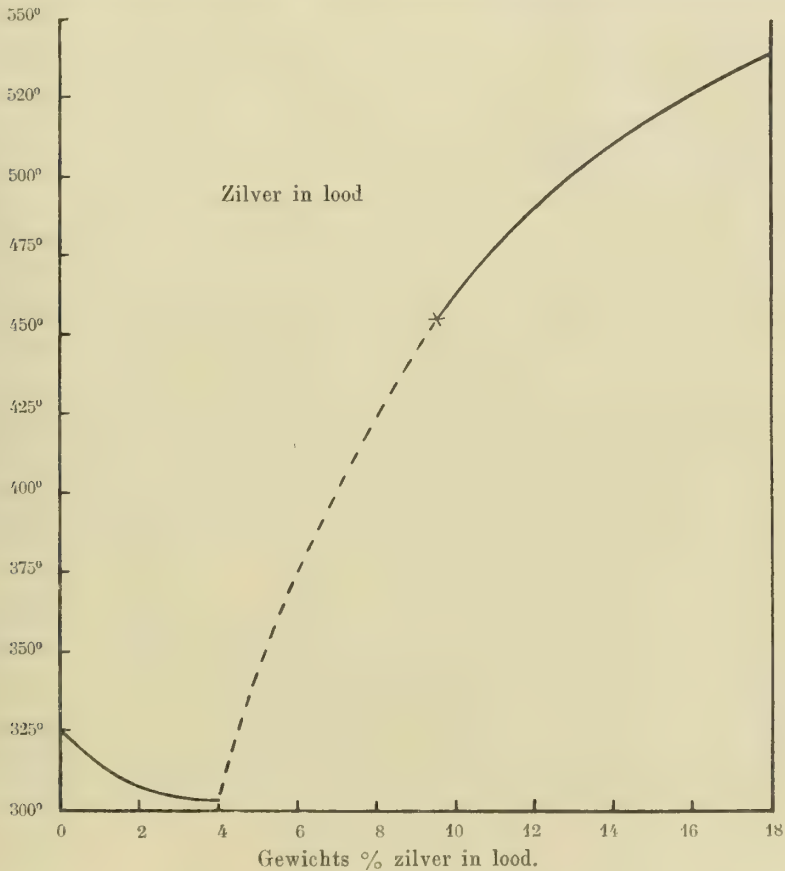


Fig. 17a.

toenemende mate het geval is, het werklood niet ter plaatse waar het bereid is, voor verdere verwerking op zilver wordt gebezigd. Dientengevolge is dit materiaal op niet geringe schaal een handelsprodukt

geworden, waarvoor nauwkeurige analyses van veel waarde zijn ¹⁾. Het is dan ook niet vreemd dat er speciaal over liquatie van zilverhoudend lood een zeer groot aantal onderzoekingen zijn gepubliceerd. Dat daarbij behalve de twee genoemde nog in geringere mate andere metalen voorkomen behoeft niet te verhinderen, en dit is hier inderdaad tenminste gedeeltelijk zoo, dat men de vraag welke liquatie er kwalitatief zal optreden reeds zonder proefnemingen kan afleiden uit de kennis van de stolfiguur zilver-lood.

Nu doet zich hier het voor onze bespreking minder aangename geval voor, dat van deze stolfiguur, die voor een groot deel bekend is uit de onderzoekingen van Heycock en Neville ²⁾ ongelukkigerwijze het deel liggende in de onmiddellijke nabijheid van het eutektikum slechts onvoldoende is kunnen worden onderzocht. Weliswaar heeft men (ook H. en N. hebben dat gedaan) het onbekende stuk hunner zilver-kromme dat juist door snijding met de loodkromme de plaats van het eutektikum moet aanwijzen, voorloopig ingevuld, maar vast staat dit nog niet. Ik heb in Fig. 17a, hierbij gevoegd, dat gedeelte der stollingskrommen overgenomen dat goed bepaald is. Op de plaats van het hiaat missen de bepalingen, met de opmerkelijke verklaring van H. en N. dat daar geen stolpunt kon worden gevonden [er werd niets van een stolling bemerkt, vóórdát later de eutekt. temperatuur (303°) bereikt was]. Dit wijst namelijk op een geval van onderkoeling, op het wegblijven van de kristallisatie van het zilver zoodra men in de buurt, rechts van het eut. punt komt. Dat zal vermoedelijk kunnen medehelpen tot het verklaren van enkele vragen bij de stolling van de legeringen die, wat hunne samenstelling betreft juist in dit gebied behooren. Het is nu echter nog niet gerechtvaardigd om uit Fig. 17a af te leiden dat het eut. punt bij 4% zilver zoude liggen. Het zal evengoed merkbaar hoger of lager gevonden kunnen worden.

Die twijfel maakt het echter onmogelijk om reeds op dit oogenblik te bepalen hoe liquatie zich moet vertoonen, wanneer tenminste de gehalten niet buiten dit onbekende gebied liggen. Zeker is het dat bij gehalten van zilverhoudende loodbaren hoger dan het eutektikum de buitenzijden voorzoover die, door aanraking met ijzeren gietvormen het eerst gestold zijn, zilverarmer zullen zijn dan het centrum en

¹⁾ Ook in de gewone analytische praktijk komt het zeer dikwijls voor (onderzoek van zilverertsen, lavuur, enz.) dat men te bepalen zilver verzamelt in een overmaat lood. Wanneer daarbij nu voor het afdrijven van dien regulus een deel daarvan wordt genomen, zooals wel gebeurt, dan is het op grond van liquatieverschijnselen niet onverschillig op welke wijze men zulk een deel neemt.

²⁾ Trans. Roy. Soc. **189**, 25. (1897).

de plaatsen die langer vloeibaar blijven. Het omgekeerde geldt voor lood met zeer weinig zilver. Daartusschen kan dan ook in de stolling een afwijkend beloop optreden wanneer er, zooals denkbaar schijnt, sprake is van onderkoeling aan de zijde van het zilver.

Nu zijn er vele waarnemingen over liquatie van zilverhoudend lood en uit een enkele blijkt ook reeds dat er onbekende factoren in het spel zijn, die in de praktijk verschillende uitkomsten kunnen veroorzaken.

Voor de hogere gehalten zijn wij voornamelijk beperkt tot onderzoekingen van Levol.¹⁾ Deze zijn verricht door gieten en afkoelen van verschillend samengestelde mengsels in een ijzeren kogel, op de wijze als reeds bij zilver-koperlegeringen is ter sprake gekomen. De uitkomsten vereenig ik in de volgende tabel, waarin niet alle bepalingen zijn opgenomen maar wel degene die het gehalte van het centrum en de buitenzijde van het metaal verschaffen. Deze waarden hebben slechts beteekenis bij onderlinge vergelijking, niet absoluut. Ook ware het gewenscht geweest dat in 't bijzonder de proeven op de buitenzijde talrijker waren genomen, om minder vrij spel te laten aan toevallige ongelijkmatigheden. Voor ons doel zijn zij echter reeds zeer voldoende.

Zilver- gehalte der smelt in duizendsten	Gehalte buitenzijde		Gemiddelde van 4 proeven buitenzijde <i>a</i>	Midden <i>b</i>	<i>b</i> — <i>a</i>
	Boven	Onder			
914.0	921.5	908.0	913.0	915.2 ⁵	2.2 ⁵
863.0	856.5	856.5	854.1	866.0	11.9
840.5	835.5	841.0	838.1	859.0	20.9
676.5	672.5	670.5	676.1	720.0	43.9
516.6	512.5	513.5	514.5	577.5	63.0
347.5	340.5	340.0	345.3	349.0	3.7
262.0	255.5	268.0	259.2	267.0	7.8
206.0	202.0	201.5	203.3	207.0	3.7
67.2 ⁵	63.2 ⁵	66.5	66.0	73.5	7.5
46.0	46.0	46.0	45.0	46.5	1.5
9.7 ⁵	10.0	10.0	9.9 ⁵	9.7 ⁵	—0.2

¹⁾ Ann. Chim. Phys. [3] 39, 11, (1853).

Afgezien van enkele onregelmatigheden, in hun geheel zeer goede uitkomsten dus, geheel in overeenstemming met hetgeen wij kunnen verwachten. Het gehalte der buitenzijde is bij alle proeven (behalve de laatste zijn alle rijker aan zilver dan het eutektikum) voortdurend iets geringer dan dat der smelt; bij de laatste proef waarbij wij stellig aan de andere zijde van het eutektikum zijn, is het omgekeerde het geval. Ook is alleen bij de laatste de waarde $b-a$ negatief, bij alle overige positief. Zeer duidelijk is verder de eerste toeneming van de liquatie bij vrij gelijke omstandigheden der proeven, van af zeer hoog zilver in de richting van grooter loodrijkdom en eene daling daarna weder, totdat zij bij het eutektikum door 0 heengaat.¹⁾

Zooals reeds werd gezegd zijn onderzoekingen over metaalverdeling in zilver-loodlegeringen van laag zilveragehalte (werklood) zeer talrijk. Het zou te ver voeren ze alle²⁾ aan te halen. Dit is ook onnoodig omdat de hier genoemde onderling geheel overeenstemmen wat betreft de wijze waarop het zilveragehalte in ééne richting toegenomen, in de andere afgenomen is. En tevens voldoen zij weder geheel aan de eischen welke uit de stolfiguur werden afgeleid. Slechts de proeven van Rath mogen als voorbeeld vermelding vinden. Deze goot lood met een gemiddeld zilveragehalte van $\pm 0.5\%$ in een van boven open ijzeren vorm. De metaalblokken werden na bekoeling vertikaal over de breedte op 4 plaatsen, even ver van elkaar gelegen, doorgezaagd. Daarna werd op elk snijvlak systematisch een groot aantal proeven verricht, wier uitkomsten opgenomen zijn in de afbeeldingen der snijvlakken in Fig. 18, 19, 20 en 21. De bovenste cijfers stellen het zilveragehalte voor in ounces (31.1 gram) per ton; de onderste cijfers geven de hoeveelheden goud, tevens aanwezig, aan, die hier buiten beschou-

¹⁾ Levul beschrijft nog een proefneming, die als een voorbeeld eener sterk uitgesproken „zwaartekrachtliquatie” kan dienen. Hij hield eenigen tijd in een U-buis een legering van lood met 6.5 % zilver gesmolten. Na zeer langzame stolling analyseerde hij de legering op verschillende hoogte. Daar nu bij dit gehalte eerst zilver en daarna eutektikum moet kristalliseeren en het eerste soortelijk lichter is dan de smelt, zal het trachten naar de bovenlagen te stijgen. Er werd gevonden, in overeenstemming hiermede, als samenstelling boven in het eene been 10.2 en 7.8%, in het andere 6.9 en 6.3%, terwijl het beneden in de U-buis was gedaald tot 2.6%.

²⁾ Hofmann. Metallurgy of Lead 244 (1893).

Piquet. Zie Roswag. Désargement du plomb. 127 (1884).

Kempf en Nenninger. Eng. and Min. Journal 34, 6 (1882).

Torrey en Eaton. Eng. and Min. Journal 42, 453 (1886).

Raht. Mineral Industry, 3, 414 (1894).

Neumann. Chem. Zeit. 21, 1024 (1897), geeft een overzicht.

Asbeck. Chem. Zeit. 29, 78 (1905).

wing blijven, hoewel zij geheel analoge uitkomsten geven als het zilver.

Daar het zilveragehalte niet weinig geringer is dan dat van het eutektikum moet op de koudere plaatsen eerst lood kristalliseeren en daar ter plaatse door aanvoer van meer zilverhoudende

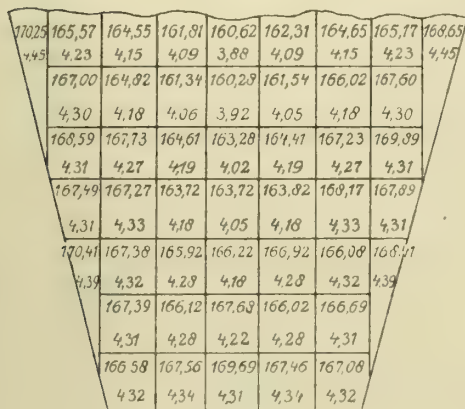


Fig. 18.

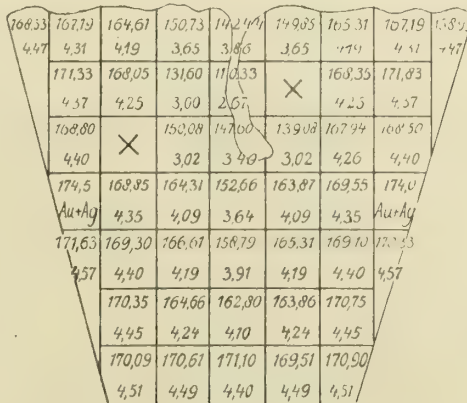


Fig. 19.

smelt het zilveragehalte boven het normale stijgen. Lager wordt het daarentegen op de plaatsen die het langst vloeibaar zijn gebleven; het sterkst zal het dus verminderd zijn in de nabijheid van het in Fig. 19 ook zeer duidelijke zuig gat.

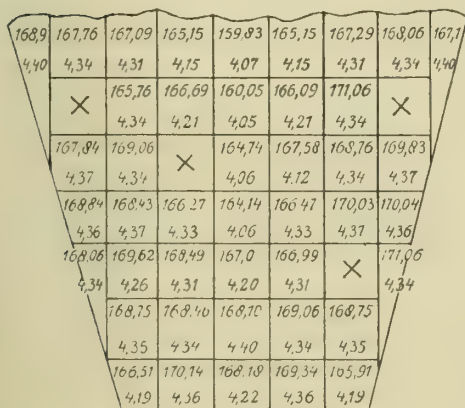


Fig. 20.

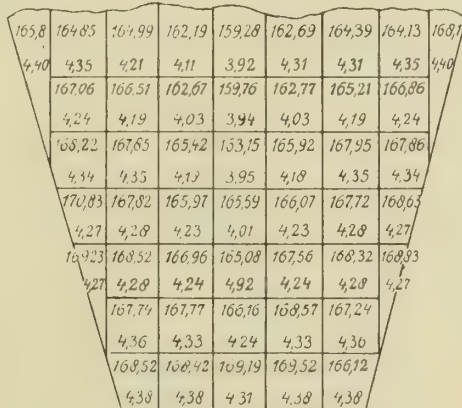


Fig. 21.

Deze proeven laten, wat de uitkomsten betreft, niets te wenschen over.

In tegenstelling nu met de zeer gevarieerde waarnemingen van zoo talrijke onderzoekers, welke zich geheel aansluiten aan de nu bekende oorzaken voor de eigenaardige verdeling van zilver in

lood, staat eenigszins als uitzondering, eene mededeeling van Rosenlecher ¹⁾, die echter bij nadere beschouwing veel van haar waarde verliest. R. onderzocht nl. drie blokken werklood van Mexikaanschen oorsprong en vond gedeeltelijk een duidelijk grooter zilveragehalte aan de oppervlakte, vooral in het midden, dan beneden en aan de zijden.

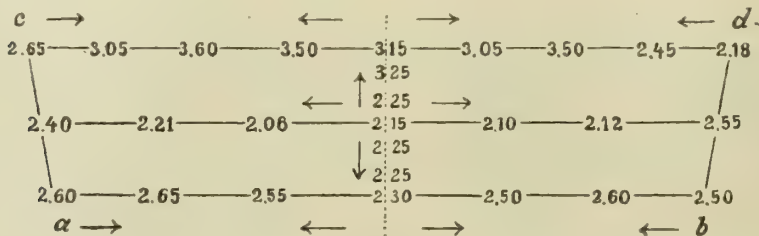


Fig. 22.

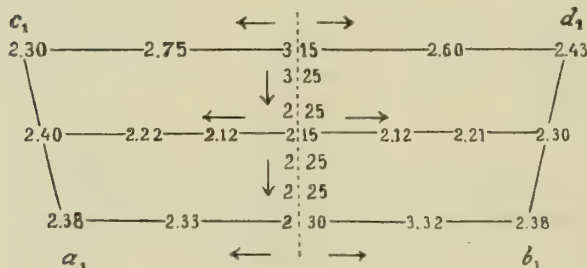


Fig. 23.

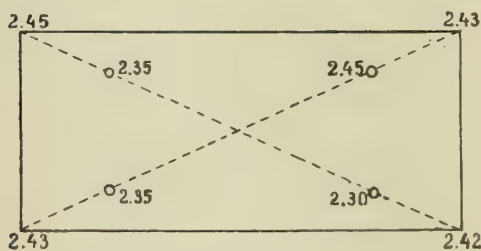


Fig. 24.

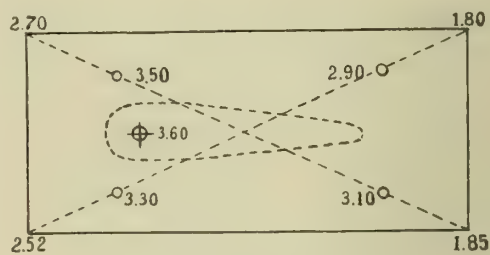


Fig. 25.

Fig. 22 geeft een vertikale doorsnede in de lengterichting, Fig. 23 in de breedterichting, terwijl Fig. 24 en 25 grond- en bovenvlak van baar I voorstellen. De ingeplaatste cijfers geven het zilveragehalte aan, vermoedelijk in procenten; dit wordt echter niet aangegeven. Van baar II stellen Fig. 26 en 27 de beide vertikale doorsneden voor, gelijk Fig. 28 en 29 van baar III. Deze cijfers schijnen inderdaad af te wijken van hetgeen te verwachten was. Maar waar dit onderzoek het eenige van dien aard is, acht ik het niet

¹⁾ Berg- und Hüttenm. Zeitung. 53, 331 (1894).

onnut op verschillende leemten te wijzen. Vooreerst is de regelmaat van baar I minder groot in II, waar ook de onderlinge verschillen kleiner zijn en het gehalte boven slechts zeer weinig hoger is dan onder. Bij baar III is dit alles nog weer sterker. Maar daarenboven

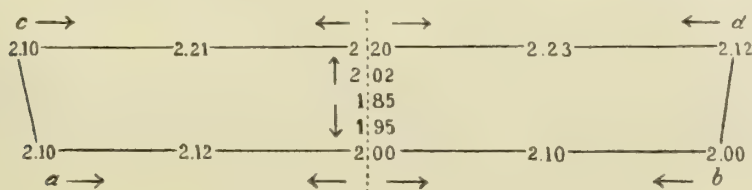


Fig. 26.

zij opgemerkt dat van den oorsprong van deze baren niets bekend is, en dus ook niet hoe de gieting en de afkoeling hebben plaats gehad. Dan wijs ik er op dat deze schijnbaar abnormale uitkomsten weder geheel regel-

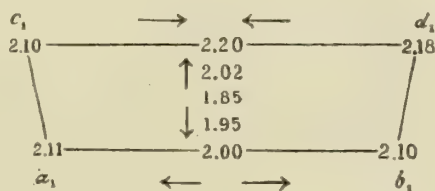


Fig. 27.

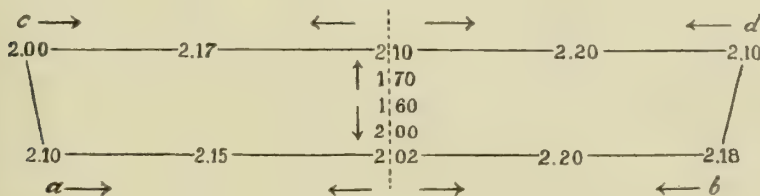


Fig. 28.

matig worden, wanneer men mocht aannemen dat de blokken bij hooge temperatuur (b.v. in warme gietvormen) zijn gestold, zoodat de stolling zeer langzaam heeft plaats gehad. Want dan is er gelegenheid geweest voor

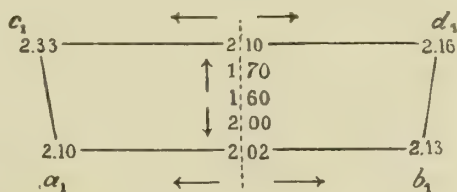


Fig. 29.

eene ontmenging in de richting van de zwaartekracht, die resultaten moet opleveren zooals zij hier worden aangegeven. Evenzeer zou dit zoo zijn ingeval zeer plotselinge sterke afkoeling aan de bovenzijde had plaats gehad, b.v. door opsprekelen van water. Waar derhalve verschillende zoo voornamelijk bijzonderheden omtrent dit materiaal geheel onbekend zijn, is er geen enkele reden om in deze cijfers een tegenspraak te zien met wat theoretisch en praktisch in alle andere gevallen is aan 't licht gebracht. Temeer

klemt dit nog, daar de mogelijkheid bestaat dat het gehalte van deze baren aan de andere zijde van het eutektikum ligt, wat niet goed is te beoordeelen, omdat de plaats van dit laatste nog onzeker is. En bovendien zal eindelijk aanwezigheid van andere verontreinigende stoffen in meer dan zeer geringe hoeveelheid eventueel een afwijking kunnen verklaren.

Het is gewenscht dat aan de bepaling van het eutektische punt zilver-lood een nieuw onderzoek wordt gewijd, en dat vooral, aan de liquatie-verschijnselen *bij zuivere metaalmengsels* in de buurt van dat punt de noodige aandacht wordt geschonken.

Zilver-bismuth. Gowland en Koga¹⁾ werden door de opvallende brosheid, welke het zilver dat van een deel der Japansche bergwerken afkomstig was en die aan bijmenging van bismuth werd toegeschreven, tot een onderzoek geleid naar de verdeeling van dit laatste metaal in zijne alliages met zilver. Slechts ééne legering, van 984.37 duiz. zilver en 14.80 duiz. bismuth werd gebezigd. Onder kool gesmolten en homogeen gemaakt, werd de legering in een van boven open ijzeren vorm gegoten. Aan het gietstuk (± 32 KG.), dat het langst boven en in het midden vloeibaar gebleven was, werden twee dunne platen, *ABCF* en *EDB* (fig. 30) ontnomen en deze op talrijke plaatsen geanalyseerd, waarvan de uitkomsten in bijgaande Fig. 31 en 32 zijn opgenomen. Bovendien werden de verschillende hoekpunten van de baar afzonderlijk onderzocht.

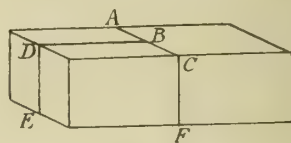


Fig. 30.

A	B			C	
	4.6	7.3	4.6		
	6.5	6.3	6.3		
		6.6			
	5.3	6.0	6.5	6.0	4.9
		6.6			
		6.7	5.9	6.7	
	5.3	4.9	5.3	F	

Fig. 31.

D	B			E
	5.0	7.8	7.8	
	5.5	7.1	6.9	
	5.3	6.5	6.6	
	5.3	5.8	5.8	
	5.3	5.5	4.9	5.0

Fig. 32.

Gehalte der hoeken:
4.9; 4.7; 4.9; 5.1 (boven)
5.1; 4.6; 4.3; 5.1 (onder)

Bij de gehaltcijfers in fig. 31 en 32 zijn de beide eerste cijfers 98 weggelaten.

¹⁾ Journ. Chem. Soc. 51. 410 (1887).

Het blijkt dat op de plaatsen van eerste stolling (grenzende aan de ijzeren vormwanden) het zilveragehalte het laagst, naar het midden en vooral naar de bovenzijde dit gehalte hooger werd gevonden. Het is jammer dat de stolfiguur van zilver-bismuth nog maar voor een gedeelte, en wel aan den zilverkant, bekend is ¹⁾, waaruit blijkt dat bijvoeging van bismuth een verlaging van het zilvervriespunt veroorzaakt, die wat haar waarde betreft een sterke aanwijzing geeft dat bij verder onderzoek deze stolfiguur er eene zal zijn met twee takken samenkomende in een eutektikum. In ieder geval loopt het bekende stuk der smeltlijn van zilver met bismuthbijvoeging onder sterke daling ver voorbij het hier op liquatie onderzochte gehalte. Zij moet ten slotte een eutektisch punt bereiken van zilver en bismuth of van zilver en eene verbinding. De daaruit af te leiden loop der liquatie blijft van dezelfde natuur; de eerste stolling geeft zilver (of wellicht, maar niet waarschijnlijk, een vaste oplossing met zeer weinig Bi) en bij vastwording van de daarbuiten gelegen smelt zal een vloeistof toestroomen waarin relatief meer Bi voorkomt. Dit stemt met de resultaten van Gowland en Koga overeen.

Het verdient opmerking dat hieruit tevens zal volgen dat de stolling van een tweede komponent uit de smelt, hetzij eutektikum, hetzij een verbinding, onder contractie geschiedt. Juist zou anders bij combinaties waarbij bismuth optreedt, een tegengestelde werking kunnen worden verwacht bij zekere concentraties van het laatste metaal, dat voor zich onder uitzetting stolt.

Over legeringen van goud met een aantal andere metalen, inzonderheid van de platinagroep, zijn door E. Matthey een aantal waarnemingen gedaan, om nadere kennis te verzamelen van de wijze waarop verdeeling der componenten in de vaste legeringen voorkomt. Zijne onderzoekingen ²⁾ zijn direct ontleend aan wenschen die zich in de praktijk der goudscheiding voordeden. Zoo is een belangrijke vraag, die naar de deugdelijke wijze van analyse van platinahoudende goudbaren, welke veelvuldig voorkomen doordat bij de gewoonlijk nog toegepaste fineering van goud met zwavelzuur, na samensmelting met zilver, het platina grootendeels bij het goud blijft. Wanneer, zooals gebruikelijk, het gehalte-onderzoek op *Pt*-houdende goudbaren geschiedt door de hoekpunten te analyseeren, kan men tot vreemde resultaten komen. Zoo werd gevonden bij 6 baren (wegende 14—22 KG. elk), nadat eerst het *Au* en *Pt*-gehalte van kapsels der

¹⁾ Heycock en Neville, Phil. Trans. **189** (1897).

²⁾ Proc. Roy. Soc. **47** 180 (1890).

buitenzijde (a en b) was bepaald en daarna het *Au*-gehalte in de geheele baar (c) (in duizendsten):

<i>Pt</i> -gehalte	<i>Au</i> -gehalte	<i>Au</i> -gehalte	
a	b	c	$b-c$
111	825	812	13
120	660	630	30
120	800	780	20
45	850	845	5
86	842	830	12
110	830	821	9

Het oorspronkelijk genomen proefmetaal had dus zeer merkbaar verkeerde waarden gegeven (opgemerkt zij dat nog andere bestanddeelen, zooals zilver voorkwamen).

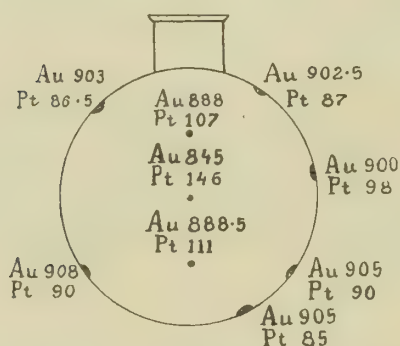


Fig. 33.

Behalve synthetische proeven over liquatie van goud en platina in legeringen, waarin bovendien nog in hoofdzaak zilver voorkwam en die dus niet tot de binaire zijn te rekenen, deed Matthey nog waarnemingen aan legeringen uit zuiver goud en platina samengesteld ¹⁾. Deze en volgende proeven bestonden steeds in het gieten van goedgeroerde

smelten in een ronden vorm (7.5 cM. diameter), doorzagen van de legering in twee gelijke helften, en analyse van een aantal gedeelten van het snijvlak. Drie verschillende *Au-Pt*-legeringen werden onderzocht, met resp. 100, 700 en 900 duizendsten platina. De eerste legering werd na de eerste proef omgesmolten, en daarna nog tweemaal onder telkens sterkere verhitting. De resultaten der analyses zijn aangegeven in de figuren 33, 34, 35 en 36:

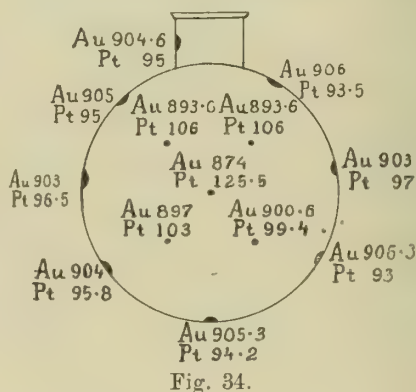


Fig. 34.

¹⁾ Phil. Trans. A 183 629 (1893).

die der legeringen met 750 en 900 d. platina in de figuren 37 en 38. Bij platinagehalten van 100 en 900 duiz. is het centrum duidelijk armer aan goud dan de buitenzijde; vooral is dit zeer sterk bij de eerste legering. Bij die met 0.750 platina is daarentegen weinig van liquatie te merken.

Eene voldoende verklaring hiervan kan niet gegeven worden omdat de stolfiguur goud-platina onbekend is. Omgekeerd echter

kan men het wagen eenige voorspelling omtrent de laatste op grond dezer liquatie-proeven te doen. Daar de liquatie bij 0.100 platina zeer belangrijk is, is niet aan te nemen een ononderbroken reeks mengkristallen tusschen goud en platina. Evénmin ligt de legering met 0.100 *Pt* dicht bij een eutektikum, of bij de samenstelling eener verbinding. Daarentegen kan de samenstelling 0.900 *Pt* wel in de nabijheid van een eutektikum liggen, terwijl een verhouding 0.750 *Pt* tegen 250 *Au* er eene is die, wanneer men voldoende op deze

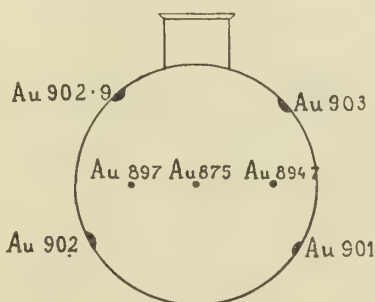


Fig. 36.

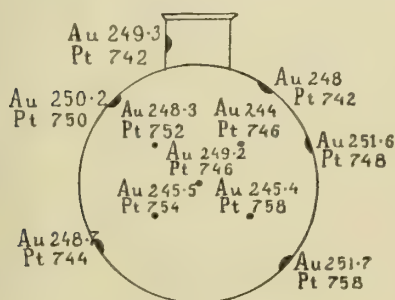


Fig. 37.

het platina dan bij die van het goud ligt. Het ware te wenschen dat dit experimenteel werd onderzocht.

In dezelfde verhandeling deelt Matthey verder nog analoge onderzoekingen mede omtrent binaire legeringen van goud

en andere platina-metalen, van welke evenmin iets bekend is omtrent de stoltemperaturen, zoodat de liquatie niet daarmee in verband kan worden gebracht. Ik deel de uitkomsten kort mede:

Goud-palladium. 900 *Au* en 100 *Pd*.
Gewicht circa 5 KG. Na de eerste gieting nog herhaald met verhitting tot hooger temperatuur vóór het gieten (Fig. 39):

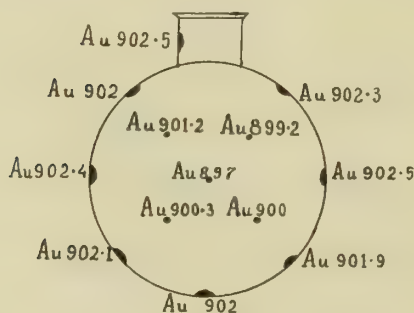


Fig. 39.

Platina-palladium. 850 *Pd* en 150 *Pt*. Gewicht circa 4 KG. (Fig. 40.)

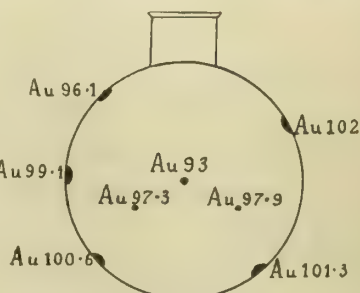


Fig. 38.

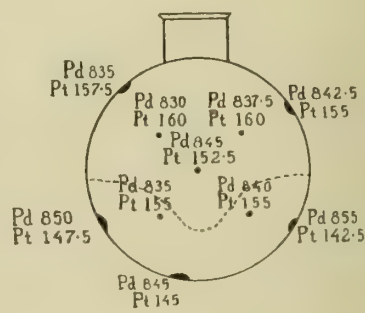


Fig. 40.

In de figuur is een scheiding getrokken tusschen proeven uit het bovenste en uit het benedenste gedeelte van de legering, om te doen uitkomen dat hier in het spel gekomen is wat boven „zwaartekrachts-liquatie” werd geheeten.

Idem. 150 *Pd* en 850 *Pt*. Gewicht circa 5 KG. (Fig. 41.)

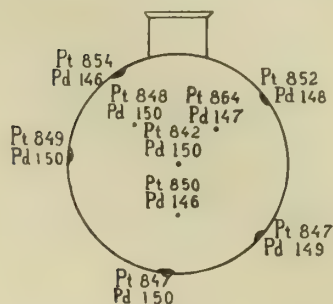


Fig. 41.

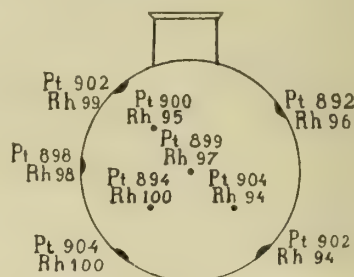


Fig. 42.

Platina-Rhodium 900 *Pt* en 100 *Rh*. Gewicht circa $1\frac{1}{2}$ KG. (Fig. 42.)

Het is wel te betreuren dat uit deze resultaten niet meer met zekerheid omtrent de liquatie dezer legeringen is af te leiden; zij hadden daartoe met grooter volledigheid moeten zijn verricht, bij een grooter aantal proeven en eene gewijzigde afkoelingsmethode. Dit treft te meer omdat slechts bij uitzondering proefnemingen van dezen aard met zulk materiaal op zoo groote schaal kunnen worden uitgevoerd.

Goud-Aluminium. Deze legeringen zijn van de vorige in zooverre onderscheiden dat hier de volledige stolfiguur wel bekend is. De proeven van Matthey waren de volgende:

I. 100 *Au* en 900 *Al*. Gewicht circa 1 KG. Samenstelling in at. $\%$ ± 1.5 *Au*, 98.5 *Al*. (Fig. 43).

II. 900 *Au* en 100 *Al*. Gewicht circa $4\frac{1}{2}$ KG. Samenstelling in at. $\%$ ± 55 *Au*, 45 *Al*. (Fig. 44).

III. 786 *Au* en 214 *Al*. Gewicht(?) Samenstelling ongeveer als de verbinding *Au Al*₂ (Fig. 45).

Nadat elk der gegoten en bekoelde bollen vertikaal was doorgezaagd werden de zijvlakken beschreven als volgt: bij I wit, smeedbaar, benedengedeelte purpergespikkeld.

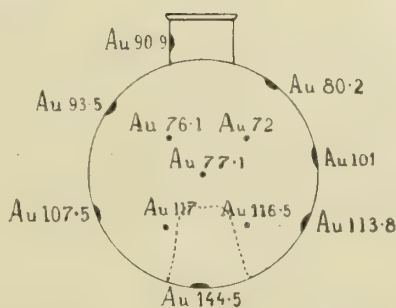


Fig. 43.

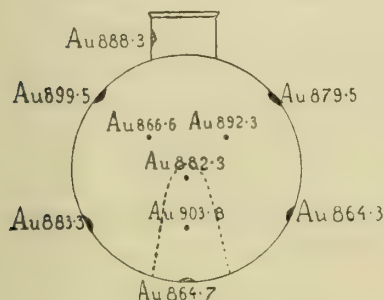


Fig. 44.

II. Wit, bros, de geheele massa purper-gevekt; van de onderzijde tot aan het midden omhoog een pyramide-vormige massa van witte kristallisatie met een van 't overige afwijkend uiterlijk.

III. Geheel purper-kleurig en bros.

Trachten wij de liquatie-uitkomsten nog in verbinding te brengen met de stolfiguur gegeven door Heycock en Neville ¹⁾. Uit deze laatste (Fig. 46) volgt voor geval I (1.5 at. $\%$ *Au*) dat de stolling bij 675° begon onder afscheiding van purper-gekleurd

¹⁾ Phil. Trans. 194 201 (1900).

$Au Al_2$ tot aan 647° , waar eutektikum met Al optrad. Daar de stolling betrekkelijk langzaam plaats vond, heeft de zware verbinding gelegenheid gehad zich naar beneden te concentreeren. In een uiterst gunstig geval zou boven slechts legering van de samenstelling van genoemd eutektikum overblijven. Dit laatste bevat $75 \frac{0}{100} Au$ en $925 \frac{0}{100} Al$. Inderdaad zijn in het centrum en een weinig daarboven goudgehalten van 72, 76 en $77 \frac{0}{100}$ gevonden.

Voor II, legering van 55 at. $\frac{0}{100} Au$ en 45 Al , zal tusschen 650° en 700° afscheiding van $Au Al_2$ beginnen op den linkertak HG van de kurve dier verbinding. Daarvan zal zich slechts weinig afscheiden, vervolgens een witte verbinding, waarschijnlijk $Au Al$ gevormd worden, tot eindelijk het eutektikum hiervan met de verbinding $Au_2 Al$ wordt bereikt. In werkelijkheid zal de eerste (purperen) verbinding welhaast nimmer gelegenheid hebben, zooals de theorie ver-

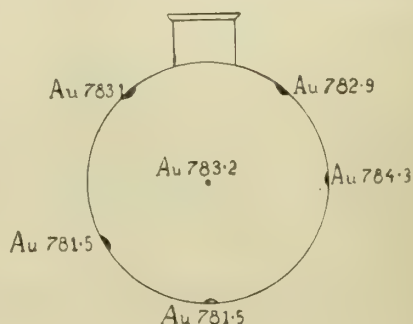


Fig. 45.

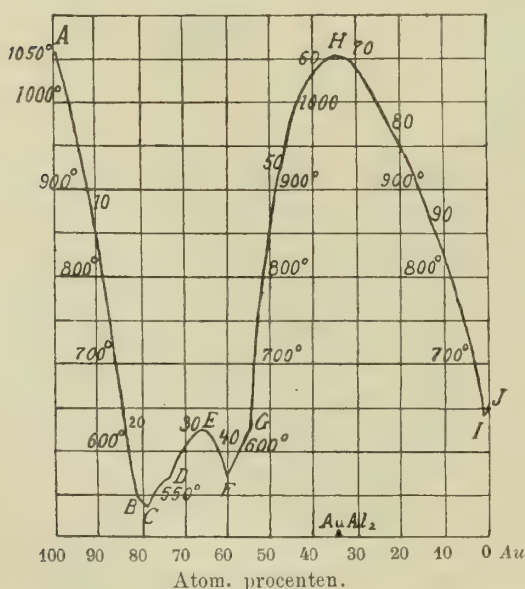


Fig. 46.

langt, zich totaal om te zetten, en dus nog aanwezig zijn, zooals ook hier 't geval was. Die onvolledigheid echter in de omzettingen, die behoorden te geschieden, veroorzaken licht verschillende onregelmatigheden; zoo ook hier. De witte kristal massa tusschen bodem en centrum is te beschouwen als de verbinding $Au_2 Al$ of haar eutektikum met $Au Al$.

Wanneer deze proeven met grooter variatie in afkoelingsnelheid herhaald werden, dan zal naar alle waar-

schijnlijkheid fraaie overeenstemming tusschen de stolfiguur en de liquatie-bepalingen verkregen worden.

III is een van de weinige gevallen waarin liquatie van eene legering is onderzocht, welke juist de samenstelling heeft van eene werkelijk bestaande verbinding der beide componenten. Theoretisch moet vol-

ledige gelijkslachtingheid optreden. De proef bewees, dat hiermede de praktijk zeer goed in overeenstemming is, want de gehalte-verschillen zijn slechts zeer gering.

Goud en lood. Ongelijkslachtingheid van legeringen dezer twee metalen (evenals van de volgende) is een factor van eenige betekenis voor de bepaling van de handelswaarde van goud, afkomstig uit Zuid-Afrika. Tengevolge van de behandelingen waaraan dit goud bij het cyanide-proces onderworpen wordt, kan het af en toe niet onbelangrijke hoeveelheden lood (en zink) bevatten. Daardoor zijn meer dan eens zeer ongewenschte resultaten verkregen bij de analytische bepaling van gedeelten van goudbaren, waarvan Matthey ¹⁾ weder voorbeelden mededeelt.

Genoemde onderzoeker voerde daarom onderzoeken uit aan synthetische legeringen, die dergelijke bijkomende metalen in afwisselende hoeveelheden bevatten, waarvan ik hier slechts diegene mededeel welke op de meer eenvoudige legeringen van twee metalen betrekking hebben. Hij gebruikte daarbij weder de methode, ook in andere proeven door hem gebezigd en bovenvermeld.

Van goud-lood zonder andere metalen is slechts ééne bepaling gedaan. Gewicht der legering 2 KG. Samenstelling 700 goud en 300 lood. Uitkomsten geeft Fig. 47.

Het centrum is duidelijk goudrijker dan de omtrek. De smeltfiguur is nog zeer onvolledig bekend. Slechts hebben Heycock en Neville ²⁾ bepaald dat bij toevoeging van goud aan lood (tot 4 at. $\frac{0}{100}$ goud) het stolpunt van lood daalt. Er is geen twijfel of

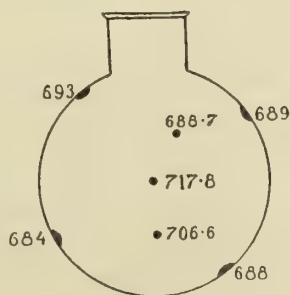


Fig. 47.

die daling gaat tot een eutektisch punt, dat nog iets verder naar den goudkant kan liggen. Maar dit is, hoe weinig ook, reeds voldoende om de gevonden liquatie met de stolfiguur te doen overeenstemmen. Bij de proef met een legering met 70 $\frac{0}{100}$ goud moet zich hetzij goud, hetzij eene goudrijke vaste oplossing of eene verbinding het eerst afzetten; het betrekkelijk meer loodrijke eutektikum zal zich ten slotte naar den omtrek bewegen en daar het goudgehalte verlagen, in het midden verhoogen, onder dit eene voorbehoud dat bij afkoeling van de gesmolten legering

¹⁾ Proc. Roy. Soc. **60** 21, (1897).

²⁾ Journ. Chem. Soc. **61** 909, (1892).

niet een gedeelte der stolfiguur wordt getroffen, dat in de richting naar het goud daalt. Uit de medegedeelde liquatie is omgekeerd af te leiden, dat dit niet het geval zal zijn geweest.

Goud en zink. Voor deze proeven zijn drieërlei legeringen gebruikt.

1^e 95 0/0 goud en 5 0/0 zink. Gewicht 3.4 KG. (Fig. 48.)

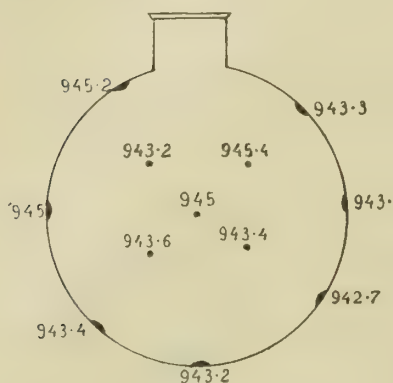


Fig. 48.

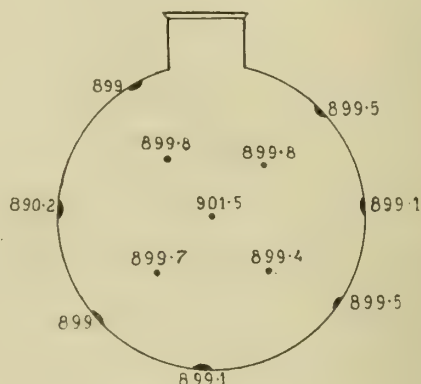


Fig. 49.

2^e 90 0/0 goud en 10 0/0 zink. Gewicht 4.2 KG. (Fig. 49.)

3^e 85 0/0 goud en 15 0/0 zink. Gewicht (?) (Fig. 50.)

Van de stolfiguur is evenals bij de vorige legering nog slechts weinig bekend. Tot 6 at. 0/0 goud in zink is zij onderzocht door Heycock en Neville ¹⁾ met het resultaat dat het stolpunt van zink door bijvoeging van goud stijgen gaat, zonder dat van eene daling in het eerste oogenblik iets te bemerken is geweest. Het gedeelte van de stollingskrommen, waarop het hier aankomt kent men niet. Evenwel,

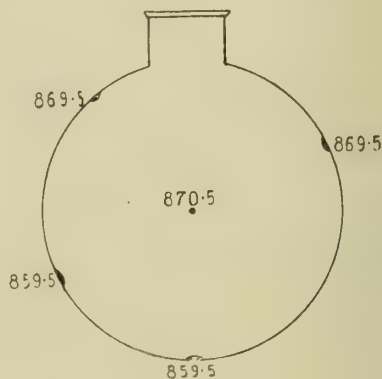


Fig. 50.

uit deze liquatie-bepalingen mag men nu weder het besluit trekken dat de punten beantwoordende aan de samenstelling 5, 10 en 15 0/0 zink niet liggen op gedeelte van de stollingskrommen, welke een dalend verloop in de richting van 100 0/0 goud hebben.

Deze liquatie-proeven aan goudlegeringen werden door Matthey

¹⁾ Journ. Chem. Soc. 71 419, (1897).

mitgebreid over andere combinaties met de bijgemengde metalen zink en lood, waarbij scheidingen in twee lagen voorkwamen, welke niet tot dit onderwerp behooren.

Het voorafgaande moge worden beschouwd als eene poging om het verschijnsel der liquatie bij binaire legeringen door het aanbrengen van een verband met andere bijzonderheden dier alliages toe te lichten. Ten slotte vinde hier nog de opmerking een plaats dat dezelfde liquatie in hooge mate een praktische handelwijze beheerscht, die bij de legeringen veelvuldig te pas komt nl. het nemen van proefmetaal voor de analyse van grootere hoeveelheden. Daarin kunnen juist bij het optreden van liquatie zeer belangrijke fouten gemaakt worden, hetzij door onkunde, hetzij door de onmogelijkheid om onder bestaande omstandigheden aan de gevolgen van deze dan zoo hoogst ongewenschte eigenaardigheid te ontkomen. Ratio-
neele behandeling der vragen, die zich hierbij voordoen, is slechts mogelijk na studie der liquatie in elk dier gevallen.

Generale Contrôle van 's Rijks Munt.

Utrecht, Mei 1905.

(9 October 1905).

Experimental-Untersuchung über die Möglichkeit einer Doppeltelephonie mittels unterbrochener Klänge,

VON

J. W. GILTAY.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

DEEL IX. N^o. 3.

MIT 4 TAFELN.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Juli 1906.

Experimental-Untersuchung über die Möglichkeit einer Doppeltelephonie mittels unterbrochener Klänge,

VON

J. W. GILTAY.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

DEEL IX. N^o. 3.

MIT 4 TAFELN.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1906.

EXPERIMENTAL-UNTERSUCHUNG

über die Möglichkeit einer Doppeltelephonie mittels unterbrochener Klänge.

Wenn man eine Selenzelle, welche sich mit einer Batterie und einem Telephon in einer Leitung befindet, einer intermittirenden Beleuchtung aussetzt, so wird man, falls der Wechsel von Hell und Dunkel schnell genug vor sich geht, im Telephon einen Ton hören. Ein Apparat welcher dies Experiment bequem auszuführen gestattet, ist in Fig. 1 abgebildet. In einem eisernen Gehäuse dreht sich eine mit schwarzem Papier derart beklebte Glasscheibe *s*, dass 6 Fensterchen ausgespart bleiben. Die Selenzelle wird, mit der Selenoberfläche nach innen, in das Loch *ab* des Gehäuses geschoben und mit 2 Federn *ff* befestigt. Wird jetzt an der anderen Seite des Gehäuses, an welcher sich in der Wand ebenfalls ein mit *ab* korrespondirendes Loch befindet, eine Lichtquelle aufgestellt, und wird die Glasscheibe gedreht, so ist die Zelle einer intermittirenden Beleuchtung ausgesetzt.

Beleuchtet man eine mit Batterie und Telephon verbundene Selenzelle mit einer vibrirenden Acetylenflamme, so wird man im Telephon mit den Schwingungen der Flamme übereinstimmende Klänge wahrnehmen. Man kann dazu den Apparat Fig. 2 verwenden. *a* ist die Selenzelle, *b* eine manometrische Kapsel, *c* der Schalltrichter mit Gummirohr (das auf *b* geschoben wird) und *d* der Acetylenentwickler. Wird jetzt leise in den Trichter *c* hinein gesprochen, so wird im Telephon Alles wiedergegeben.

Als ich mich mit obengenannten Versuchen beschäftigte, kam mir der Gedanke: was wird man hören wenn man die Einrichtungen von Fig. 1 und Fig. 2 *zugleichzeitig* gebraucht? Also wenn man die *vibrirende* Flamme vor der Oeffnung des Drehapparates Fig. 1 aufstellt?

Die Frage, die ich mir dabei stellte, war also eigentlich: was wird man hören wenn man einen konstanten Ton periodisch unterbricht? Ich dachte mir, eben so wie man durch eine sich drehende durchlöchernte Scheibe *sehen* kann, eben so wird man auch durch eine solche Scheibe *hören* können.

Aus einem kombinierten Versuch mit der vibrirenden Flamme und der sich drehenden Scheibe kann man keine exakten Resultate erwarten, weil neben der durch die Vibration der Flamme erzeugten Tönen auch der konstante Ton wird wahrgenommen werden, der durch die Drehung der Scheibe entsteht.

Dennoch waren die Resultate dieses Experiments nicht gänzlich unbefriedigend. Bei ungefähr 200 Unterbrechungen pro Sekunde wurden einige Laute wahrgenommen, als die ersten Zeilen unserer Nationalhymne in die manometrische Kapsel hineingesprochen wurden. Die Wörter wurden dabei im Telephon zwar erkannt; ich muss aber dazu bemerken dass ich sie nicht würde verstanden haben wenn ich nicht gewusst hätte was dort gesprochen wurde. Die Vokale hatten ihren Charakter sehr geändert, was vielleicht durch den Nebenton der rotierenden Scheibe verursacht wurde. Singen vor dem Mikrophon ergab eine äusserst merkwürdige Musik, es waren keine falschen Töne, die man im Telephon hörte, aber es war ganz etwas Anderes als was auf der Absendestation gesungen wurde!

Die Frage ob ein periodisch unterbrochener Klang konstanter Höhe und konstanter Intensität auch wieder als ein Klang der nämlichen Höhe und konstanter Intensität wahrgenommen wird, war durch das obengenannte Experiment freilich nicht beantwortet, aber es ergab sich daraus meines Erachtens doch die Wahrscheinlichkeit dass eine bejahende Antwort auf diese Frage würde gegeben werden müssen. Die Antwort interessirte mich nicht ausschliesslich vom wissenschaftlichen Standpunkt: ich hoffte in dieser Richtung die Lösung zu finden eines Problems, mit welchem ich mich schon seit vielen Jahren beschäftigte, nämlich einer Methode für Duplex- und vielleicht auch Multiplex-Telephonie.

Da mir nicht bekannt war ob je Experimente mit unterbrochenen Klängen gemacht worden sind, habe ich mich danach bei Herrn Prof. G. HEYMANS in Groningen erkündigt, der die Güte hatte mich auf die Arbeiten von ALFRED M. MAYER zu verweisen, der sich vor verschiedenen Jahren schon mit diesem Studium beschäftigt hatte. Seine Publikationen finden sich in „the American Journal of Science und Arts“, third series, Vol. 8, 1874, Vol. 9, 1875

und Vol. 47, 1894, unter dem Titel „Researches in Acoustics“.

MAYER gebrauchte für seine Versuche anfangs den in Vol. 8, S. 242 abgebildeten Apparat. Nachher hat er ihn verbessert; die Beschreibung und Abbildung davon findet sich in Vol. 47, S. 8. Unsere Figur 3 zeigt diesen Apparat. Wie man sieht, besteht derselbe aus einer vor der Oeffnung eines Resonators aufgestellten Stimmgabel und einer durchlöcherten Scheibe, welche vor der engen Oeffnung des Resonators sich dreht. An der anderen Seite der Scheibe befindet sich die Röhre, die den unterbrochenen Ton der Stimmgabel in das Ohr leitet. Der Durchmesser dieser Röhre und der in der Scheibe befindlichen Löcher war 10 mm.; der Durchmesser der engen Resonatoröffnung 5 mm. Die Distanz zwischen den Mittelpunkten der Scheibelöcher war gleich dem sechsfachen Durchmesser der engen Resonatoröffnung, also 30 mm. Die Periode absoluter Stille (abgesehen von dem schwachen Tone, der noch durch die volle Scheibe drang) war also eben so gross wie die Periode des Tönens, den crescirenden und decrescirenden Theil damit einbegriffen. Es wird dies durch Figur 4 deutlich gemacht; der Einfachheit halber lassen wir die Resonatoröffnung r in der Richtung des Pfeiles sich verschieben; gg sind 2 Löcher der Scheibe, die Distanz zwischen deren Mittelpunkten ist gleich 6 ab. Der Ton fängt an hörbar zu werden so wie r die Linie 2 überschreitet und endet in dem Augenblicke in dem r die Linie 5 zu überschreiten anfängt. Die Dauer des Tönens ist also gleich 3 mal derjenigen Zeit, in welcher eine Distanz ab zurückgelegt wird. So bald r die Linie 8 zu schneiden anfängt, fängt der Ton wieder an; es ist also die Ruheperiode gleich der Zeit, die erfordert wird um die Distanz von Linie 5 bis Linie 8 zurückzulegen, das heisst eine Distanz 3 ab, also ist die Dauer des Tönens gleich der Dauer der Ruhe.

MAYER hat auf diese Weise bestimmt wie lange der Eindruck des Schalles derart nachwirkt dass man noch einen ruhigen Ton wahrzunehmen meint. Aus den Resultaten, die er mit Tönen verschiedener Höhe bekam, hat er die folgende Formel aufgestellt:

$$D = \left\{ \frac{33000}{N + 30} + 18 \right\} 0,0001. ^1)$$

Darin ist D die Zeit, während welcher der Schall genügend nachwirkt um die Empfindung eines ruhigen Klanges zu geben;

¹⁾ Vol. 47. S. 15.

N ist die Anzahl ganzer Schwingungen (vibrations doubles) desjenigen Tones, womit experimentirt wird.

MAYER fand auch ¹⁾ dass diese Zeit D sich sehr wenig änderte mit der Intensität des vor dem Resonator hervorgebrachten Tones und weiter dass, wenn er einmal schnell genug drehte um einen ruhigen Klang zu erzielen, dieser Klang sich nicht änderte wenn er anfang schneller zu drehen. Wie weit er mit diesem schnelleren Drehen ging, wird jedoch nicht erwähnt; er sagt davon: „Extreme velocities, of course, produce such violent agitations at the mouth of the resonator as to render experimenting impossible.“

Wir wissen jetzt also:

1. Wenn man einen constanten Ton periodisch unterbricht, und die Klangperiode der Ruheperiode gleich nimmt, so hört man, falls die Unterbrechungen schnell genug vor sich gehen, einen konstanten Ton derselben Höhe.

2. Dreht man rascher, so bleibt dennoch die Erscheinung dieselbe.

3. Aenderung in der Intensität des Tones erfordert keine Aenderung in der Geschwindigkeit mit welcher die Unterbrechungen sich folgen müssen um einen ruhigen Klang zu erzielen.

Wenn das sub 2 genannte nicht nur in ziemlich engen Grenzen der Fall ist, so wird es — wenigstens theoretisch — möglich sein müssen auf diese 3 Thatsachen ein System von Duplex- und vielleicht auch sogar von Multiplex-Telephonie zu bauen.

Nach Helmholtz ²⁾ ist der höchste Oberton des Vokals I das d''' von 2376 ganzen Schwingungen. Berechnen wir dafür das D aus der Mayer'schen Formel, so bekommen wir $D = \frac{1}{315}$ Sek. Das heisst

also, die Ruheperiode für den Vokal I darf höchstens $\frac{1}{315}$ Sek. dauern.

Wenn wir bei unseren Experimenten die Klangdauer von der selben Grösse wählen wie die Ruheperiode, wie das bei den Mayer'schen Versuchen der Fall war, so müssen also wenigstens $\frac{315}{2}$, sagen wir 160, Unterbrechungen pro Sekunde auftreten um den Vokal I ruhig zu hören.

Der charakterisirende Oberton des Vokals U (Deutsche Aussprache) ist das f von 176 ganzen Schwingungen. Dafür ist $D = \frac{1}{56}$ Sek., es

¹⁾ Vol. 8. S. 245.

²⁾ Die Lehre von den Tonempfindungen, 3e Ausg. S. 171.

würden also für das U 28 Unterbrechungen pro Sek. ausreichen. Um die menschliche Sprache mit unterbrochenem Schall ordentlich wahrnehmen zu können, ist es also nothwendig dass man den Vokal U , der nur 28 Unterbrechungen pro Sek. erfordert, auch noch gut versteht bei 160 Unterbrechungen. Wir kommen nachher hierauf zurück.

Die nächstliegende Methode auf die Mayer'schen Resultate ein System von Doppeltelephonie zu bauen, ist wohl die in Fig. 5 schematisch angegebene.

S ist eine auf einer metallenen Achse mn befestigte und damit leitend verbundene Metallscheibe. An der Peripherie dieser Scheibe sind Segmente ausgeschnitten und die dadurch entstandenen Lücken mit Hartgummi ausgefüllt. Die schwarzen Streifen stellen Hartgummi-segmente vor, die weisse Streifen Metall. Die Hartgummi-segmente sind ein wenig grösser als die metallenen. Auf der Peripherie der Scheibe schleifen 2 Federn, 1 und 3. Diese befinden sich in einer solchen Lage, dass, wenn 1 auf der Mitte eines Metallsegments ruht, 3 auf der Mitte eines Hartgummi-segments anliegt. Die Feder 2 drückt dauernd auf die Achse mn . An der anderen Station befindet sich ebenfalls eine Scheibe mit 3 Kontaktfedern, 4, 5 und 6, alles vollkommen gleich der in Station I befindlichen Anordnung.

In Station I befinden sich die Telephone a 1 und b 1, und in Station II die Telephone a 2 und b 2. Aus der Figur ist deutlich zu sehen, wie diese mit den Federn und den Leitungen verbunden sind.

Wir nehmen an dass die Scheiben in Ruhe sind und dass 1 und 4 auf der Mitte eines Metallsegments aufliegen, 3 und 6 dagegen auf der Mitte eines Hartgummi-segments. Wird jetzt in das Telephon a 1 gesprochen, so gehen die darin induzirten Ströme nach 1, in die Metallscheibe, durch 2 in die obere der beiden Linien, durch Telephon a 2 nach 4, durch die Metallscheibe in Station II, durch 5 zur unteren Linie und so zurück zu a I. Man wird also in a 2 hören, was in a 1 gesprochen wird. Es werden aber weder b 1 noch b 2 etwas vom Gesprochenen hören, da die beiden sich in einer Leitung befinden, welche an 2 Stellen unterbrochen ist, nämlich bei 3 und bei 6. Was in b 1 gesprochen wird, wird, aus demselben Grunde, in b 2 nicht gehört werden. ¹⁾

¹⁾ Es genügt nicht, dass die Leitung nur an einer Stelle unterbrochen wird, da man noch ganz gut ein telephonisches Gespräch halten kann zwischen 2 Stationen, die nur durch eine einzige Linie verbunden sind und keine Erdverbindung haben. Die Klänge sind dann freilich schwach, aber mit einem guten Mikrophon und einer passenden Mikrophonbatterie kann man Alles noch recht gut verstehen.

Es befindet sich also $a\ 1$ in elektrischer Verbindung mit $a\ 2$, und die Telephone $b\ 1$ und $b\ 2$ sind todt, so lange die Federn 1 und 4 mit den Messingstreifen in Kontakt sind. Dreht man jetzt die Scheiben an den beiden Stationen mit derselben Geschwindigkeit, so werden in einem folgenden Augenblick $a\ 1$ und $a\ 2$ todt, $b\ 1$ und $b\ 2$ degegen mit einander in Verbindung sein. Dreht man die Scheiben synchron und genügend schnell, so kann man erwarten dass sowohl $a\ 1$ mit $a\ 2$ als $b\ 1$ mit $b\ 2$ *zugleicherzeit* werden sprechen können, und dass $b\ 1$ und $b\ 2$ nichts von $a\ 1$ und $a\ 2$ werden hören können, eben so wenig als $a\ 1$ und $a\ 2$ von $b\ 1$ und $b\ 2$.

Der Apparat, den ich für diesen Versuch baute, bestand aus 2 Metallscheiben von 16,5 cM. Durchmesser, die beide auf einer selben Achse befestigt waren. Die Scheiben waren mit 36 mit Hartgunmi ausgefüllten Ausschnitten versehen. Für die Kontakte auf der Peripherie der Scheiben benützte ich sowohl Metallrollen als Metallfedern und Kohlebürsten. Eine Umdrehung der Scheibe pro Minute giebt

$$\frac{36}{60} = 0,6 \text{ Unterbrechungen pro Sek. Es würden also für den Vokal}$$

$$I \frac{160}{0,6} = 266 \text{ Umdrehungen pro Minute genügen.}$$

Ich habe mit diesem Apparat jedoch nichts brauchbares bekommen. Von Verstehen war gar keine Rede, man könnte meistens sogar nicht hören dass gesprochen wurde. Auch das Uebertragen des Tones einer Stimmgabel und einer Stimmflöte misslang vollkommen. Man hörte im Telephon nur einen fürchterlichen Lärm, der mit artikulirten Lauten oder musikalischen Tönen gar nichts zu tun zu haben schien. Ich habe mit diesem Apparat nur versucht, ob man in $a\ 1$ die Klänge hören könnte die in der Nähe von $a\ 2$ hervorgebracht wurden, ich liess also die beiden Telephone $b\ 1$ und $b\ 2$ überhaupt fort. Statt eines Telephons als Sender, was ich in Fig. 5 nur einfachheitshalber skizzirte, diente ein Hummings-Mikrophon, das verbunden war mit 2 Accumulatorelementen und dem Primärdrabt eines kleinen Transformators, dessen Sekundärdrabt mit der Leitung in Verbindung war, also ganz wie in der telephonischen Praxis.

Ich habe auch noch auf eine andere Weise versucht mit diesem Apparat meinen Zweck zu erreichen. Ich glaubte nämlich bemerkt zu haben dass der Klang im Telephon ein wenig besser war, als ich eins meiner Kontakträder benützte, nicht um die Linie zu unterbrechen, sondern um einen Kurzschluss zwischen Linie und Rücklinie abwechselnd zu schliessen und zu öffnen. Fig. 6 zeigt

dies schematisch. Die Linie ab ist mit einer Feder c und die Linie de mit der Scheibe f verbunden. Dreht sich die Scheibe, so wird jedesmal wenn ein Messingsegment mit der Feder in Berührung ist, ein Kurzschluss gebildet zwischen den Linien ab und de ; in diesem Augenblick wird also das Telephon $T1$ (praktisch) keinen Strom bekommen. Nun ist aber während der Zeit, in welcher dieser Kurzschluss da ist, die Linie unbrauchbar für die beiden anderen Telephone, die über dieselbe Linie sprechen sollen. Um diese Schwierigkeit zu umgehen, versuchte ich die in Fig. 7 skizzierte Einrichtung. Die Scheibe f macht, eben so wie es in Fig. 6 der Fall war, einen Kurzschluss während der Zeit in welcher sie mit der Feder c in Berührung ist. Ausserdem ist aber noch eine zweite Scheibe g da, eben so beschaffen wie f und mit derselben Geschwindigkeit sich drehend als f . Diese Scheibe dient dazu die Linie de periodisch zu unterbrechen: so lange die Feder h mit der Scheibe g in Kontakt ist, ist die Linie de geschlossen; so wie jedoch dieser Kontakt geöffnet wird, ist auch die Linie de unterbrochen. Die Lage der Scheiben und die Breite der Metallsegmente war derart gewählt, dass sich, wenn die Scheiben rotierten, der Vorgang folgendermassen abspielte: (Fig. 7 und 8)

l. f bildet einen Kurzschluss zwischen den beiden Linien.

m. g unterbricht die Linie dc .

n. der Kurzschluss bei f wird unterbrochen.

o. „ „ „ „ „ wieder hergestellt.

p. g schliesst die Linie dc .

q. der Kurzschluss bei f wird unterbrochen.

r. „ „ „ „ „ wieder hergestellt.

s. die Linie cd wird unterbrochen.

t. der Kurzschluss bei f wird unterbrochen.

u. wie bei *l.* u. s. w.

Zwischen *n* und *o*, *t* und *u*, u. s. w. ist der Kurzschluss und ebenfalls die Verbindung bei g h unterbrochen. Während dieser Zeit wäre die Linie also disponibel für die beiden anderen Telephone, die im Duplex-System sprechen sollen. ¹⁾

Wie man sieht, geschieht das Schliessen und Oeffnen der Linie bei dieser Einrichtung stets in einem Augenblick, in welchem in der Linienstrecke *kadi* kein Strom fliesst. Ich erwartete deshalb,

¹⁾ Es würde nicht nur die Linie de sondern auch ab unterbrochen werden müssen um eine vollkommene Stille in $T1$ während der Perioden *no*, *tu* u. s. w. zu erzielen. Da es sich jedoch nur um einen vorläufigen Versuch handelte, habe ich mich mit einer Unterbrechungsstelle begnügt.

dass das Schliessen und Oeffnen keinen störenden Einfluss auf das Telephon *T* 1 haben würde. Das Experiment ergab jedoch, dass die im Telephon *T* 1 auf diese Weise erzeugten Klänge eben so unbrauchbar waren als diejenigen, welche ich mit der Einrichtung von Fig. 5 erhielt.

Beim Suchen nach der Ursache dieses Misserfolges lag es nahe zuerst den principiellen Unterschied meiner und der Mayer'schen Versuche festzustellen. Der grosse Unterschied ist folgender: bei MAYER geschieht der Uebergang des Tönens zur Stille und umgekehrt *allmählig*, da der Ton, wenn das Loch *r* nur einen kleinen Teil des Loches *g* bedeckt (Fig. 4), sich nur sehr schwach in dem Hörrohre fortpflanzt. Bei meiner Einrichtung dagegen dauert die Stille so lange als die Kontaktfeder auf dem Hartgummi ruht; so wie die Feder mit einem Metallsegment in Berührung kommt, kommt *sofort* der Telephonstrom in seiner vollen Stärke in die Linie und in das Telephon, in welchem man hört. Ebenso hört der Strom im Telephon *sofort* auf, wenn die Feder das Metallsegment verlässt.

Nun ist es klar dass eine Telephonmembran von ihrer Ruhelage aus nicht in einem Augenblick diejenige Abweichung bekommen kann, die zu der in dem Momente herrschenden Stromstärke gehört; beim Anfang der Schallperiode wird also während einer kurzen Zeit das Telephon nicht die richtigen Schwingungen wiedergeben. Desgleichen wird beim plötzlichen Aufhören der Telephonströme die Membran nicht sofort zur Ruhe kommen. Geschieht das Oeffnen der Leitung in einem Moment, in dem der Telephonstrom $= 0$ ist, so hat die Membran grade ihre grösste Geschwindigkeit und eine Abweichung $= 0$; geschieht das Oeffnen in einem Augenblick, in dem der Telephonstrom seine Maximalintensität hat, so ist die Membran freilich in Ruhe, aber sie befindet sich dann nicht in derjenigen Lage, welche zu einem Telephon ohne Strom gehört. In beiden Fällen wird also die Membran nach dem Aufhören der Telephonströme noch etwas nachschwingen.

Es existirt also sowohl beim Anfang als beim Schluss der Schalldauer eine kurze Periode, in welcher die Schwingungen der Telephonmembran nicht mit den von der anderen Station kommenden Telephonströmen übereinstimmen. Wir wollen diese Schwingungen der Kürze halber Eigenschwingungen nennen, obwohl sie eigentlich eine Summation von Eigenschwingungen und erzwungenen Schwingungen sind.

Wenn wir das Obengesagte als die richtige Erklärung des Misslingens unserer Versuche annehmen, so werden wir versuchen müssen eine Einrichtung zu finden bei welcher der Uebergang von Klang zur Stille und umgekehrt *allmählig* vor sich geht.

Man kann diese sowohl auf elektrostatischem als auf elektromagnetischem Wege finden.

Die elektrostatische Methode wird in Fig. 9—11 schematisch dargestellt. *A* (Fig. 9—10) ist eine Metallscheibe, fest und leitend mit der Achse *pp* verbunden. Sie hat an jeder ihrer Seitenflächen zahnförmige Erhöhungen *aa*. *B* und *C* sind stillstehende Scheiben durch welche die Achse *pp* ohne sie zu berühren hindurchgeht. *B* und *C* sind ebenfalls mit zahnförmigen Erhöhungen versehen, in Grösse und Anzahl gleich denen von *A*. Aber während *A* an beiden Seiten Zähne hat, haben *B* und *C* sie nur an den beiden gegen *A* gerichteten Flächen. *B* und *C* sind derart einander gegenüber gestellt, dass eine Horizontalprojektion der Zähne von *B* gerade in den Raum zwischen den Zähnen von *C* fällt. Befindet sich *A* nun in einer solchen Lage, dass ihre Zähne gerade gegenüber denjenigen von *B* liegen, so liegen die an der anderen Seitenfläche auf *A* befindlichen Zähne (Fig. 9, rechts) gegenüber dem Raum, der sich zwischen den Zähnen von *C* befindet.

A bildet nun mit *B* einen Luftkondensator, und ebenfalls mit *C*. Aber in der Lage der Fig. 9 ist die Kapazität des Kondensators *AB* viel grösser als diejenige des Kondensators *AC*, und durch eine passende Wahl der Verhältnisse kann man erreichen dass die Kapazität des Kondensators *AC* bei dieser Lage von *A* so gering ist, dass er keine hörbaren Telephonströme übermittelt.

Fig. 11 zeigt schematisch wie man mit einem solchen Apparat Doppeltelephonie würde betreiben können. Die beiden Linien sind durch Schleifkontakte verbunden mit den Achsen *pp*, auf welchen die Scheiben *A* befestigt sind. Wenn die Scheiben sich in der in Fig. 11 gezeichneten Lage befinden, so kann *b* mit *b1* sprechen. Dreht man die Scheiben *A*, *A1* . . . so weit, bis die auf ihrer rechten Fläche befindlichen Zähne den Zähnen von *C*, *C1* . . . gerade gegenüber liegen, so kann *c* mit *c1* sprechen. Geschieht die Drehung von *A*, *A1* . . . rasch genug, so kann *b* mit *b1* und zugleichzeit *c* mit *c1* sprechen, ohne dass *b* etwas von *c*, oder umgekehrt, hören kann.

Durch eine kleine Aenderung an der Einrichtung von Fig. 11 kann man die Schleifkontakte (die vielleicht wohl dazu beigetragen haben das Experiment von Fig. 5 misslingen zu lassen) vermeiden. Man würde dazu die Scheiben *A*, *A1* *A2* *A3* von Fig. 11 in

bleibender Verbindung lassen mit den flachen Scheiben $N\ N1\ N2\ N3$ (Fig. 12), welche mit den A -Scheiben auf derselben Achse befestigt sind. Diese N -Scheiben induziren dann wieder die stillstehenden mit der Leitung verbundenen M -Scheiben.

Es zeigte sich jedoch schon bei einigen Vorversuchen, dass ein elektrostatischer Apparat, um praktisch brauchbare Klänge zu geben, sehr gross würde sein müssen. Da die Einrichtung von Fig. 12 noch 2 Translationen mehr erfordert als die in Fig. 11 skizzierte, so gilt dies Bedenken für die in Fig. 12 angegebene Einrichtung selbstverständlich in noch höherem Grade.

Dennoch will ich ein Experiment beschreiben, das zeigt, wie man mit äusserst geringen Kapazitäten noch verständliche Klänge übertragen kann.

Das Telephon t (Fig. 13) ist verbunden mit den linken Platten zweier Luftkondensatoren, a und b . Die beiden anderen Platten sind mit dem Sekundärdrabt eines Transformators I verbunden; der Primärdrabt mit einem Hunnings-Mikrophon und 2 Accumulatoren. Die Kondensatoren bestanden aus 2 Spiegelglasplatten von etwa 15×15 cM.; auf jede Platte war ein Stanniolstreifen von 14 mM. Breite geklebt. Die Glasplatten wurden, durch 3 Glimmerstückchen getrennt, derart aufeinander gelegt, dass sich die Stanniolstreifen über eine Länge von 60 mM. gerade deckten. Die Vertikaldistanz zwischen den Stanniolstreifen war 0,2 mM. Die Glimmerplättchen waren so weit von den Stanniolstreifen entfernt, als es die Grösse der Glasplatten erlaubte; die Kondensatoren befanden sich in einem stark geheizten Zimmer und hatten schon seit einigen Stunden darin gelegen bevor das Experiment gemacht wurde, so dass von Isolationsfehlern keine Rede sein könnte. Sicherheitshalber habe ich das Experiment auch noch gemacht mit Glasplatten ohne Stanniolbelegung; dabei war im Telephon nichts zu hören.

Es zeigte sich nun, dass man mit diesen Luftkondensatoren, die also eine wirksame Oberfläche von 14×60 mM. bei einer Plattendistanz von 0,2 mM. hatten, im Telephon noch sehr gut verstehen konnte, was vor dem Mikrophon gesprochen wurde.¹⁾

Ich füge hinzu dass ich für diesen Versuch ein Telephon benützte mit mehr Drahtwindungen, als gewöhnlich in der Praxis gebraucht wird und einen Transformator mit mehr sekundärem Draht als üblich.

¹⁾ Um zu bestimmen durch welche Kapazität man noch telephoniren kann, muss man immer *zwei* Kondensatoren gebrauchen; den Grund dafür habe ich schon in der Bemerkung auf S. 7 unten angegeben.

Als ich bemerkte, dass die für diese Apparate erforderlichen sehr grossen Dimensionen es sehr unwahrscheinlich machten, mit der elektrostatischen Methode praktisch brauchbare Resultate zu erhalten, so versuchte ich, mein Ziel durch Anwendung der elektromagnetischen Induktion zu erreichen.

Fig. 14 deutet schematisch an, wie ich mir eine solche Vorrichtung dachte. Auf jeder Station befinden sich 2 auf einer Achse befestigte Hartgummischeiben. Jede Scheibe ist mit z. B. 12, der Drehungsachse parallelen, Löchern versehen; in jedem Loch befindet sich ein mit isolirtem Draht bewickelter Eisenkern, dessen Achse ebenfalls der Drehungsachse parallel ist. Der Leitungsdraht einer jeden Spule bildet mit dem der ihr diametral gegenüber liegenden Spule eine geschlossene Leitung. $a\ b\ c\ d\ e\ f\ g$ und h sind Hufeisenelektromagnete, zwischen deren Polschuhen sich die Spulen $ii \dots$ drehen. Wie die Figur zeigt, befinden sich die beiden auf derselben Achse befestigten Scheiben in verschiedener Lage. In dem Augenblick in welchem sich nämlich 2 i -Spulen der Scheibe A in der Mitte der Felder von a und c befinden, befinden sich die Hufeisen b und d gerade in der Mitte zwischen 2 i -Spulen der Scheibe B .

Es ist ohne Weiteres klar, dass in der Lage von Fig. 14 T mit $T1$ wird sprechen können und dass in dieser Lage die Telephone $T2$ und $T3$ todt sind. Dreht man nun an beiden Stationen die Achsen, auf denen sich die Scheiben befinden, mit genügender und synchroner Geschwindigkeit, und war beim Anfang der Bewegung die Lage von A genau gleich derjenigen von C , so kann man erwarten, dass T und $T1$ und zugleichzeitig unabhängig davon $T2$ und $T3$ mit einander werden sprechen können.

Da man das erdmagnetische Feld in dem kleinen von den drehenden Scheiben eingenommenen Raume als überall von derselben Intensität annehmen kann, so wird vom Erdmagnetismus kein Strom in den bewegten Spulen induziert werden, denn diese Spulen bewegen sich derart, dass die Achsen sich stets selbst parallel verschieben, so dass sie in jeder Lage von derselben Anzahl erdmagnetischer Kraftlinien durchschnitten werden.

Der Apparat, mit welchem ich versuchte meinen Zweck auf elektromagnetischem Wege zu erreichen, war wie folgt eingerichtet: A (Fig. 15) war eine Hartgummischeibe von 31 cM. Durchmesser, in welchem sich 12 mit isolirtem Draht bewickelte Eisenspulen befanden.

Die Spulen sind in Fig. 16 in natürlicher Grösse dargestellt. Die Drahtdicke der Windungen war 0,1 mM.; der Widerstand

einer jeden Spule betrug etwa 50 Ohm. Die Feldmagnete *B* und *C* sind in Fig. 17 in wirklicher Grösse dargestellt; die Drahtdicke der Windungen war ebenfalls 0,1 mM., der Widerstand zweier zu einem Feldmagnete gehörigen Spulen zusammen betrug etwa 200 Ohm. *C* war mit dem empfangenden Telephon *T*, *B* mit dem Sekundärdrabt eines Transformators verbunden, dessen Primärdrabt in bekannter Weise mit Mikrophon und Batterie verbunden war. Die rotierenden Spulen waren unter sich verbunden wie Fig. 15 zeigt.

Da die Scheibe mit 12 Spulen versehen war, so ergab eine Umdrehung pro Minute 12 Unterbrechungen pro Min. oder $\frac{1}{5}$ pro Sek.

Als ich nun diese Scheibe, bevor die Mikrophonbatterie geschlossen war und das Telephon *T* also absolut stille sein sollte, drehte, so liess sich dennoch im Telephon ein ziemlich kräftiger Ton hören, welcher bei Vergrösserung der Umdrehungsgeschwindigkeit sowohl höher als kräftiger wurde. Dieser Ton, den ich freilich wohl erwartet hatte, wurde selbstverständlich durch den remanenten Magnetismus der Spulen verursacht. Ich hatte sehr weiches Eisen genommen und dafür Sorge getragen dass die Spulen möglichst von magnetisirenden Einflüssen entfernt gehalten wurden. Aber trotz dieser Vorsorge und trotz verschiedener Kunstgriffe ist es mir nicht gelungen diesen Fehler zu beseitigen.

Die mit diesem Apparat erhaltenen Resultate waren folgende:

30 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen ist zu verstehen, aber äusserst hässlich und unbrauchbar. — Was man eine „Grabstimme“ nennt, vermuthlich durch das Fehlen der Obertöne. — Eine Orgelpfeife von 170 ganzen Schwingungen, $F2$., wurde vor dem Mikrophon angeblasen, der im Telephon gehörte Ton war aber sehr verschieden von diesem $F2$. Mit einer Stimmflöte $a^1 = 440$ D. S. erhielt ich dasselbe Resultat wie mit der Orgelpfeife.

90 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen war zu verstehen, aber sehr hässlich und zu tief.

235 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen ist teilweise zu verstehen. Ein bekanntes Lied, das vor dem Mikrophon gesprochen wurde, war gut zu verstehen. Eine vor dem Mikrophon gesungene Melodie klang im Telephon sehr komisch, einige Töne kamen in der richtigen Höhe heraus, andere dagegen hatten sich gänzlich geändert und wurden heiser und zu tief. Die Stimmflöte gab im Telephon einen hässlichen klappernden Ton, dessen Höhe ich auf ungefähr $c' = 264$ D. S. schätzte. Ich konnte bei dieser Drehungsgeschwindigkeit, als vor dem Mikrophon gesungen wurde, nicht hören ob

mein Assistent, der eine tiefe Bassstimme hat, oder ob meine Frau sang!

273 Unterbrechungen pro Sek. Wie bei 235, aber noch etwas schlechter.

Ich habe danach den Apparat derart umgeändert, dass die hufeisenförmigen Stücken *B* und *C* gar kein Eisen mehr enthielten. Die Resultate waren jedoch nach dieser Umänderung ungefähr dieselben geblieben. Bei 145 Unterbrechungen pro Sek. war Alles ziemlich gut zu verstehen, obgleich der Klang heiser und sehr unschön war. Bei 200 war Alles noch viel hässlicher und schwieriger zu verstehen.

Ich glaubte diese ungünstigen Resultate dem Ton zuschreiben zu müssen, der dem remanenten Magnetismus der Eisenkerne seine Existenz verdankte und der die artikulirten Klänge dermaassen übertönte, dass das Gesprochene unverständlich wurde. Mit dieser Erklärung in Uebereinstimmung war ja auch die Tatsache, dass die Klänge bei langsamer Umdrehung der Scheibe, wobei der schädliche Eigenton schwächer ist, viel besser verständlich waren als beim schnelleren Drehen, obgleich doch bei langsamer Bewegung die Obertöne fortblieben.

Das einzige Mittel, die Richtigkeit dieser Erklärung zu prüfen, besteht darin, dass man sowohl die bewegten als die stillstehenden Spulen ganz ohne Eisen nimmt.

Da aber die gegenseitige Induktion der Spulen durch das Fortlassen des Eisens sehr geschwächt wird, so habe ich für dies Experiment meinen Apparat etwas umgeändert und zwar in der Weise, dass nur *eine* Uebertragung (Translation) stattfand. Der Sekundärdrath des Transformators (Fig. 18) wurde mit den beiden hinter einander geschalteten Feldmagneten *B* und *C* verbunden. Die bewegten Spulen waren ebenfalls alle hinter einander geschaltet; der Anfang der ersten Spule war mit einem Metallring verbunden, der isolirt auf der Drehungs-Achse befestigt war; ebenso war das Ende der letzten Spule mit einem solchen Ring verbunden. Auf diesen Ringen machten 2 mit dem Telephon *T* verbundene Kohlebürsten Kontakt. Fig. 19 zeigt schematisch, wie man sich diese Einrichtung für das Erzielen einer Doppeltelephonie würde denken müssen.

Wie zu erwarten war, gab die in Fig. 18 skizzirte Einrichtung keinen Eigenton: so lange das Mikrophon in Ruhe war, war im Telephon nichts zu hören.

Beim ersten mit diesem Apparate gemachten Versuch fanden 220 Unterbrechungen pro Sek. statt. Das Sprechen war im Telephon

sehr gut zu verstehen, aber es klang sehr hässlich. Dennoch war es bedeutend besser als ich es je mit dem Apparat mit Eisenkernen bekommen hatte; ich erinnere mich dass mein Assistent, als er die artikulierten Laute zum ersten Male aus diesem eisenfreien Apparat hörte, mir gratulierte zu dem guten Erfolg. Von einem in das Mikrophon gesungenen Lied kamen jedoch nur einige Töne in der richtigen Höhe im Telephon heraus, die meisten kamen in ganz anderer Tonhöhe heraus. Mit anderen Geschwindigkeiten erhielt ich folgende Resultate:

67 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen sehr dumpf, wenig Nebengeräusch, verständlich. Es fehlen offenbar die Obertöne.

100 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen wie oben, aber etwas leichter zu verstehen. Singen sehr schlecht.

172 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen ziemlich gut, ungefähr so wie beim ersten Versuch mit 220 Unterbrechungen. Singen weniger gut als bei 220.

Wie man sieht, finden wir denselben Fehler, den wir mit dem Apparat mit Eisen bekamen, ebenfalls wieder bei dem eisenfreien Instrument. Der Unterschied ist nur quantitativ.

Ich glaube diese nicht von mir erwartete Erscheinung auf folgende Weise erklären zu können:

In Fig. 20 bedeuten aa die 2 festen Spulen und b eine der rotierenden Spulen. Es wird vor dem Mikrophon ein Ton von konstanter Intensität hervorgebracht; das Mikrophon ist in der üblichen Weise mittels des Transformators mit den aa Spulen verbunden. An einem mit b verbundenen Telephon wird gehört. Beim Anfang des Versuchs liegt die Achse der Spule b in der Linie AA , und jetzt schieben wir, während das Telephon an das Ohr gehalten wird, b von E nach F , und zwar derart dass die Achse von b der Linie AA stets parallel bleibt. Wir hören dann im Telephon Folgendes:

Von AA bis BB . Der Ton behält die selbe Intensität.

„ BB „ CC „ „ wird immer schwächer und ist $= 0$ wenn die Achse von b ungefähr in der Linie CC liegt.

„ CC „ DD „ „ wird kräftiger, ist aber auch bei DD immer noch bedeutend schwächer als auf der Strecke $AA—BB$.

Von DD aus weiter schiebend, wird der Ton stets schwächer bis er schliesslich nicht mehr wahrgenommen wird.

Dies Experiment lehrt uns in Bezug auf die Komponente der Feldstärke in der Richtung des Pfeiles:

Von AA bis BB ist das Feld (wir wollen sagen) $+$ und homogen.

„ BB „ CC „ „ „ $+$ und wird stets schwächer.

Auf der Linie CC ist die Feldstärke $= 0$.

Von CC bis DD ist das Feld $-$ und wird fortwährend stärker.

Von DD weiter in der Richtung EF gehend, bleibt das Feld $-$ und wird stetig schwächer.

Wenn die Spule b in eine solche Lage kommt, dass ihre Achse der Linie CC sehr nahe liegt, so kann es vorkommen dass eben so viele $+$ als $-$ Kraftlinien durch b gehen; in dem Augenblick ist also die Induktion in $b = 0$.

Wenn wir einen konstanten Strom in den Spulen aa annehmen, so können wir uns die Feldstärke also ungefähr charakterisiert denken durch die in Fig. 21 skizzierte Kurve.

Nehmen wir jetzt an dass ein *Sinusstrom* in den Spulen aa fließt, so wird die Feldstärke in jedem Punkte des *zwischen den beiden Spulen aa liegenden* Raumes durch eine Sinusfunktion dargestellt werden können und diese Feldstärke wird in jedem Punkte dieses Raumes in jedem willkürlichen Augenblick denselben Wert haben.

Es befinde sich nun die Spule b in einem gewissen Momente mit der Mitte ihrer Achse in einem Punkt $p 1$, der in dem Raum zwischen den beiden Spulen aa und auf der Linie EF liegt, und es werde b in dieser Lage von $n 1$ Kraftlinien durchschnitten. Jetzt verschieben wir b nach einem Punkt $p 2$, ebenfalls auf EF und zwischen AA und BB gelegen. In dem Augenblicke in dem b dort ankommt wird sie von $n 2$ Kraftlinien durchschnitten. Aber wenn b im Punkt $p 1$ geblieben wäre, so würde sie, im Augenblick, in welchem sie jetzt in $p 2$ ankommt, *ebenfalls* von $n 2$ Kraftlinien durchschnitten werden. Es folgt daraus dass der von a in b induzierte Strom ganz derselbe ist, gleichgültig ob b auf der Linie EF , *zwischen AA und BB* , bewegt wird, oder ob b stillsteht.

Es erhält daher das Telephon während der Bewegung $AA—BB$ den gewünschten Sinusstrom.

Wenn sich aber die Spule b zwischen BB und CC bewegt, so haben wir einen ganz anderen Fall.

Nehmen wir an b , oder — genau genommen — der Mittelpunkt ihrer Achse, befinde sich in einem Punkte $p 3$ auf der Strecke $BB—CC$ und umfasse in dem Augenblick $n 3$ Kraftlinien. Verschieben wir dann b zu einem sehr nahen ebenfalls auf der Strecke $BB—CC$ liegenden Punkt $p 4$, so wird b in dem Augenblick in

welchem sie in $p4$ ankommt von einer Anzahl Kraftlinien $n4$ durchschnitten werden. Die Aenderung in der Anzahl der Kraftlinien in der kurzen Bewegungszeit ist also $n4 - n3$ und damit ist der in b induzierte Strom proportional.

Wäre b jedoch in $p3$ geblieben, so würde sie in dem Moment, in dem sie jetzt in $p4$ anlangte, *nicht* von $n4$ sondern von wir wollen sagen $n5$ Kraftlinien durchschnitten sein. Denn auf der Strecke $BB-CC$ hat die Feldstärke in jedem Augenblick in sämtlichen Punkten einen *verschiedenen* Werth. Der während der Bewegung von $p3$ nach $p4$ in a induzierte Strom ist also proportional mit $n4 - n3$ und *nicht* mit $n5 - n3$, was doch der Fall sein müsste um in b den gewünschten Sinusstrom zu erhalten.

Der Strecke $BB-CC$ in Fig. 20 *unter* den Spulen entspricht auch eine solche *über* denselben, ($AA-GG$). Es entsteht also in den rotierenden Spulen jedesmal wenn sie sich den Feldmagneten nähern und wenn sie sich davon entfernen ein Strom, der nicht der gewünschte Sinusstrom ist, sondern eine zusammengesetzte Funktion 1. der Schwingungsdauer des vor dem Mikrophon hervorgebrachten Tones, 2. der in Fig. 21 skizzirten Kurve CB , und 3. der Umdrehungsgeschwindigkeit der Scheibe. Der Nebenton, der durch diese fehlerhaften Ströme entsteht, wird also, was seine Tonhöhe anbetrifft, mit der Umdrehungszeit der Scheibe zusammenhängen.

Wir werden also $n5 - n4$ in gewissem Sinne als Maass betrachten können für die Abweichung, die zwischen dem im Telephon gehörten Tone (über die Strecke $BB-CC$) und dem gewünschten einfachen Tone besteht.

Diese schädliche Abweichung wächst mit der Intensität des vor dem Mikrophon hervorgebrachten Tones, wie sich aus dem Folgenden ergibt:

Es sei $abcd$ (Fig. 22) die Kurve, die in einer gewissen Phase des Sinusstromes die Feldstärke darstellt. Wenn wir jetzt den Ton vor dem Mikrophon derart verstärken, dass die Stromstärke sich verdoppelt, so wird die Feldstärke in derselben Phase durch die Kurve $abCD$ dargestellt werden können, bei welcher sämtliche Ordinaten zweimal so gross sind als bei $abcd$.

Wir betrachten nun zuerst den in der sich bewegenden Spule induzierten Strom während der schwächere Ton, wozu die Kurve $abcd$ gehört, vor dem Mikrophon hervorgebracht wird. Während die Spule b sich in $p3$ befindet, wird sie von $n3$ Kraftlinien durchschnitten: der Wert $n3$ ist der Ordinate $p3e$ proportional.

Einen Augenblick später kommt b nach $p4$ und wird von $n4$ Kraftlinien durchschnitten. In diesem Augenblicke ist jedoch die

Feldstärkekurve wieder anders; wir wollen sie durch die punktierte Kurve darstellen. $n\ 4$ ist nun mit $p\ 4\ f$ proportional. Wäre die Spule b in $p\ 3$ geblieben, so würde sie in dem Momente, in dem sie jetzt in $p\ 4$ anlangt, von $n\ 5$ Kraftlinien durchschnitten werden, wobei $n\ 5$ der Ordinate $p\ 3\ g$ proportional ist. Es ist also:

$$n\ 5 - n\ 4 = C(p\ 3\ g - p\ 4\ f)$$

Es ist klar, dass, wenn wir diese Ordinate für die Kurve $AbCD$ konstruieren, wir für $n\ 5 - n\ 4$ einen zweimal so grossen Wert finden werden, woraus also folgt dass die schädliche Abweichung mit der Intensität des Tones wächst.

Je rascher die Scheibe sich dreht, desto kürzer ist die Zeit, in welcher b die Entfernung zwischen $p\ 3$ und $p\ 4$ zurücklegt, und da der induzierte Strom mit $\frac{dn}{dt}$ proportional ist, wobei n die Anzahl der Kraftlinien bedeutet, so wird beim schnelleren Drehen der störende Einfluss sich auch stärker bemerkbar machen. Und da man für höhere Töne schneller drehen *muss*, so ist es klar dass diese sich schlechter reproduzieren lassen, was durch das Experiment vollkommen bestätigt wird.

Ausserdem giebt es noch eine zweite Ursache, wesshalb bei rascher Drehung der störende Einfluss grösser sein wird. Wenn wir die Scheibe n mal schneller drehen, so wird die Dauer des in b induzierten gewünschten Sinusstroms n mal kleiner werden. Aber die Dauer des fehlerhaften Stromes wird nicht n sondern $(n - m)$ mal kleiner werden, wobei m eine positive Grösse ist. Denn gerade durch die grössere Geschwindigkeit wird jetzt der fehlerhafte Ton hörbar sein wenn b sich in einem Theile des Feldes bewegt, in dem früher dieser Ton bei der langsameren Bewegung zu schwach war, um wahrgenommen zu werden.

Eine dritte Ursache des Undeutlichwerdens bei rascher Drehung könnte schliesslich noch folgende sein. Bei sehr rascher Drehung ist es möglich, dass die während der Bewegung von $GG-AA$ (Fig. 20) im Telephon erregten Schwingungen eine bedeutend grössere Amplitude haben als die auf der Strecke $AA-BB$ erregten Sinusschwingungen. Es wird in dem Falle eine gewisse Zeit dauern bis die Telephonmembran nach dem Eintritt der Spule b in das homogene Feld (zwischen AA und BB), die richtige Schwingungsform erreicht hat. Ist die Drehung sehr rasch, dauert also die Bewegung über den Weg $AA-BB$ nur sehr kurze Zeit, so kann

es ja vorkommen dass die Membran die richtige Schwingungsform noch nicht erreicht hat, wenn *b* (Fig. 20) schon das homogene Feld verlassen hat und sich auf dem Weg zwischen *BB* und *DD* befindet. In dem Falle würde man also von den gewünschten Sinusschwingungen gar nichts aus dem Telephon hören; von einer Artikulation wäre in diesem Fall selbstverständlich gar keine Rede.

Wir sahen S. 18 dass der fehlerhafte Strom jedesmal entsteht wenn die sich drehenden Spulen sich den Feldmagneten nähern und wenn sie sich davon entfernen. Wir zogen daraus den Schluss, dass der Nebenton, wodurch sowohl die Artikulation des gesprochenen Wortes als die Melodie der vor dem Mikrophon gemachten Musik entstellt wurde, was die Tonhöhe betrifft mit der Umdrehungszeit der Scheibe würde zusammenhängen müssen.¹⁾

Diese Annahme wird durch die folgenden Experimente vollkommen bestätigt:

Die in Fig. 18 skizzierte Einrichtung wurde insofern umgeändert, als man durch das Herunterdrücken zweier Morsetaster den Strom einer Batterie von 9 Akkumulatoren in den Sekundärdrabt des Transformators und in die Feldmagnete *B* und *C* senden konnte. Die Scheibe machte beim Anfang des Experiments 492 Touren pro Min. und beim Ende 506, wir können also für das Mittel 500 annehmen. Es wurde nun die Tonleiter *A—*a** (110—220 D.S.) vor dem Mikrophon gesungen und zwar folgendermassen: es wurde einige Sekunden lang *A* gesungen, darauf hörte der Sänger ungefähr eine eben so lange Zeit mit singen auf. Während dieser Ruheperiode drückte der Hörer, der fortwährend ein Telephon am Ohr hatte, auf die beiden Morsetaster. Wenn der Sänger, der auch ein Telephon am Ohr hielt, am „klick“ hörte dass die Taster wieder losgelassen waren, sang er wieder einige Sekunden das *A* und so fort bis 4 Mal. Dasselbe geschah mit *B*, *cis*, u. s. w. bis *a*.

Der Ton, der im Telephon gehört wurde wenn die Taster niedergedrückt waren (wir wollen ihn den Eigenton des Apparats nennen), wurde auf ungefähr *a* (220 D.S.) geschätzt.

Es ergab sich nun, dass alle vor dem Mikrophon gesungenen Töne ungefähr wie dieser Eigenton des Apparats klangen.

¹⁾ Schon lange bevor ich die Erklärung der mangelhaften mit diesem Apparate erzielten Artikulation gefunden hatte, hatte Herr DR. M. DE HAAS, Professor an der hiesigen Technischen Hochschule, der die Freundlichkeit hatte einige Male meinen Versuchen beizuwohnen, schon die Bemerkung gemacht, dass er in Allem, was er aus meinem Apparate heraushörte, stets einem dominirenden Ton zu hören meinte, dessen Höhe sich mit der Drehungsgeschwindigkeit der Scheibe änderte.

Als danach die Tonleiter $A—a$ in der gewöhnlichen Weise gesungen wurde, also jeder Ton nur einmal und ohne Herunterdrücken der Taster, da war das Resultat ein wenig abweichend. Das gis und a wurde verstärkt im Telephon gehört, A , b und cis wurden auch gehört, das e nur sehr schwach. Von einem vor dem Mikrophon gesungenen Liede kamen nur einige Töne richtig an; die meisten waren jedoch entstellt. Sprechen war gut zu verstehen, obgleich es zu tief und heiser aus dem Telephon herauskam; das wurde offenbar dadurch verursacht dass für verschiedene Obertöne der Vokale zu langsam gedreht wurde, wie aus Folgendem erklärlich wird: 500 Umdrehungen pro Minute entsprechen 100 Unterbrechungen pro Sekunde, was also eine Ruhepause von $\frac{1}{200}$ Sekunde ergibt. Es folgt aber aus der Mayer'schen Formel, dass die Ruheperiode D für die verschiedenen Vokale nicht grösser sein darf als:

A	E	I	O	U	(Holländisch ausgesprochen.)
$D > \frac{1}{190}$	$\frac{1}{281}$	$\frac{1}{315}$	$\frac{1}{117}$	$\frac{1}{56}$	Sekunde.

Für die charakterisirenden Obertöne der Vokale E und I drehte sich also die Scheibe viel zu langsam; ausserdem ist es gar nicht unmöglich, dass für eine gute Artikulation noch höhere Obertöne erforderlich sind als der Oberton $f''' = 2376$ D. S. des Vokals I .

Wir sehen also aus diesen Ergebnissen dass der Eigenton der Scheibe derart über die anderen Töne dominirt, dass diese ihren Charakter ganz verlieren, wodurch gesungene Melodien ganz entstellt übertragen werden. Das gesprochene Wort scheint von der Entstehung bei dieser geringen Drehgeschwindigkeit weniger beeinflusst zu werden, es geht wenigstens die Verständlichkeit nicht verloren.

Da, wie wir früher schon sagten, ein Impuls entsteht wenn die rotierenden Spulen sich den Feldmagneten nähern und ebenfalls wenn sie sich von ihnen entfernen, so wird der Eigenton unserer mit 12 Spulen versehenen Scheibe bei 500 Touren pro Minute $\frac{500 \times 12 \times 2}{60}$ oder 200 D. S. pro Sekunde betragen müssen. Es

stimmt dies ziemlich gut mit der Schätzung überein, da das geschätzte a 220 D. S. macht. Der kleine Unterschied in der Tonhöhe kann dadurch erklärt werden, dass die durch einen Gasmotor getriebene Scheibe sich nicht vollkommen regelmässig drehte. Es zeigte auch

der Eigenton ein regelmässiges Ansteigen und Fallen was mit der Viertaktbewegung des Motors übereinstimmte.

Es ist ohne weiteres klar, dass derselbe Fehler, der die elektromagnetische Methode für die Praxis der Doppeltelephonie unbrauchbar macht, sich auch bei der elektrostatischen Methode zeigen wird. Denn die Feldstärke in der Nähe der elektrostatisch geladenen Zähne des in Fig. 9—10 dargestellten Apparats wird ebenfalls durch eine Kurve, ungefähr wie Fig. 21 zeigt, abgebildet werden können. Nur wird bei Anwendung der elektrostatischen Induktion die Feldstärke nicht negativ werden, die Kurve also die Achse nicht schneiden.

Bei der in Fig. 5 skizzirten Vorrichtung erklärte ich die Unbrauchbarkeit des Klanges aus der Tatsache, dass beim Anfang und beim Ende der Klangperiode jedesmal eine kurze Zeit bestand, in welcher das Telephon nicht die gewünschten Schwingungen ausführte. (Seite 10.) Bei dem Apparat von Fig. 15 gab ich dieselbe Erklärung.

Es kan mir jedoch nachher wahrscheinlich vor, dass die Abweichung von der richtigen Schwingungsform beim elektromagnetischen Apparat (Fig. 15) viel grösser sein müsste als beim Unterbrechungsapparat, (Fig. 5). Beim elektromagnetischen Apparat ist es ja möglich, dass bei rascher Drehung die Amplitude des fehlerhaften Klanges, der im nichthomogenen Theile des Feldes entsteht, *grösser* ist als die Amplitude des gewünschten Klanges, der im homogenen Theile des Feldes, zwischen den Spulen *aa* (Fig. 20) entsteht. Beim Unterbrechungsapparat sind jedoch die ungewünschten Vor- und Nachschwingungen der Telephonmembran stets *kleiner* als die Sinus-Schwingungen, die das Telephon macht in der Zeit, in welcher die Federn Kontakt mit der Scheibe machen.

Und da man dennoch mit dem elektromagnetischen Apparat *wohl*, mit dem Unterbrechungsapparat dagegen *gar keine* verständlichen Laute bekommt, so kam mir nachher der Gedanke, dass meine Erklärung der schlechten Wirkung des Unterbrechers doch nicht ganz richtig sein könnte.

Die Ursache des Fehlers könnte auch wohl teilweise in der Reibung der Kontaktfedern oder Rollen auf den Hartgummisegmenten liegen. In diesem Falle wäre es zu empfehlen, den Apparat derart umzuändern, dass die Kontaktfedern stets auf Metall liegen; die

Hartgummisegmente wären dann durch *totde* Metallsegmente zu ersetzen.

Es schien mir aber besser einen Versuch mit dem bekannten Turbinenunterbrecher der Allgemeinen Elektrizitäts-Gesellschaft zu machen. Man ist bei diesem Apparat von Reibung und Abnutzung von Metall auf Metall oder Kohle auf Metall gänzlich frei, was nur ein grosser Vorteil sein kann.

Bevor ich jedoch mit dem Turbinenunterbrecher zu experimentieren anfang, habe ich noch versucht ob es, *unabhängig von elektrischen Einflüssen*, möglich wäre bei 160 Unterbrechungen pro Sek. (genügend für dem Vokal I) eine gute Artikulation zu erhalten. Ich schnitt dazu ein Sprachrohr entzwei und stellte in der Schnittöffnung eine durchlöchernte Scheibe auf, welche darin gedreht werden konnte. Um den „violent agitations“ (S. 6) vorzubeugen, wurden die Löcher in der Scheibe so wie die daran grenzenden Oeffnungen der Sprachrohre mittels Goldschlägerhaut abgeschlossen. Es war mir jedoch nicht möglich durch diese 4 hinter einander aufgestellten Membrane, die einen Durchmesser von 10 mM. hatten, einen Laut zu hören. Da bei grösserem Durchmesser der Membrane der Apparat zu gross werden würde, habe ich die Versuche in dieser Richtung nicht fortgesetzt.

Auf Seite 8—9 habe ich eine Methode angegeben, nach welcher ich versuchte meinen Zweck dadurch zu erreichen, dass ich die Linie unterbrach und wieder schloss in den Augenblicken, in welchen sie stromlos war.

Es giebt aber ein weit einfacheres Mittel, wobei man *nur* Kurzschluss benützt und wobei Schliessen und Oeffnen der Linie ganz überflüssig ist, wie in Fig. 23 schematisch angedeutet ist. So lange *ab* und *cd* geschlossen sind, bekommt 4 Strom von 3. Sind dagegen *be* und *ef* geschlossen, so erhalten 1 und 2 Strom von einander.

Man würde auf diese Weise schon mit nur einem Unterbrecher an jeder Station für Doppeltelephonie auskommen (vergl. Fig. 24). Dieser Unterbrecher muss dann aber 2 Quecksilberstrahlen geben, oder einen breiten Strahl, damit nicht 2 Ströme (z. B. *ab* und *be*, Fig. 23) zugleichzeitig unterbrochen seien. Mit einem schmalen Quecksilberstrahl würde das *wohl* der Fall sein können, wenn nämlich der Strahl ein Segment verlassen und das andere noch nicht erreicht hat.

Der wohlbekannte Turbinenunterbrecher, mit welchem die unten beschriebenen Versuche gemacht wurden, ist zweifelsohne ein aus-

gezeichnetes Instrument. Ich hatte mir bei diesem Apparat verschiedene Kontaktringe angeschafft, und zwar solche mit 2 4 6 8 und 12 Ausschnitten, um weit aus einander liegenden Unterbrechungszahlen zu bekommen. Die Ausschnitte hatten bei sämtlichen Ringen denselben Winkelwerth wie die Kontakte. Dieser Unterbrecher wurde nun als Brücke zwischen 2 Telephonlinien aufgestellt, also etwa wie es mit dem Rade f in Fig. 6 der Fall war. Es ergab sich jedoch sofort, dass der drehende Unterbrecher selber einen sehr störenden Ton in dem Telephon erzeugte. Es bildet offenbar die (vernickelte) rotierende Stahlscheibe mit dem (vernickelten) kupfernen Kontaktring und dem Alcohol, in welchem beide sich befanden, ein galvanisches Element. Dreht sich der Apparat, so ist dies Element in sich selbst geschlossen so lange der Quecksilberstrahl Kontakt macht zwischen der rotierenden Scheibe und dem Kupferring; und so lange sendet es also keinen Strom in das Telephon. So wie aber der Quecksilberstrahl durch einen Ausschnitt des Kupferinges spritzt, ist der innere Kurzschluss des Elements unterbrochen und das Telephon erhält Strom.

Dass diese Erklärung die richtige ist, zeigte folgender Versuch: es wurde der stillstehende Unterbrecher mit einem Telephon und einem Neef'schen Hammer verbunden. So wie dieser letztere in Schwingungen gebracht wurde, war ein sehr deutlicher Ton im Telephon zu hören. ¹⁾

Um davor sicher zu sein, dass dieser Ton seine Entstehung nicht der Induktion durch den in der Nähe der Linie befindlichen Elektromagneten verdankte, wurden die beiden Klemmschrauben des Turbinenunterbrechers durch einen Metalldraht mit einander verbunden: der Ton war damit sofort verschwunden.

Der obengenannte Fehler des Unterbrechers liess sich dadurch leicht vermeiden dass ich denselben mit Petroleum statt mit Alcohol füllte, es herrschte danach in einem mit dem drehenden Unterbrecher verbundenen Telephon vollkommene Stille. Auch erzeugte jetzt der mit einem Telephon und dem schwingenden Neef'schen Hammer verbundene stillstehende Turbinenunterbrecher gar keinen Ton im Telephon.

Bei den ersten Experimenten, die ich mit diesem Unterbrecher machte, waren die Resultate sehr verschieden und desswegen unzu-

¹⁾ Es wurde selbstverständlich zu diesem Versuch ein sogenannter Doppelunterbrecher gebraucht, d. h. ein solcher mit 2 von einander unabhängigen Unterbrechungsrichtungen, wovon die eine nur dazu dient, den Stromkreis zu öffnen und zu schliessen in welchem sich der Elektromagnet und die ihn betätigende Batterie befindet.

verlässig. Während ich das eine Mal bei einer gewissen Unterbrechungszahl sehr schöne Klänge in dem Telephon erhielt, ungefähr eben so gut wie bei der gewöhnlichen Telephonie, bekam ich ein anderes Mal bei derselben Unterbrechungszahl sehr hässliche und fast ganz unverständliche Laute. Ich konnte zur Erklärung dieser Erscheinung nur annehmen, dass der Unterbrecher gar nicht funktionierte, wenn das Telephon so sehr deutlich sprach! Um mich nun stets davon überzeugen zu können, dass bei meinen Experimenten der Unterbrecher wirklich einen periodischen Kurzschluss bildete, traf ich die in Fig. 25 skizzierte Einrichtung: a und b sind die Klemmschrauben des Turbinenunterbrechers, welche also mit einander verbunden sind in den Augenblicken wo der Quecksilberstrahl den Kontaktring trifft. f ist der Anker eines Relais, welcher im Ruhezustande stets mit der Schraube c in Kontakt ist. Befindet sich das Relais in dieser Lage und wird in Station II gesprochen, so gehen die Telephonströme während der Periode, in welcher das Quecksilber auf den Kontaktring spritzt, von b nach a , durch den Anker f über c , d und e , und so zurück nach Station II. Da dieser Weg $b a f c d e$ einen äusserst geringen Widerstand hat, so erhält das in Station I befindliche Telephon während dieser Periode (praktisch) keinen Strom.

In Station I befindet sich ausserdem noch ein Flammentelephon V ¹⁾ (vergl. auch Fig. 26) das mit einer Batterie h zwischen die Kontaktklemme g und Punkt i der Telephonleitung geschaltet ist. Vor dem Flammentelephon ist ein von einem Elektromotor getriebener drehender Spiegel aufgestellt; ausserdem befindet sich in Station I noch ein Morsetaster, der mit einer Batterie und mit dem Elektromagnet K des Relais verbunden ist. Den drehenden Spiegel, den Morsetaster und die Batterie mit der Leitung nach K habe ich, um die Figur nicht undeutlich zu machen, nicht gezeichnet.

Wenn jetzt der Beobachter in Station I seinen Morsetaster herunderdrückt, so wird der Relaisanker angezogen und Kontakt mit g bilden. Falls nun der Unterbrecher richtig funktioniert, so wird die Batterie h einen intermittirenden Strom in die Leitung $h g f a b i V$ senden und der Beobachter wird sich am Flammenbild im rotierenden Spiegel jeden Augenblick davon überzeugen können.

Die Umdrehungsgeschwindigkeit des Unterbrechers wurde auf folgende Weise bestimmt: Auf die Achse des Unterbrechers war ein kleines Uhrrad von 24 Zähnen aufgesteckt, gegen welches eine Visitenkarte leise angeedrückt wurde. Aus der Höhe des so entstan-

¹⁾ Phys. Zeitschrift, 2 Jahrgang, No. 47, S. 676.

denen Tones liess sich durch eine einfache Rechnung die Unterbrechungszahl finden.

Die auf diese Weise erhaltenen Resultate waren folgende:

46 Unterbrechungen pro Sek. Grabstimme, aber Alles ziemlich gut zu verstehen. Von einer gesungenen Melodie kamen sämtliche Töne ziemlich in *einer* Tonhöhe herüber. Eine Stimmgabel $F3 = 340$ D. S. wurde vor dem Mikrophon aufgestellt. Nach MAYER's Formel sollte diese mit 47 Wechsel pro Sek. einen ruhigen Ton geben. Man hörte jedoch vom Eigenton der Gabel ungefähr gar nichts, wohl aber einen sehr tiefen Ton, den ich auf ungefähr $b = 124$ D. S. schätzte.

77 Unterbrechungen pro Sek. Dasselbe wie bei 46; auch jetzt schien die Stimmgabel den Ton b zu geben.

82 Unterbrechungen pro Sek. Grabstimme, Alles ziemlich gut zu verstehen. Von einer gesungenen Melodie waren nur 3 Töne von einander zu unterscheiden, die jeder ungefähr einen Halbton aus einander lagen. Einen sehr merkwürdigen Eindruck machte es, wenn man unmittelbar nach einander die Klänge ohne Obertöne und danach die gewöhnlichen Telephonklänge abhörte. Es wurde dazu die Leitung vom Flammentelephon zur Batterie h (Fig. 25) während einer kurzen Zeit unterbrochen und danach der Morsetaster hinunter gedrückt, wodurch der Relaisanker den Kontakt mit c löste.

110 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen sehr hässlich und schwer zu verstehen, schwieriger als bei 82. Nur mit Aufmerksamkeit ist der grösste Teil zu verstehen. Singen sehr hässlich.

165 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen grösstenteils zu verstehen, jedoch so hässlich, dass es nicht brauchbar ist. Es schien mir etwas leichter zu verstehen als bei 110.

220 Unterbrechungen pro Sek. Sprechen sehr schlecht, nur wenige Wörter werden verstanden. Von einer gesungenen Melodie waren mehr Töne zu unterscheiden als bei 82, dennoch war es sehr schlecht.

330 Unterbrechungen pro Sek. Kein Wort zu verstehen.

Ich habe hiernach noch folgende 2 Experimente gemacht, wobei die Telephonströme während der Kurzschlussperioden nicht auf 0 reduziert waren, sondern zwar schwach, aber doch noch verständlich blieben. Ich brachte dazu in den Kurzschlusszweig cde (Fig. 25) einen Widerstand von 10 Ohm. Während der Unterbrecher nun in Ruhe war und seine beiden Klemmschrauben durch einen Kupferdraht mit einander verbunden waren, konnte man im Telephon Alles gut verstehen, wenn auch die Klänge sehr schwach waren. Der Kupferdraht wurde darauf entfernt und der Unterbrecher

in Bewegung gesetzt. Bei 140 Unterbrechungen war Alles jetzt viel besser verständlich als früher ohne diese 10 Ohm im Kurzschluss, aber schön war es immer noch nicht. Bei 100 statt 10 Ohm im Kurzschluss war Alles Gesprochene im Telephon beinahe eben so gut als bei der gewöhnlichen Telephonie, Singen war jedoch noch ziemlich schlecht.

Da man sich schwerlich einen besseren Unterbrecher als den Turbine-Interruptor denken kann, so glaube ich aus dem obengenannten Resultate schliessen zu dürfen, dass eine Duplex-oder Multiplex-Telephonie mit *plötzlich* unterbrochenen Strömen zu den Unmöglichkeiten gehört. Auch bei jenen Experimenten, wo Alles ziemlich gut zu verstehen war, waren die Klänge so unangenehm, dass von einer Einführung in die Praxis gar keine Rede sein kann.

Die Erklärung der nach dieser Methode erzielten schlechten Resultate ist zweifelsohne die, welche ich Seite 10 schon gab, nämlich dass die Bewegung der Telephonmembran beim Anfang sowohl als am Ende der Klangdauer während einer kurzen Periode nicht mit den von der anderen Station kommenden Telephonströmen übereinstimmt. Die Dauer dieser Vor- und Nachschwingungen, wie wir sie einfachheit halber nennen wollen, ist von der Unterbrechungszahl der Telephonströme unabhängig. Nehmen wir diese Zahl sehr gross, und wird also die Klangperiode sehr kurz, dann ist es denkbar, dass die Zeit, die die Membran braucht um beim Anfang der Klangperiode in die richtige Schwingungsform zu geraten, eben so gross oder grösser ist als die Klangperiode selbst. Auf diese Weise würden wir also aus dem Telephon nichts heraus bekommen als die Vor- und Nachschwingungen, während von denjenigen Schwingungen, um welche es uns eigentlich zu tun ist, nichts zu hören sein würde.

Diese Erklärung stimmt auch mit der Tatsache überein, dass z. B. bei 330 Unterbrechungen gar nichts zu verstehen ist, während bei z. B. 46 Unterbrechungen Alles ziemlich gut verstanden wird, obgleich bei dieser langsamen Bewegung des Unterbrechers die Obertöne gänzlich fehlen.

Wenn das Telephon nur zu schwachen Tönen angeregt wird, so wird die Dauer der Vor- und Nachschwingungen kürzer sein. Wenn man also bei einer gewissen Unterbrechungszahl und unter Benützung kräftiger Telephonströme das vom Telephone gesprochene nur mangelhaft versteht, so könnte man erwarten dass man mit schwächeren Telephonströmen bei derselben Unterbrechungszahl eine bessere Verständigung würde erreichen können. Um diesen Versuch

zu machen, schaltete ich einen Morse Taster und einen Bifilarwiderstand von 50 Ohm zwischen Mikrophon und Primärdraht des Transformators. Wurde der Taster heruntergedrückt, so befanden sich diese 50 Ohm in der Primärleitung, wodurch die in der Sekundärleitung induzierten Telefonströme bedeutend geschwächt wurden.

Herr Prof. DE HAAS ¹⁾ hatte die Güte, diese Experimente mitzumachen. Die auf diesem Wege von uns erzielten Resultate waren folgende:

1. Bei 330 Unterbrechungen war kein einziges Wort zu verstehen, gleichgiltig ob der Taster herunter gedrückt war oder nicht.

2. Bei 220 Unterbrechungen war dann und wann mal ein Wort zu verstehen; ob der Taster herunter gedrückt war oder nicht, machte gar keinen Unterschied.

3. Bei 165 Unterbrechungen meinte Herr DE HAAS, dass das Telephon merkbar deutlicher sprach als der Taster niedergedrückt war. Ich dagegen verstand das Gesprochene bequemer, wenn der Taster nicht niedergedrückt war. Dieser Unterschied in der Beobachtung ist auf zweierlei Weise zu erklären: 1. ist meine Gehörschärfe etwas unter der normalen und 2. bin ich durch meine vieljährigen Experimente mehr als Prof. DE HAAS daran gewöhnt, qualitativ schlechte Laute noch zu analysieren. Einen endgültigen Beweis für die Annahme, dass schwächere Klänge bei 165 Unterbrechungen besser verständlich sind als stärkere kann man freilich nicht aus diesem einen Versuch herleiten, höchstens ergibt sich daraus die *Wahrscheinlichkeit* für die Richtigkeit der Annahme.

Wenn wir das Bell Telephon in Station I Fig. 25 ersetzen könnten durch irgend einen telephonischen Empfänger, dessen schwingender Teil passiver und weniger steif als die Telephonmembran ist, so könnten wir erwarten, dass die Vor- und Nachschwingungen bei diesem Apparat kürzere Zeit dauern würden als es beim Telephon der Fall ist. Wir würden daher vielleicht bei einer Unterbrechungszahl, die zu gross ist, um das Bell Telephon noch

¹⁾ Herr DE HAAS hatte auch die Güte, mit meinem Apparate die auf S. 26 beschriebenen Experimente in Bezug auf die Verständlichkeit des gesprochenen Wortes mit Unterbrechungszahlen von 46—330 pro Sek. zu wiederholen. Er erhielt genau dieselben Resultate wie ich sie bekommen hatte, nur mit dem kleinen Unterschied, dass er das Sprechen bei 165 Unterbrechungen nicht deutlicher verstand als bei 110, während das bei mir wohl der Fall war. Dieser Unterschied ist jedoch von keiner prinzipiellen Bedeutung, da vielleicht in einem Fall etwas deutlicher, vor dem Mikrophon gesprochen wurde als im anderen Fall. Ausserdem funktioniert das Mikrophon nicht immer gleich gut.

deutlich sprechen zu lassen, mit diesem passiveren Empfänger noch verständliche Resultate erhalten können.

Einen solchen Empfänger besitzen wir im sprechenden Kondensator; die Papierblätter und die Zinnfolie sind unzweifelhaft viel schlaffer und passiver als die Telephonmembran. Das mit einem solchen Apparat gemachte Experiment bestätigte vollkommen die Richtigkeit dieser Behauptung. Das Telephon in Station I, Fig. 25, wurde durch einen Kondensator mit einer Ladungsbatterie von 21 Volt ersetzt. Da der Kondensator bei einer so geringen Ladespannung dem Bell Telephon an Empfindlichkeit sehr nachsteht, so wurde sehr laut in das Mikrophon in Station II gesprochen; die Mikrophonbatterie bestand aus 2 Akkumulatorelementen. Um die mit dem Telephon und mit dem Kondensator erhaltenen Resultate bequem vergleichen zu können, habe ich sie hierunten neben einander niedergeschrieben.

Kondensator.	Telephon. (vergl. S. 26.)
Anzahl der Unter- brechungen.	Anzahl der Unter- brechungen.
165. Alles gut zu verstehen. Hässlicher Klang.	165. Grösstenteils zu verste- hen. Hässlicher Klang.
220. Grösstenteils zu verste- hen. Hässlicher Klang.	220. Dann und wann mal ein Wort zu verstehen.
330. Dann und wann ein Wort zu verstehen.	330. Gar nichts zu verstehen.

Bei 49 und 73 Unterbrechungen war Alles mit grösster Leichtigkeit im Kondensator zu verstehen, obgleich die Obertöne selbstverständlich dabei fehlten.

Der Kondensator gab bei diesen Experimenten auch einen Ton wenn gar keine Töne vor dem Mikrophon hervorgebracht wurden. Dieser mit der Unterbrechungszahl übereinstimmende Ton war jedoch nicht sehr stark und daher wenig störend. Auch das Telephon in Station II gab denselben Ton, jedoch viel kräftiger. Die Ursache dieser Töne liegt offenbar darin, dass das Papier des Kondensators nicht genügend isolirte, wodurch fortwährend ein Strom der 21 Volt-Batterie durch den Kondensator ging. In den Perioden, in welchen der Kurzschluss geschlossen war, folgte dieser Strom dem Weg *im b a f c d e l i*. In der Zeit, in welcher der Kurzschluss geöffnet war, war der Stromweg: *im n*, Telephon in Station II, *o e l i*. Im ersten Fall hatte dieser Strom (praktisch) nur den Widerstand des Kondensators zu überwinden, im zweiten Fall durchfloss er

dagegen auch noch das in Station II befindliche Telephon. Es war dadurch die Stromstärke bei offenem Kurzschluss grösser als bei geschlossenem Kurzschluss und diese periodische Aenderung der Stromstärke gab im Telephon in Station II einen Ton und ebenso im Kondensator, der periodischen Aenderung der Potentialdifferenz zwischen den beiden Belegungen zufolge.

Ein Glimmerkondensator würde, seiner besseren Isolirung wegen, diesen Eigenton vermutlich nicht geben. Um diesen fortwährend sprechen zu lassen, müsste man dann aber jedesmal die Ladungsbatterie unterbrechen oder umkehren.¹⁾ Da jedoch das Experiment dadurch ziemlich komplizirt wird, habe ich mit einem solchen Kondensator nicht experimentirt. Wahrscheinlich würde ein Kreuz-Kondensator²⁾ mit Glimmerisolirung ohne Umkehrung oder Unterbrechung der Ladungsbatterie und ohne Eigenton eine fortwährende Artikulation geben. Ich hatte jedoch einen solchen Apparat damals nicht zur Verfügung.

Wir haben das Nichtgelingen unserer Versuche, bei plötzlicher Unterbrechung eine gute Sprachübertragung zu erreichen, bisjetzt nur physikalischen Ursachen zugeschrieben. Es ist aber sehr wahrscheinlich, dass auch noch physiologische Erscheinungen darin eine Rolle spielen und somit zur Unbrauchbarkeit der unterbrochenen Klängen beitragen.

Nach KÖNIG³⁾ hört man, wenn man eine Stimmgabel hinter einer durchlöcherten rotierenden Scheibe tönen lässt, ausser dem Eigenton der Gabel, noch 2 andere Töne („les sons de variation”) und unter gewissen Umständen kommt sogar noch ein vierter Ton hinzu. („le son d'intermittence”).

Um nun zu untersuchen, in wie fern diese physiologische Erscheinung auf die Verständlichkeit der unterbrochenen artikulirten Klänge von Einfluss ist, werden wir unsere Experimente derart einrichten müssen, dass die bisjetzt gefundenen physikalischen Störungen ganz umgangen werden. Die einzige Methode, die ich mir als einigermaassen dazu geeignet denken kann, ist auf der Anwendung von Selenzellen basirt. Denkt man sich eine solche Zelle als Kurzschluss zwischen den beiden Linien und wird sie von einer

¹⁾ Vergl. meinen Aufsatz „Het polariseeren van telefonische ontvangers”. Kon. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, Sitzung vom 27/3 1897. Auch „Archives Néerlandaises”, Serie II, T. 1.

²⁾ Vergl. meinen Aufsatz „Het gebruik der ladingsbatterie in de telefonie”, Maandblad voor Natuurwetenschappen, 1885 No. 1 & 2. Auch „Archives Néerlandaises”, T. XX.

³⁾ Dr. RUDOLPH KÖNIG, „Quelques Expériences d'Acoustique”, p. 139.

hinter einer sich drehenden Löcherscheibe befindlichen Lichtquelle periodisch beleuchtet, so wird der Schall im Empfänger periodisch schwächer und stärker werden und diese Abschwächung und Verstärkung wird hier nicht plötzlich sondern allmählich stattfinden. Verursacht die Selenzelle bei dieser intermittirenden Beleuchtung nicht auch einen Eigenton im Telephon, so sind wohl alle Störungen physikalischer Art ausgeschlossen und spricht das Telephon dann noch undeutlich, so kann der Fehler nur durch physiologische Gründe verursacht sein.¹⁾ .

Ist das wirklich der Fall, ergibt sich also aus dem Experiment dass diese physiologische Erscheinung im Stande ist die Sprachwiedergabe des empfangenden Telephons unbrauchbar zu machen, so können wir mit Sicherheit behaupten, dass eine Duplex-oder Multiplex-Telephonie sowohl mit *plötzlich* als mit *allmählig* unterbrochenen Strömen zu den Unmöglichkeiten gehört.

Wenn es möglich wäre, eine Selenzelle zu fertigen, die so empfindlich und so schnell wirkend wäre, dass das empfangende Telephon während der Beleuchtungsperiode der Zelle keinen hörbaren Strom erhielte, so hätten wir auf diese Weise einen periodisch und graduell unterbrochenen Strom. Zeigt sich nun durch das Experiment dass die obengenannte physiologische Komplizierung ein brauchbares Sprechen des Telephons nicht verhindert, so wäre eine Doppeltelephonie möglich mittels 4 Selenzellen, welche wie die Kurzschlüsse der Fig. 23 mit der Leitung verbunden sind. Sind *ab* und *cd* beleuchtet, so seien *be* und *df* in dieser Zeit im Dunkeln und umgekehrt. Auf diese Weise würde man also für eine Doppeltelephonie nur 2 synchron laufende Löcherscheiben, an jedem Ende der Linie eine, benötigen.

Ich hoffe bald Gelegenheit zu finden die Untersuchung in diesem Sinne fortzusetzen und zu erproben, was sich mit guten Selenzellen in dieser Richtung erreichen lässt.

¹⁾ Ein kleiner Fehler physikalischer Art ist hierbei nicht ganz ausgeschlossen, es wird ja auf diese Weise noch eine geringe Entstellung des Klanges entstehen können. Nehmen wir an, dass ein einfacher (pendelartiger) Ton vor dem Mikrophon hervorgebracht wird, dann wird also die Membran des Empfängers eine Sinusbewegung machen müssen. Aber während der krescirenden und der dekrescirenden Periode wird die Bewegungskurve selbstverständlich von einer Sinuskurve verschieden sein, es wird daher eine Aenderung der Klangfarbe entstehen können. Freilich ist das bei den Krescendo's und Dekrescendo's in unserer Musik auch der Fall, aber dort geschieht das Kresciren und Dekresciren sehr langsam. Bei unserer rotierenden Scheibe dagegen findet dies sehr rasch statt und daher ist es nicht unmöglich, dass diese starke Abweichung von der Sinusform eine merkbare Aenderung der Klangfarbe zur Folge haben wird.

MAYER sagt in einer seiner Abhandlungen (Vol. 47, p. 5—6) er habe durch die vielen Versuche mit unterbrochenen Klängen einen permanenten Fehler an einem seiner Ohren bekommen. Um diejenigen zu beruhigen, welche die Lust, auf diesem Gebiete zu arbeiten, in sich fühlen, teile ich hier mit, dass weder mein Assistent noch ich bei unseren vielen, sich über eine Periode von mehr als 3 Jahren erstreckenden, Versuchen, irgend einen schädlichen Einfluss auf die Gehörorgane gespürt haben.

Es ist mir eine angenehme Pflicht, hier Herrn D. DE WOLFF meinen Dank auszusprechen für die freundschaftliche Hülfe, die er mir sowohl bei der Konstruktion und der Anfertigung der Versuchsapparate als bei dem Experimentiren selbst geleistet hat.

Als die Idee bei mir entstand, Doppeltelephonie dadurch zu erreichen, dass die Stationen paarweise nach einander mit der Linie in Verbindung gebracht würden, glaubte ich, dass dies etwas ganz Neues sei.

Wie ich S. 4 schon mittheilte, war es mir nicht bekannt, ob je Experimente mit unterbrochenen Klängen gemacht waren, sei es in Bezug auf Telephonie oder unabhängig davon.

Ich habe jedoch nachher gesehen, — die Experimente mit dem Apparat der Figur 15 waren damals schon gemacht, — dass meine Idee nicht neu war. Zuerst fand ich im „Handbuch der Telephonie“ von Dr. VICTOR WIETLISBACH, bearbeitet von Herrn Prof. ROBERT WEBER, auf Seite 310, dass schon eine grosse Anzahl von Patenten für dieselbe Idee angemeldet worden waren. Da jedoch keine Namen oder Quellen dabei angegeben waren, habe ich Herrn Prof. WEBER gebeten, mir Näheres darüber mitzuteilen; derselbe antwortete mir jedoch dazu leider nicht im Stande zu sein.

Darauf habe ich weiter gesucht und in erster Stelle eine Erfindung in dieser Richtung von TOMMASI gefunden und zweitens einen Vorschlag von LEBLANC.

Die Tommasi'sche Erfindung ist beschrieben in „Manuel pratique du téléphone“, von SCHWARTZE, G. FOURNIER und TOMMASI, 1^e Partie S. 276—279. Seine Methode stimmt genau mit dem überein was ich mit dem Apparat der Fig. 5 beabsichtigte. Ob jedoch TOMMASI die Ausführbarkeit seiner Idee jemals durch Experimente probirt hat, kommt mir sehr unwahrscheinlich vor. Er schreibt ja „le son est perçu pendant $1/32^{\circ}$ de seconde apres sa cessation“; wenn er experimentirt hätte, so würde er jedenfalls rasch bemerkt haben, dass diese Zeit kleiner wird, wenn der Ton höher wird. Die Mayer'schen Untersuchungen waren ihm jedenfalls unbekannt.

In „la lumière électrique”, 1886 T. XX, S. 101—102, giebt LEBLANC eine Methode für Vielfachtelephonie an, ebenfalls mit unterbrochenen Klängen. Es macht dieser Aufsatz auf mich jedoch den Eindruck dass er mit sehr wenig Ernst niedergeschrieben ist und dass gar nicht versucht worden ist, die Ausführbarkeit der Idee durch das Experiment zu prüfen. Ich verweise daher den Leser auf den Aufsatz selbst, da eine ausführliche Widerlegung uns zu weit führen würde. Ohne von anderen Bedenken zu reden, fällt es einem sofort auf, dass die Bewegung des Eisenstücks *K* (Fig. 7 der genannten Veröffentlichung) wahrscheinlich einen sehr störenden Ton in sämtlichen Telephonen geben wird. LEBLANC giebt in dieser Figur 7 einen Apparat an, der den Zweck hat 16 Stationen zugleichzeit und paarweise mit einander sprechen zu lassen!

Ich will jetzt noch eine kurze Uebersicht geben über die verschiedenen Methoden, nach welchen man versucht hat, *ohne Benützung unterbrochener Klänge* eine Duplex-oder Multiplex-Telephonie zu erreichen.

1. Methode von LEBLANC und HUTIN. Nach der E. T. Z. 1893, N°. 24, S. 351, haben LEBLANC und HUTIN ein Patent angemeldet für eine Art von Vielfachtelephonie, wobei Wechselströme von 100,000 bis 160,000 Perioden pro Sek. benutzt werden sollen. Was dort mitgeteilt wird, ist jedoch zu unvollständig, um sich daraus ein Urteil über die Erfindung machen zu können. Meiner Ansicht nach soll man diese Idee unter die Phantasien und nicht unter die ernstlichen Erfindungen klassifiziren.

2. Methode von LEBLANC. In der schon obengenannten Publikation in „la lumière électrique” giebt LEBLANC S. 99—100 noch eine Idee zur Vielfachtelephonie an, die auf der Anwendung abgestimmter Stimmgabeln beruht, ähnlich dem harmonischen Telegraphen von ELISHA GRAY. Es fehlt, meiner Meinung nach, ein ernstlicher Gedanke darin, eben so wie im anderen oben gegebenen Vorschläge LEBLANC's. Bei einem ersten Versuch, die Ausführbarkeit der Idee durch das Experiment zu prüfen, wird man zweifelsohne erfahren dass, wenn auch die Idee qualitativ sehr sinnreich genannt werden kann, quantitativ nichts brauchbares daran ist.

3. Differentialmethode von ELSASSER. ¹⁾ In Fig. 27 sind *t* und *t* / 1 Transformatoren. Die von *a* erregten Telephonströme ge-

¹⁾ E. T. Z. 1885, S. 283.

langen durch Induktion über den Transformator t in die Linie (Pfeile a) und auf dieselbe Weise über t 1 in das Telephon a 1. Die von b und b 1 kommenden Drähte sind *an die Mitte* eines Transformatoradrathes gekuppelt, wodurch b und b 1 von den von a oder a 1 erregten Strömen nichts hören werden. Die von b erregten Ströme (Pfeile b) werden in den Stromkreisen, in welchen a und a 1 sich befinden, keinen Strom induziren, da die b -Ströme die beiden Hälften des Transformatoradrathes in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. Es werden also a und a 1 von b und b 1 nichts hören.

Es scheint leider diese eben so schöne als einfache Lösung des Problems in der Praxis keine guten Resultate zu geben, da sie eine vollkommen gleiche Isolirung für die beiden Linien voraussetzt, was praktisch nicht ausführbar ist. Auch sind die beiden Linien, wie sie für die Korrespondenz zwischen b und b 1 gebraucht werden, einer dritten Linie gegenüber nicht induktionsfrei. ¹⁾ Von Doppeltelephonie nach dieser Methode kann man eigentlich nicht sprechen. Da man hier 3 Linien für 2 Gespräche braucht, würde man von Anderthalb-Telephonie sprechen müssen.

4. Vielfachtelephonie mittels des Poulsen'schen Telegraphons. Für diese Methode verweise ich auf eine kurze Mitteilung von meiner Hand in der „Physikalische Zeitschrift“, 1905, N°. 18, S. 572 und auf meine Antwort auf eine Bemerkung des Herrn RUHMER dazu in derselben Zeitschrift, 1906, N°. 6, S. 185. Ich habe dort gezeigt dass eine Vielfachtelephonie mit diesem Apparate zu den Unmöglichkeiten gehört.

5. Methode von WILLIAM MARSHALL. ²⁾ In Fig. 28 ist A ein mit 2 Drähten in entgegengesetzter Richtung bewickeltes Telephon, R ein Widerstand, C ein Kondensator und M ein Mikrophon. B ist ein mit Mikrophon und Transformator versehener Telephonapparat, wie in der Praxis gebräuchlich; statt eines Hörtelephons ist der Apparat jedoch mit einem „sprechenden“ Kondensator C versehen. Die korrespondirenden mit Strichen versehenen Buchstaben auf der anderen Station bedeuten die gleichen Apparate.

Wird jetzt in das Mikrophon M 1 von Station II gesprochen, so fließt also ein undulirender Strom durch die Linie. Er geht über den Widerstand R zum Telephon A und wird dieses sprechen lassen. Durch die Aenderung der Stromstärke in der Linie wird

¹⁾ Vergl. auch Schwensky, E. T. Z. 1898, S. 853 und Wietlisbach, Handb. der Telephonie, S. 310—312.

²⁾ „Electrical Engineer“ (New-York) XX, No. 376, 17/7 1895, S. 70. Daraus auch in E. T. Z. 1895, S. 565.

jedoch auch die Ladung des Kondensators C sich ändern, wodurch ein telephonischer Strom auch in der zweiten Wickelung von A hervorgerufen wird. Dieser Strom wird die Wirkung des Telephons A abschwächen. Um diese Abschwächung möglichst gering zu machen, würden sowohl die Kapazität von C wie der Widerstand von R klein sein müssen.

Der von Station II ausgehende undulirende Strom wird auf den sprechenden Kondensatoren der Apparate B und $B1$ eine geringe Aenderung der Ladung verursachen; nach MARSHALL wird diese Aenderung jedoch keinen wahrnehmbaren Klang in diesen Kondensatoren zu Folge haben, in welchem Falle also B und $B1$ von dem zwischen A und $A1$ gehaltenen Gespräch nichts hören werden.

Wird in B gesprochen, so werden die dort erregten *Wechselströme* zunächst zum Apparat B gehen und dort den Kondensator-Empfänger sprechen lassen. Diese Ströme werden jedoch auch durch das Mikrophon M gehen, sich zwischen dem Widerstand R und dem Kondensator C verzweigen und danach die beiden Wickelungen des Telephons A in entgegengesetzten Richtungen durchlaufen. (Es findet natürlich dasselbe statt in Station II über $M1 R1 C1$ und $A1$.) Sind nun diese Ströme in den beiden Wickelungen des Telephons A von gleicher Intensität, so wird das Telephon in Ruhe bleiben und es werden auf diese Weise also A und $A1$ nichts von dem zwischen B und $B1$ gesprochenen hören.

Zu diesem Zweck wird jedoch entweder ein Kondensator C von ziemlich grosser Kapazität oder ein grosser Widerstand R erforderlich sein. Im letzteren Falle wird man mit einem kleinen Kondensator auskommen können da die Aenderungen in der Potentialdifferenz zwischen den beiden Kondensatorbelegungen, und daher auch die Ladungsänderungen, mit R wachsen.

Wir haben jedoch gesehen dass es für eine gute Korrespondenz zwischen A und $A1$ erwünscht ist, eine *kleine* Kapazität und einen *kleinen* Widerstand zu gebrauchen.

Wie nun MARSHALL den Widerstand und die Kapazität gewählt hat, um beiden sehr von einander verschiedenen Anforderungen wenigstens einigermaassen entgegenzukommen, sagt die Beschreibung nicht. Ich vermuthe dass sich beim Experiment zeigen wird dass A und $A1$ ganz entschieden wohl etwas von B und $B1$ mithören werden und umgekehrt ebenfalls.

Ob das Marshall'sche System jemals geprüft worden ist, ist mir nicht bekannt. Die Stationen B und $B1$ würden nach meiner Ansicht mit Vorteil mit gewöhnlichen Hörtelephonen anstatt mit sprechenden Kondensatoren ausgerüstet werden können, wenn man

die Linien bei a und $a1$ unterbricht und dort kleine Kondensatoren einschaltet. Da der sprechende Kondensator viel weniger empfindlich ist als das Telephon, so würde die Korrespondenz zwischen B und $B1$ durch diese Abänderung jedenfalls besser werden.

Ich habe diesen Marshall'schen Vorschlag etwas ausführlich behandelt, weil ich vor vielen Jahren (etwa 1889 oder 1890) in derselben Richtung vergeblich versucht habe das Problem zu lösen.

Meiner Meinung nach können wir also sagen, dass eine praktisch brauchbare Vielfachtelephonie bisjetzt noch nicht erfunden ist. Von den verschiedenen vorgeschlagenen Methoden gelingt nur die sehr schöne Elsasser'sche, aber leider nur als Laboratoriums-Experiment. Die von anderen Seiten vorgeschlagenen Methoden sind wohl meistens gar nicht probirt und die von mir ausprobirten Methoden sind zum Gebrauch ungeeignet.

Es bleibt jedoch die Frage noch unbeantwortet, ob eine Vielfachtelophonie mit *allmählig* unterbrochenen Klängen nicht möglich sei; in wie fern sich für die Praxis etwas daraus machen lässt, hoffe ich später aus dem Experiment kennen zu lernen.

Delft, 22/2 1906.

J. W. GILTAY.

(21 Juli 1906).

Fig. 1.

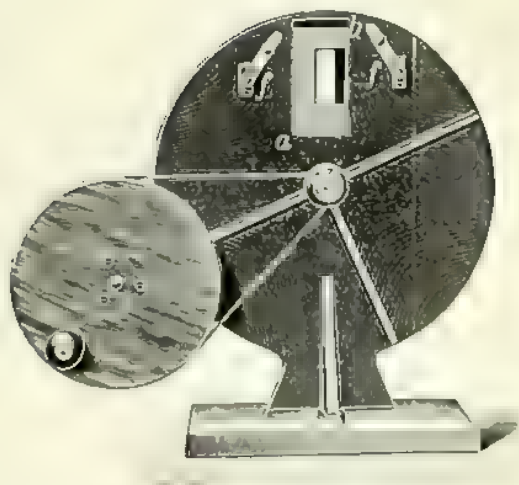


Fig. 3.

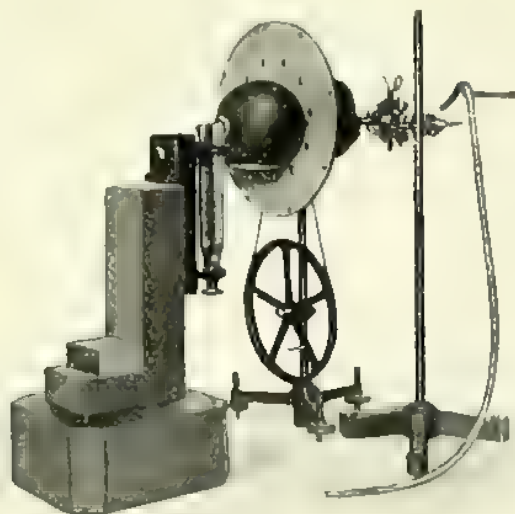


Fig. 2.

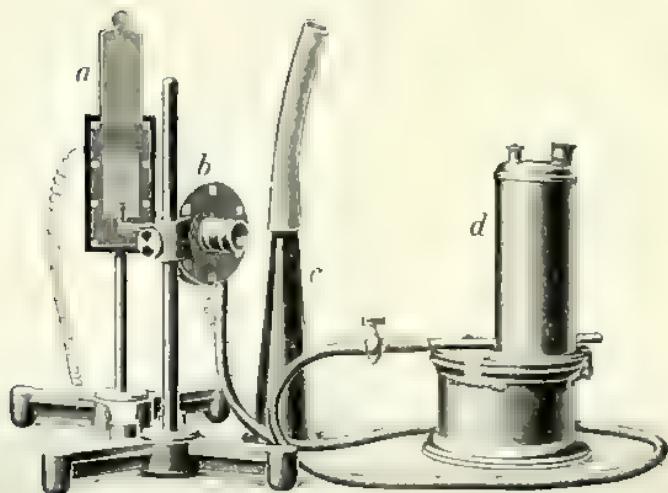


Fig. 4.

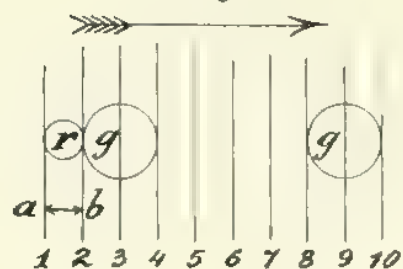


Fig. 5.

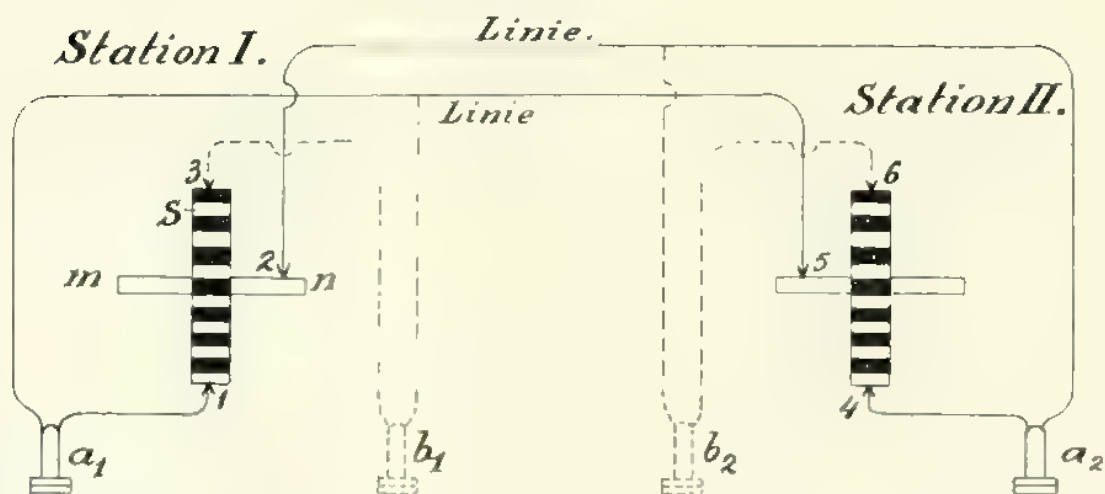


Fig. 6.

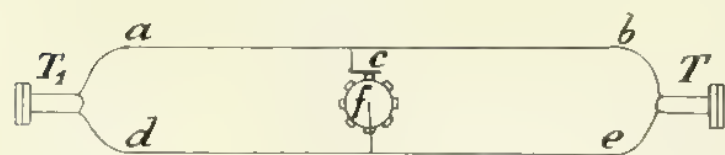


Fig. 7.

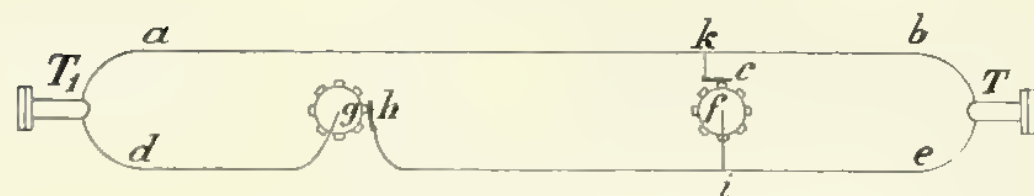


Fig. 8.

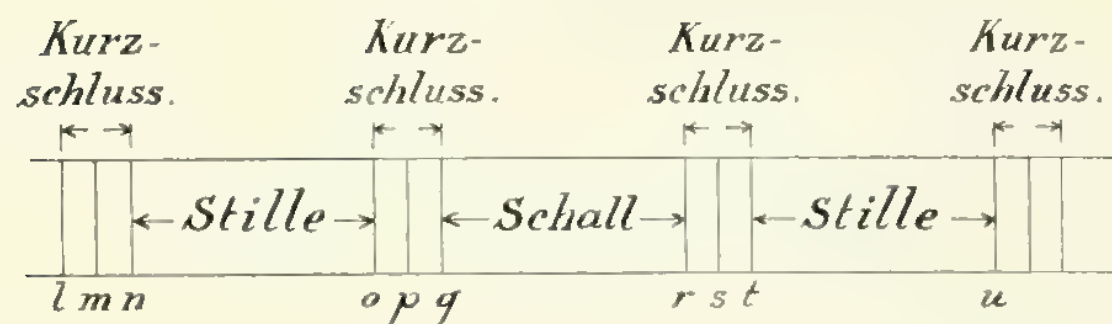


Fig. 13.

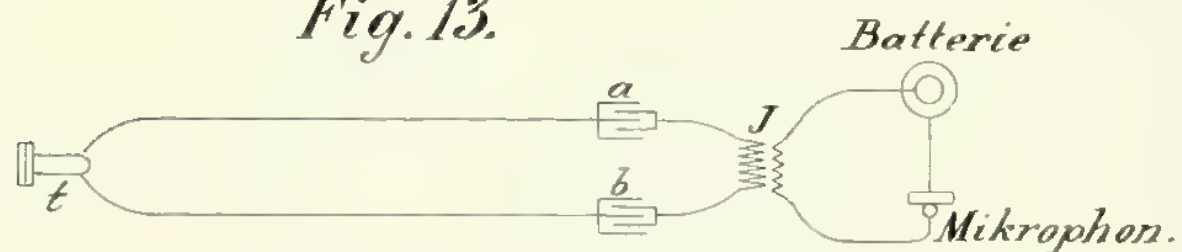


Fig. 9.

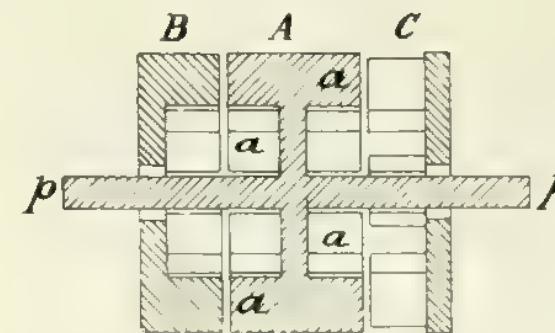


Fig. 10.

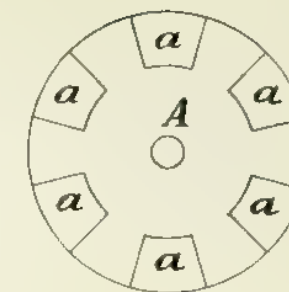


Fig. 11.

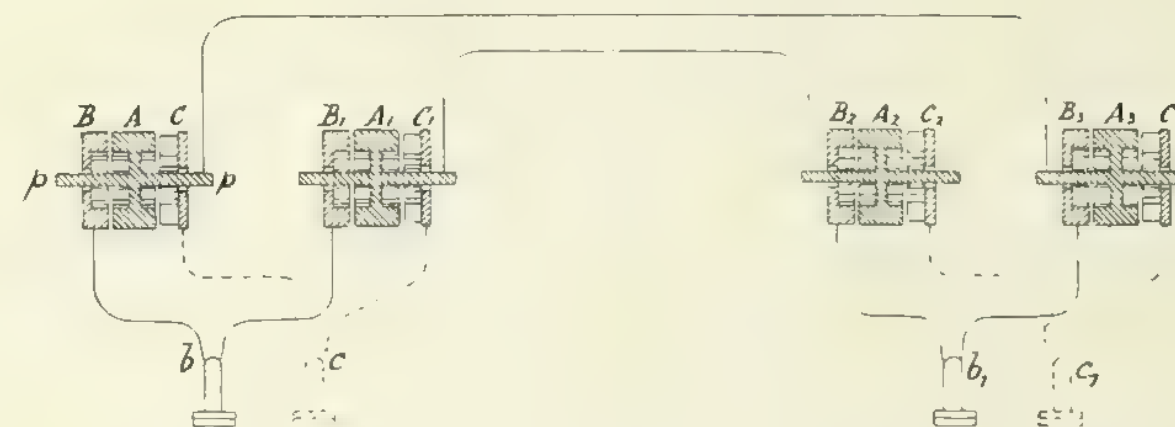


Fig. 12.

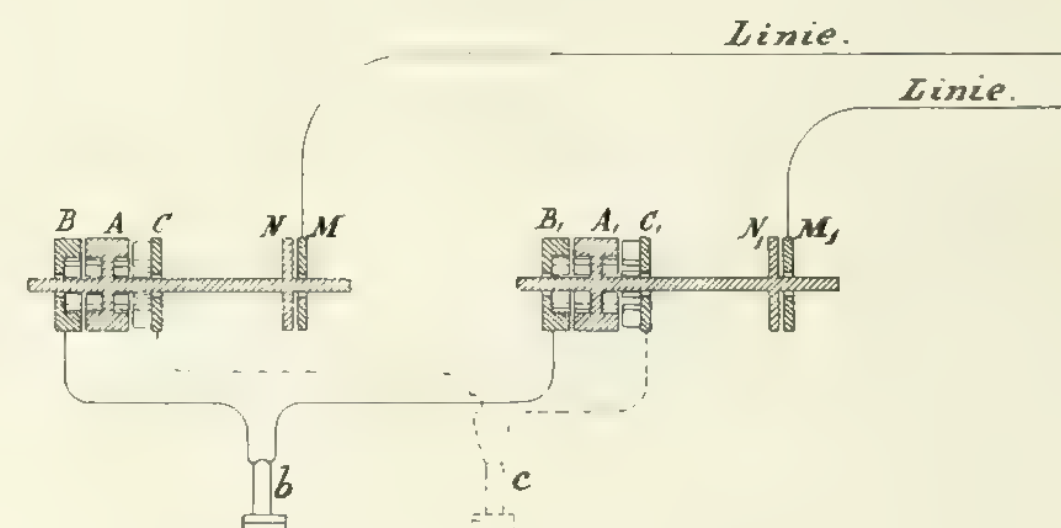


Fig. 14.

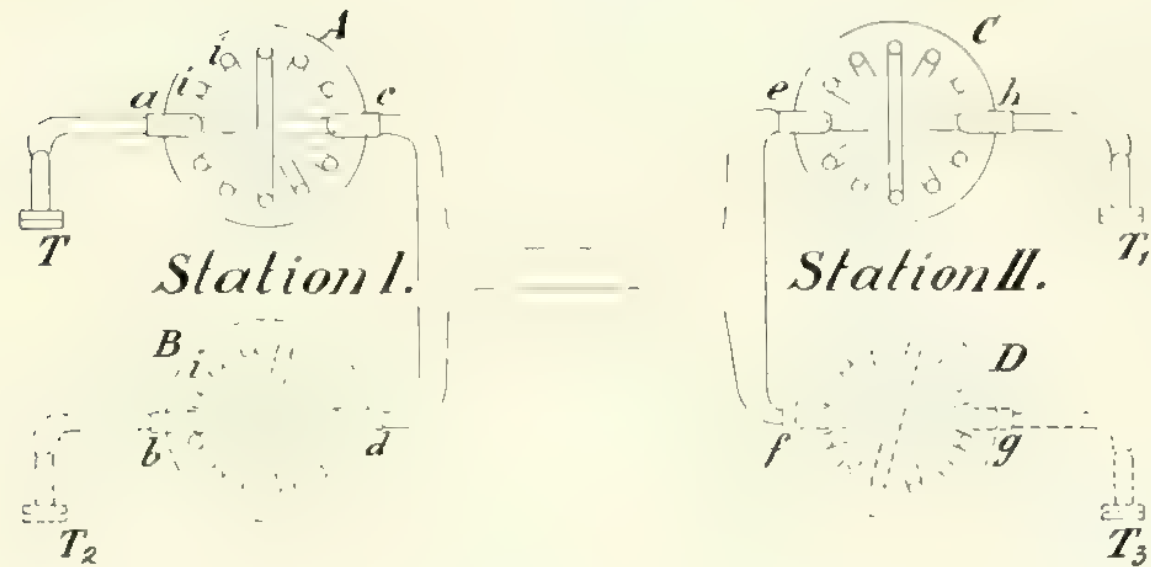


Fig. 16.
1/1



Fig. 17. 1/1.

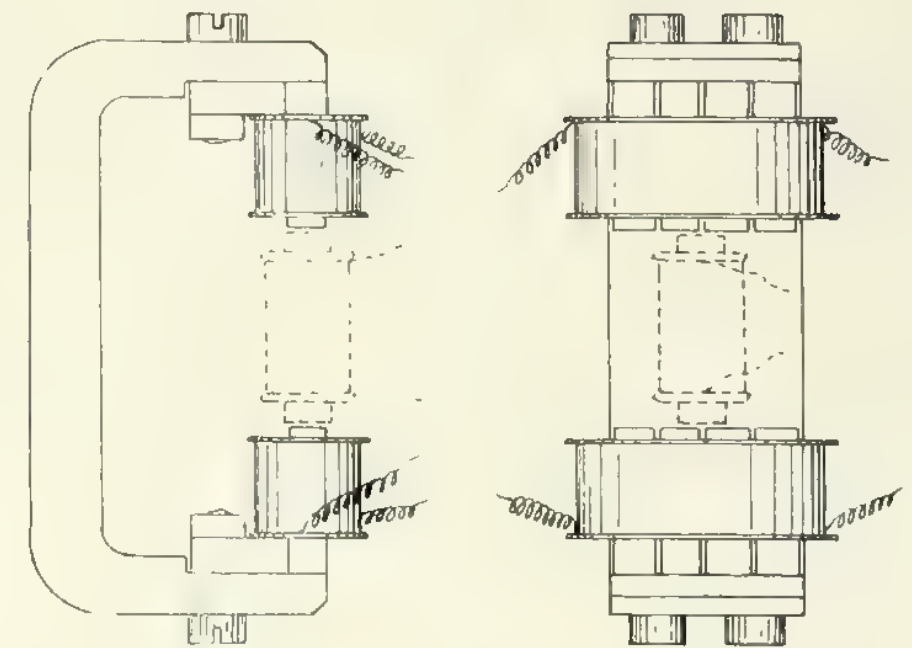


Fig. 15.

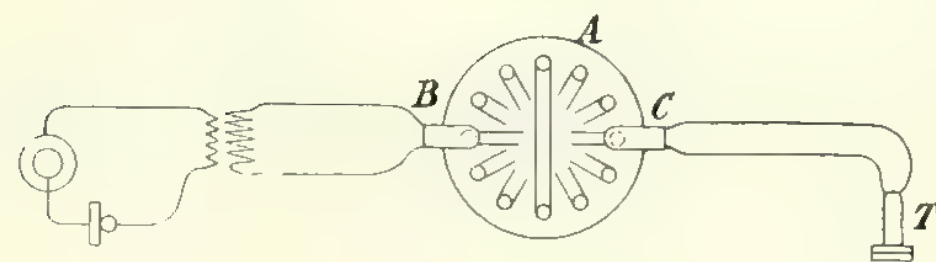


Fig. 20.

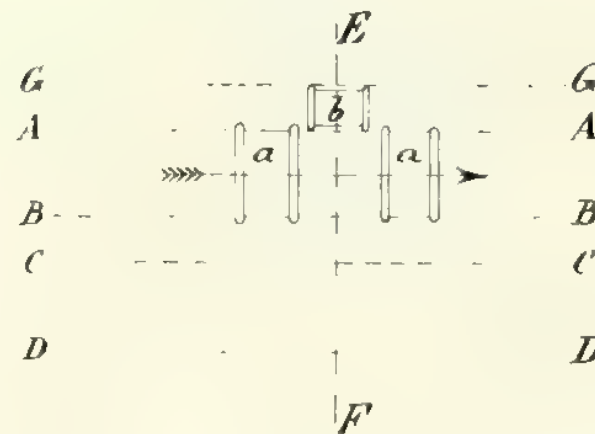


Fig. 18.

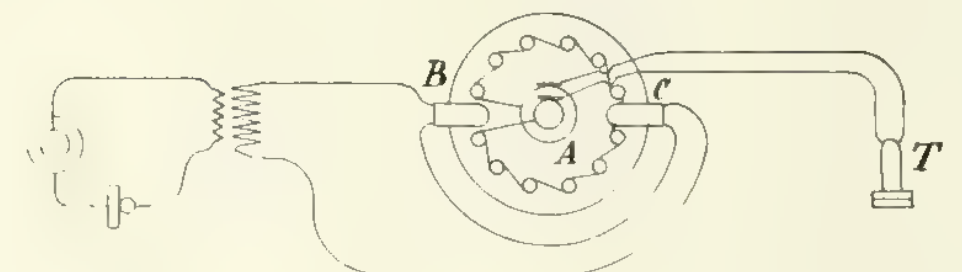


Fig. 19.

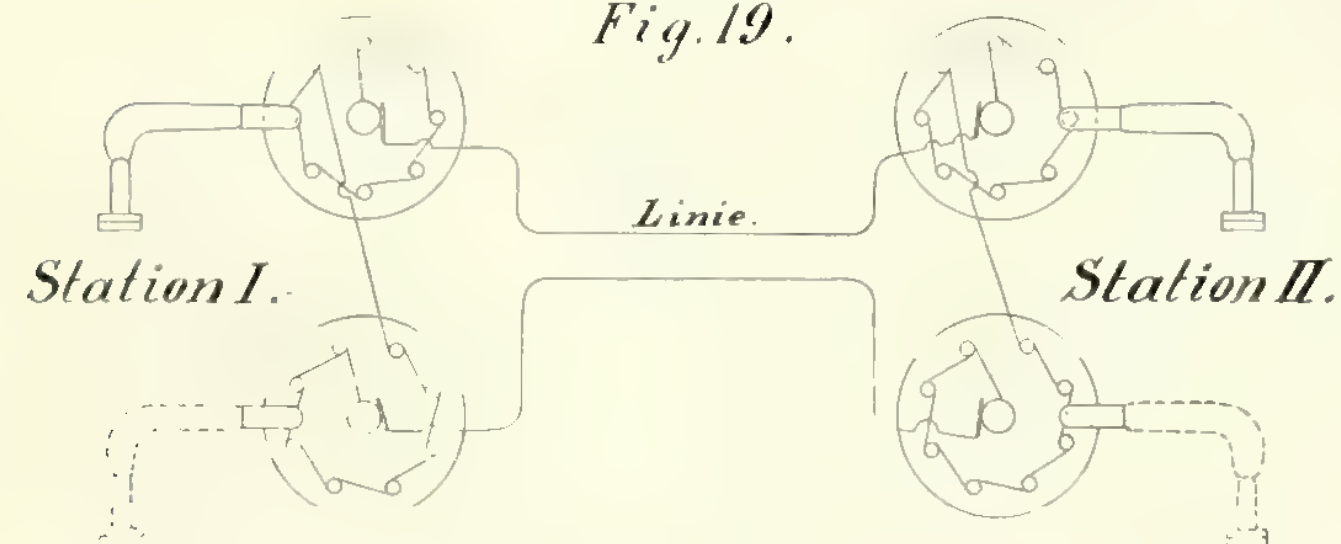


Fig. 21.

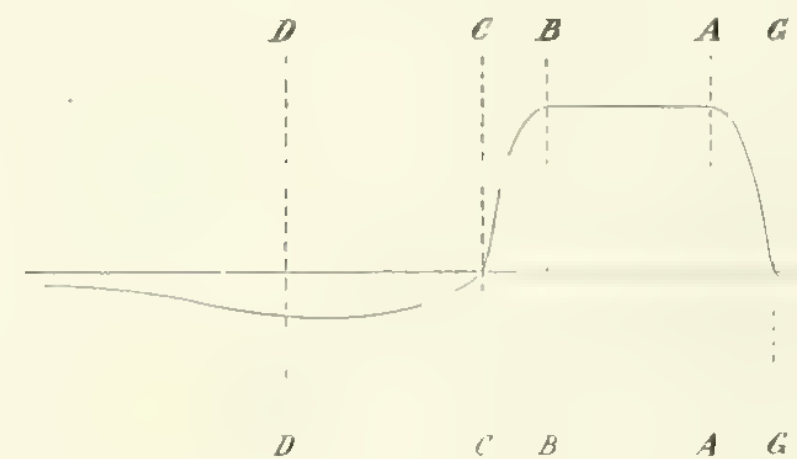


Fig. 22.

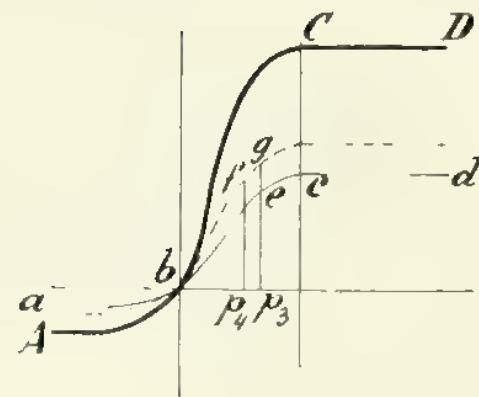


Fig. 23.

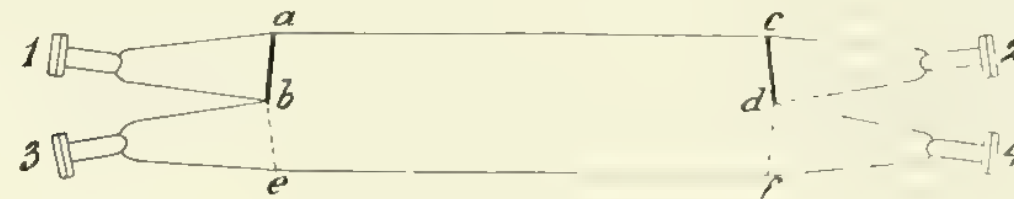


Fig. 24.

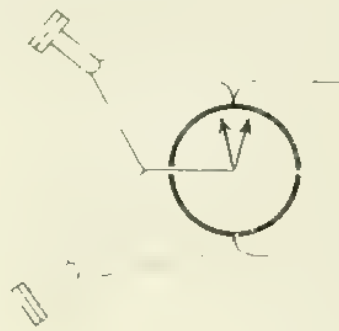


Fig. 26.



Fig. 25.

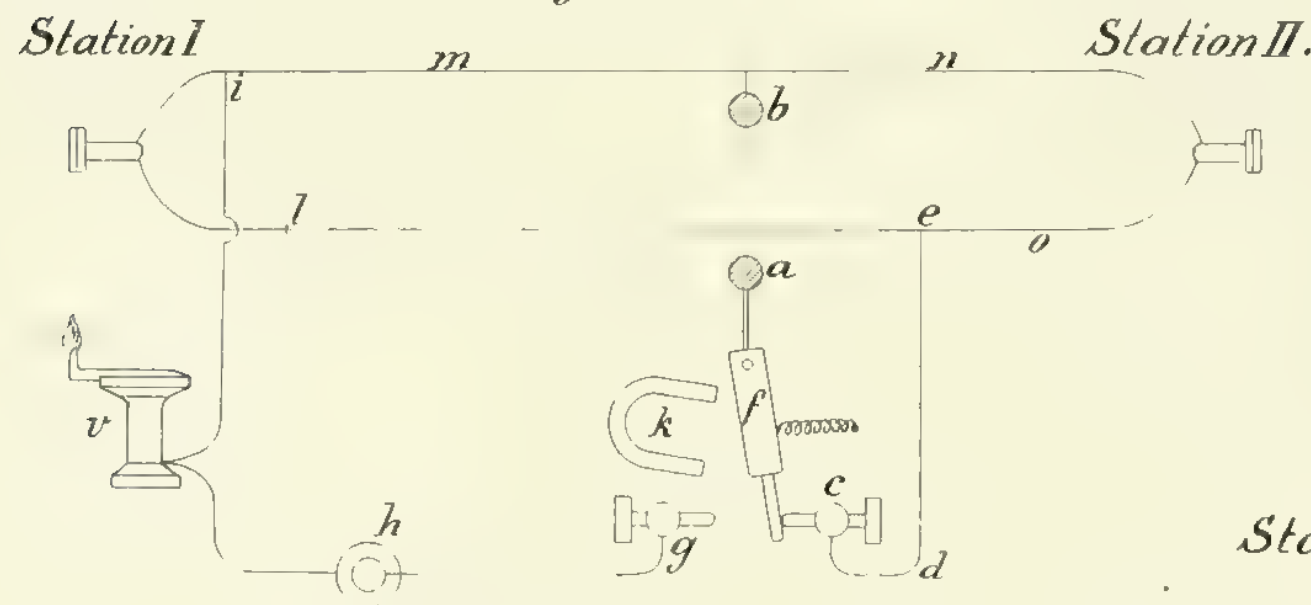


Fig. 27.

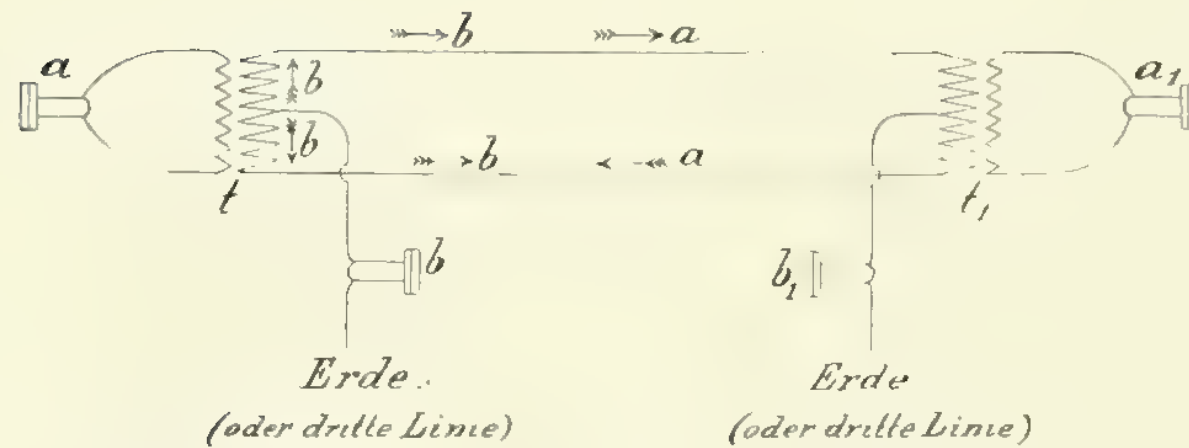
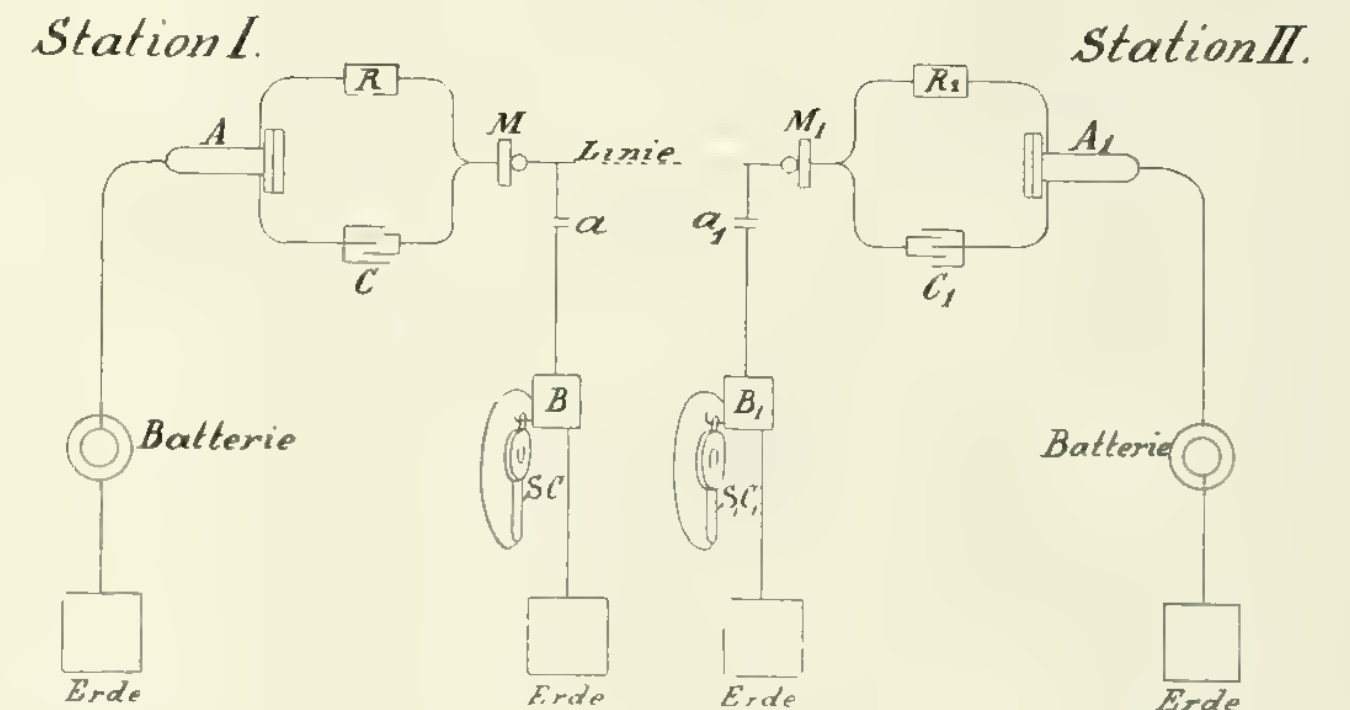


Fig. 28.



Regelmässige Schnitte und Projektionen des
Hundertzwanzigzelles und des Sechshundertzelles
im vierdimensionalen Raume

(2^{te} ABHANDLUNG)

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

DEEL IX. N^o. 4.

MIT 18 TAFELN.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
April 1907.

Regelmässige Schnitte und Projektionen des
Hundertzwanzigzelles und des Sechshundertzelles
im vierdimensionalen Raume

(2^{te} ABHANDLUNG)

VON

P. H. SCHOUTE.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

DEEL IX. N^o. 4.

MIT 18 TAFELN.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1907.

Regelmässige Schnitte und Projektionen des Hundertzwanzigzelles und Sechshundertzelles im vierdimensionalen Raume,

VON

P. H. SCHOUTE.

(ZWEITE ABHANDLUNG.)

1. In der ersten Abhandlung, welche 1894 unter dem nämlichen Titel in den *Verhandeligen* dieser Akademie erschien, entwickelte ich zunächst die vier regulären Koordinatenstellungen der beiden Zelle Z^{120} und Z^{600} mit der Absicht aus diesem Materiale die regulären Schnitte und Projektionen dieser beiden Extrapolytope abzuleiten. Bei der Auswertung dieser Anwendung der genannten Vorarbeit beschränkte ich mich aber auf Zentralschnitte und senkrechte Parallelprojektionen; jetzt will ich, diesen engeren Standpunkt verlassend, mehr allgemein die regulären Parallelschnitte und Zentralprojektionen vorführen. Teilweise ist diese Ergänzung schon geliefert worden, zunächst von Frau A. STOTT, der dritten Tochter des berühmten englischen Mathematikers BOOLE ("On certain series of sections of the regular fourdimensional hypersolids", *Verhandeligen* dieser Akademie, 1900), welche die Güte hatte mir ihre Modellensammlung in Bild zuzuschicken, und nachher von mir selbst (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, Leipzig, Göschen, 1905). Was hier gegeben wird soll aber eine mehr systematische Behandlung des ganzen Materials bilden; in einer dritten Abhandlung will ich dann — sei es auch nur für einen Teil der erhaltenen Resultate — ganz leichte Konstruktionen von parallel-perspektivischen Bildern entwickeln.

2. Es handelt sich bei jedem der beiden Zelle Z^{120} und Z^{600} um nicht weniger als acht Reihen dreidimensionaler Körper, vier Reihen von Schnitten und vier Reihen von Scheinen. Versteht man unter O den Zellmittelpunkt und unter E_0, K_0, F_0, R_0 der Reihe nach irgend einen Eckpunkt, eine Kantenmitte, einen Flächenmittelpunkt und einen Grenzraummittelpunkt, so stehen die Räume der Reihen paralleler Schnitte senkrecht auf den Geraden OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 , welche Zelldiagonale, erste, zweite, dritte Querlinie und sämtlich Hauptstrahlen heissen, während die Punkte P_e, P_k, P_f, P_r dieser Geraden die Zentra und Räume senkrecht auf OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 die Bildräume der Scheinenreihen bilden. Die Untersuchung der sechzehn Polyederreihen reduziert sich aber sofort auf die Hälfte. Denn es lässt sich beweisen, dass irgend eine Zentralprojektion des Z^{120} (oder Z^{600}) mit der Polfigur eines bestimmten Schnittes eines bestimmten Z^{600} (oder Z^{120}) in Bezug auf eine bestimmte Kugel identisch ist. Ist O der Mittelpunkt und OH irgend ein Hauptstrahl eines der beiden Zelle, ist der Raum R_s in M senkrecht zu OH der Schnittraum und P der Schnittpunkt irgend einer Kante AB dieses Zelles Z , ist der Kreis k der Schnitt irgend eines Kugelraumes um O als Zentrum mit der Ebene durch OH und P , welche unsere Bildebene (Fig. 1) bildet, ist p die Polare von P in Bezug auf k und sind S und Q die Pole von PM und PS , so projiziert der in p zur Bildebene senkrechte Raum R_p die Seitenfläche $\alpha\beta$ des in Bezug auf den Kugelraum zu Z reziproken Zelles Z' , welche den Schnitt der zu A und B reziproken Grenzräume R_a und R_b bildet, aus dem Punkte S auf dem Raum R_s als die in Q zur Bildebene senkrechte Ebene, und bildet dies Ebene ε_q die Polare des Punktes P in Bezug auf die Schnittkugel des Raumes R_s mit dem angenommenen Kugelraume. Deshalb ist die Projektion von Z' aus S auf R_s reziprok verwandt mit dem von R_s in Z bestimmten Schnitte in Bezug auf die letztgenannte Kugel und ist die Scheinenreihe von Z' mit Hinsicht auf jeden der Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 bekannt, sobald es die Reihen von Schnitten von Z mit Hinsicht auf jeden der Hauptstrahlen OR_0, OF_0, OK_0, OE_0 dieses Zelles sind. Also können wir uns, ohne die Allgemeinheit zu beeinträchtigen, zu den acht Reihen von Schnitten beschränken.

3. Die drei kennzeichnenden Zahlen e, k, f der Eckpunkte, Kanten, Flächen eines Schnittes hängen immer mittels der bekannten Eulerschen Formel zusammen; denn die sämtlichen Schnitte von Z^{120} und Z^{600} sind überall konvex und deshalb Eulersche Körper. Beschränkt man sich auf den Fall, wo der Schnittraum

keinen Eckpunkt des Zelles enthält, d. h. schaltet man für einen Augenblick die sogenannten "Uebergangsformen" aus, so waltet sogar zwischen e, k, f noch eine zweite Beziehung ob, welche sich jedoch bei Z^{120} und Z^{600} verschieden gestaltet. Man findet nämlich $k = \frac{3}{2}e$ bei Z^{120} und $k = \frac{5}{2}e$ bei Z^{600} . Denn die Seitenflächen der beiden Zelle enthalten reguläre Polygone, d. h. jedes vom Schnitt-raum geschnittene Polygon liefert *eine* Kante und *zwei* Eckpunkte des Schnittes. Ist μ die Zahl dieser Polygone, so hat man also nebst $\mu = k$ entweder $2\mu = 3e$ oder $2\mu = 5e$, je nachdem durch jede Kante drei oder fünf Grenzkörper gehen, d. h. je nachdem entweder Z^{120} oder Z^{600} geschnitten wird. Bei den intermediären, keinen Zelleckpunkt enthaltenden Schnitten genügt es also schon eine einzige der drei Zahlen e, k, f zu kennen.

Die hervorgehobene besondere Eigenschaft der intermediären Schnitte wird auch hierdurch gekennzeichnet, dass ihre Eckpunkte bei Z^{120} sämtlich *dreikantig*, bei Z^{600} sämtlich *fünfkantig* sind. Diese Bemerkung wird uns später nützlich sein.

4. Wir weisen jetzt in allgemeinen Zügen an, wie man jede der drei kennzeichnenden Zahlen e, k, f an und für sich bestimmen kann. Naturgemäss zerfällt die Arbeit dieser Bestimmung in zwei Teile. Zunächst ist den Tabellen der ersten Abhandlung zu entnehmen, wie die Eckpunkte der beiden Zelle sich auf jeden der Hauptstrahlen OE_0, OK_0, OF_0, OR_0 projizieren, und anzugeben, wie diese Eckpunkteprojektionen sich zu zweien zu Kantenprojektionen, zu fünf oder zu drei zu Seitenflächenprojektionen, zu zwanzig oder zu vier zu Grenzkörperprojektionen vereinen. Ist diese Vorarbeit erledigt — und hierauf kommen wir später zurück —, so findet man jede der drei Zahlen e, k, f als Summe zweier Summanden, von welchen der letztere nur bei Uebergangsformen auftritt; man hat nämlich die Formel

$$e = \bar{k} + e', \quad k = \bar{f} + k', \quad f = \bar{r} + f',$$

wo die drei gestrichenen Grössen e', k', f' im Schnitt-raum liegende Elemente des Zelles angeben und die überstrichenen Grössen $\bar{k}, \bar{f}, \bar{r}$ anweisen, wieviel Kanten, Flächen, Räume des Zelles geschnitten werden.

Will man auch die Natur der f Seitenflächen des Schnittes kennen lernen, so hat man zu untersuchen, wie jede der r vom Schnitt-räume getroffenen Grenzkörper geschnitten wird; ist einmal bekannt,

wieviel Dreiecke, Vierecke, Fünfecke, usw. sich unter den f Flächen vorfinden, so führt auch die Bemerkung, dass $2k$ die Summe der Seitenzahlen dieser Polygone bildet, zur Kenntnis von k . Es hat sich gezeigt, dass diese Ableitung der Zahl k wirklich die bequemere ist; also ist die zweite der obigen Formel nicht verwendet worden.

In der tabellarischen Uebersicht der Resultate, welche diese Abhandlung abschliesst, werden wir auch die Vielkantigkeit der Eckpunkte der Schnitte in Betracht ziehen. Auf diesen Punkt kommen wir später zurück.

Nach diesen einführenden Betrachtungen wenden wir uns zur Behandlung der verschiedenen Reihen von Parallelschnitten.

I. Das Z^{120} .

a) Die Stellung OE_0 .

5. Aus der vierten Kolonne (D , dritte Querlinie) der Tabelle I (Koordinatenstellung des Z^{600}) der ersten Abhandlung leiteten wir die Schichtung

(4, 4, 6, 12, 12, 12, 4, 12, 4, 12, 12, 12, 6, 4, 4)

der Eckpunkte des Z^{600} in Bezug auf OR_0 ab, welche zur Konstruktion des Schlegelschen Diagrammes des Z^{600} (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, Fig. 75) verwendet wurde. Mittels Polarisation in Bezug auf einen konzentrischen Kugelraum ergibt sich, dass die 120 begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Bezug auf einen OE_0 dieses Zelles gelagert sind in fünfzehn Gruppen mit der Eigenschaft, dass die Dodekaeder der nämlichen Gruppe in Projektion auf diesen OE_0 identisch sind und die Zahlen der Dodekaeder dieser Gruppen eben durch obige Eckpunkteschichtung angegeben werden. Hiermit ist nicht nur die erste Zahlenkolonne von Tafel II^a gefunden sondern auch bewiesen, dass die verschiedenen Gruppen von Dodekaedern, welchen wir nach Frau STOTT bestimmte Farben zuweisen, bei Verlängerung der Schnittebenen des Schnitttraums mit den die Dodekaeder tragenden Räumen der Reihe nach ein rechtes ¹⁾ Tetraeder ein linkes Tetraeder, einen Würfel, ein rechtes Triakistetraeder, ein linkes Pyramidentetraeder, ein rechtes Pyramidentetraeder, ein

¹⁾ Die hier gegebene Unterscheidung „rechts“ und „links“ hat nur relativen Wert.

rechtes Tetraeder, ein Rhombendodekaeder, usw. einschliessen, wie dies auf der Tafel angegeben wird. Wir bemerken nun sogleich, dass diese Körper in der gefundenen Stellung zwei verschiedene Drehungsgruppen zulassen, die Drehungsgruppe der Würfeldiagonalen mit der Periode drei und die Drehungsgruppe der Oktaederdiagonalen mit der Periode zwei (Vierergruppe) und dies daher auch mit sämtlichen Parallelschnitten des Z^{120} in Bezug auf OE_0 der Fall sein muss.

6. Die Lage der 120 begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} mit Hinsicht auf den Hauptstrahl OE_0 wird in Tafel II^a von den starken Strichen angedeutet. Dabei ist die horizontal angenommene Linie OE_0 in fünfzehn, den Gruppen von Dodekaedern entsprechenden Lagen wiederholt worden und geben die vertikalen Linien mit der Ueberschrift

$$a, b, \dots, o, p, q, p', o', \dots, b', a'$$

die Stellen an, wo die Eckpunkte des Z^{120} sich auf OE_0 projizieren. Die Abstände aq, bq, \dots, pq dieser Projektionen vom Zellmittelpunkte O sind der letzten Kolonne (F , Zelldiagonale) der Tabelle III (Koordinatenstellung des Z^{120})— oder, wenn man will, der Randschrift von Fig. 19 — der ersten Abhandlung entnommen. In dieser Weise giebt Tafel II^a an, dass sich von den zwanzig Eckpunkten irgend eines der vier Dodekaeder der ersten Gruppe der Reihe nach 1, 3, 6, 6, 3, 1 Eckpunkte auf die Vertikallinien a, b, c, d, e, f lagern, was dem Symbole $(a b^3 c^6 d^6 e^3 f)$ entspricht, und dass dieses Symbol für die zweite Gruppe übergeht in $(b c^3 d^6 e^3 f^3 i)$, für die dritte in $(c^2 d^4 e^2 g^4 h^2 i^4 k^2)$, usw.

7. Die fünfzehn Lagen der begrenzenden Dodekaeder, welche in Tafel II^a bildlich vorgeführt werden, können ganz systematisch abgeleitet werden aus der Tabelle II der ersten Abhandlung, welche für jeden Eckpunkt des Z^{600} die zwölf durch Kanten mit ihm verbundenen, oder — wie wir abkürzend sagen wollen — ihm *benachbarten* Eckpunkte kennen tut. Denkt man sich nämlich bei jedem Eckpunkte A (Fig. 2) des Z^{600} das Ikosaeder der zwölf benachbarten Punkte B_i und polarisiert dieses Ikosaeder in Bezug auf die konzentrische Kugel mit M als Mittelpunkt und $\sqrt{AM \cdot MO}$ als Radius, wo M und O die Mittelpunkte des Ikosaeders und des Z^{600} sind, so erhält man die 120 begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} , in welchen unsrer Z^{600} übergeht mittels Polarisation in Bezug auf den Kugelraum mit O als Mittelpunkt und $\sqrt{AO \cdot MO}$ als

Radius, und nun ist aus der mit den Tabellen I und II der ersten Abhandlung gegebenen Schichtung der zwölf Eckpunkte des Ikosaeders unmittelbar die Schichtung der zwanzig Eckpunkte des entsprechenden Dodekaeders zu finden. Denn die Projektion der Eckpunkte des Ikosaeders bestimmt die Lage dieses Körpers in Bezug auf die Projektionsachse und also auch jene des entsprechenden Dodekaeders, usw.

8. Zur Bestimmung der Lage der 120 den Eckpunkten des Z^{600} benachbarten Ikosaeder greifen wir zur vierten Kolonne (D , dritte Querlinie) der Tabelle I zurück, wo die Koordinate w_1 der mit dem Hauptstrahle OE_0 des Z^{120} und dem Hauptstrahle OR_0 des Z^{600} zusammenfallenden Projektionsachse der Schichtung entspricht. Es vergegenwärtigen sodann die Eckpunkte

$$\pm 1, \pm 5, \pm 25, \pm 7, \pm 13, \pm 2, \pm 15, \pm 16$$

mit den Abscissen ¹⁾

$$\begin{aligned} &\pm (7 + 3e), \pm (5 + 3e), \pm (6 + 2e), \pm (4 + 2e), \\ &\pm (3 + e), \pm (1 + e), \pm 2, 0 \end{aligned}$$

die fünfzehn möglichen Fälle, welche in Tafel II^b niedergelegt sind. Dabei ist dann wieder das Ergebnis ($a^3 b^3 c^3 d^3$) des ersten Falles abgeleitet aus der Tatsache, dass die zwölf Nachbarpunkte

$$29, -30, 31, 32, 41, -42, 43, 44, 53, -54, 55, 56$$

des Punktes 1 (siehe die Tabelle II der ersten Abhandlung) sich nach ihren w_1 -Koordinaten in die vier Gruppen

$$(29, 41, 53), (32, 43, 56), (31, 44, 55), (-30, -42, -54)$$

mit den Koordinatenwerten

$$7 + 3e, 5 + 3e, 6 + 2e, 4 + 2e$$

zerlegen lassen, usw.

9. Die fünfzehn Gruppen I, II, ..., VIII, VII', ..., II', I' der Tafel II^b bilden sämtlich nur sechs von einander verschiedene Ikosaederschichtungen. Denn die den Farben Rot, Orange, Violett

¹⁾ Auch hier steht e wieder für $\sqrt{5}$.

entsprechenden Schichtungen (3, 3, 3, 3) sind insofern identisch, dass die Projektionen einander ähnlich sind und deshalb in den drei Gruppen I, II, VII und die mit ihnen symmetrisch liegenden Gruppen I', II', VII' die Projektion des Hauptstrahles OR_0 des Z^{600} auf den Raum des Ikosaeders in Bezug auf das Ikosaeder die nämliche ist, obgleich dieser Hauptstrahl mit jenen Räumen verschiedene Winkel bildet. Und diese sechs verschiedene Ikosaederlagen halten nun hierin mit einander wieder gleichen Tritt, dass die Projektion des Hauptstrahles OR_0 des Z^{600} immer auf einen Hauptstrahl OK_0 des Ikosaeders senkrecht steht und also in der Ebene der zwei parallelen Gegenkanten liegt, welche diesen Hauptstrahl OK_0 senkrecht kreuzen. Bei den Schichtungen (3, 3, 3, 3) und (2, 2, 4, 2, 2) der Gruppen I, II, VII und III (gelb) ist dies einleuchtend; denn bei (3, 3, 3, 3) sind die Schnittebenen zweien Seitenflächen des Ikosaeders parallel, und bei (2, 2, 4, 2, 2) enthält die Mittelebene des Parallelebenenbüschels vier Eckpunkte und also zwei Gegenkanten. Für die vier übrigen Fälle betrachte man nun an der Hand der senkrechten Projektion der Ikosaeders auf eine Mittelebene durch vier Eckpunkte (Fig. 3) die von den fünf im Eckpunkte p zusammenstossenden Seitenflächen gebildete reguläre Pyramide mit der sich in die Gerade qsr projizierenden Grundebene, wo der Scheitel p der erste Eckpunkt der Schichtung ist und die zweite Punktzahl der Schichtung nun notwendig von der Grundebene herrührt. Ist diese zweite Zahl 2, so muss die Verbindungslinie dieser zwei Punkte notwendig eine Ikosaederkante sein und kann für ihr die in q auf der Bildebene senkrechte Kante angenommen werden, woraus dann hervorgeht, dass die Schnittebenen bei den Gruppen VI (indigo) und VIII (schwarz) auf der Bildebene senkrecht stehen. Ist diese zweite Zahl wieder 1, so ist dieser zweite Eckpunkt irgend ein Eckpunkt der Grundebene, z. B. r und rührt nun die dritte Punktzahl der Schichtung ebenfalls von der Grundebene her; weil diese Zahl in den übrigen Fällen IV (grün) und V (blau) zwei ist, muss die Verbindungslinie der entsprechenden Eckpunkte in s auf der Bildebene senkrecht stehen. Also ist hiermit der gesuchte Beweis geliefert.

10. Mittels Betrachtung der Abstandsverhältnisse der parallelen Spuren der ersten vier Schichtungsebenen auf der Grundebene der fünfseitigen Pyramide, deren Scheitel p in der ersten Schichtungsebene liegt, bestimmen wir jetzt die Spuren dieser Ebenen auf der Bildebene der Figur 3 für jeden der vier Fälle IV, V, VI, VIII. Es betragen nach Tafel II^b die ersten drei Abstände

im Falle IV (grün).....	2	,	$e - 1$,	2
„ „ V (blau).....	$e - 1$,	2	,	$e + 1$
„ „ VI (indigo)...	2	,	$e + 1$,	2
„ „ VIII (schwarz) ..	$e + 1$,	2	,	$e - 1$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit den Schichtungszahlen sofort, dass die erste Schichtungsebene für die vier verschiedenen Fälle der Reihe nach in pp^I , pp^{II} , pp^{III} , pp^{IV} senkrecht steht auf der Bildebene, wenn die Punkte p^I , p^{II} , p^{III} , p^{IV} in rsq mittels der Beziehungen

$$p^I r = s q, p^{II} s = s q, q p^{III} = r s, q p^{IV} = r q$$

bestimmt sind. Es geben also die Lote aus O auf pq , pr , pp^I , pp^{II} , pp^{III} , pp^{IV} für die sechs verschiedenen Fälle die Projektion des Hauptstrahles OR_0 des Z^{600} auf den Raum des Ikosaeders an.

11. Zur Bestimmung der sechs entsprechenden Dodekaederschichtungen polarisieren wir (Fig. 3) das betrachtete Ikosaeder mit Hinsicht auf die Kugel, welche O zum Zentrum und $\frac{1}{2} Os \cdot Ot$ zum Radius hat, im Dodekaeder, welches in roter Farbe in die Figur eingetragen ist. Es entsprechen dann den zwanzig Eckpunkten 1, 2, ..., 20 dieses Dodekaeders die zwanzig Seitenflächen I, II, ..., XX des Ikosaeders. Dabei wird der auf der Seitenfläche X senkrecht stehende Hauptstrahl OF_0 des Ikosaeders zum mit $(O, 10)$ zusammenfallenden Hauptstrahl OE_0 des Dodekaeders, während der auf pr senkrechte Hauptstrahl OK_0 des Ikosaeders für das Dodekaeder ein Hauptstrahl OK_0 bleibt. Weiter wird der Charakter der vier übrigen Dodekaederschichtungen durch die Bemerkung beherrscht, dass die Geraden pp^I , pp^{II} , pp^{III} , pp^{IV} der Reihe nach den Geraden (1,8), (10,3), (4,13), (3,6) parallel sind. Wir betrachten jetzt jeden der sechs möglichen Fälle an sich.

Fall I = Fall II = Fall VII. Die Schichtung in Bezug auf die Körperdiagonale ist (1, 3, 6, 6, 3, 1); die fünf Abstände der auf folgenden Schichten verhalten sich wie

$$e - 1, 2, e + 1, 2, e - 1.$$

Fall III. Die Schichtung in Bezug auf die erste Querlinie ist (2, 4, 2, 4, 2, 4, 2); die sechs Abstände der auf folgenden Schichten verhalten sich wie

$$e + 1, 2, e + 1, e + 1, 2, e + 1.$$

Fall IV. Die Dreiecke $p r p^I$ und $(1, 2, 8)$ sind ähnlich und ähnlich liegend. Denn aus der Schichtung $(5, 5, 5, 5)$ folgt zunächst, dass die Punkte 6, 2, 8 in einer zu $q s r$ parallelen Gerade liegen, d. h. es ist nicht nur $(1, 2)$ zu $p r$ sondern auch $(2, 8)$ zu $r p^I$ parallel, während ausserdem aus

$$(8, 2): p^I r = 2 : 3 + e, (1, 2): p r = 2 : 3 + e$$

die Proportionalität der um den gleichen Winkeln $(p r, r p^I)$ und $\{(1, 2), (2, 8)\}$ liegenden Seiten folgt.

Die der Spurrichtung $(1, 8)$ entsprechende Schichtung des Dodekaeders (Fig. 4^a) ist (2212332122) ; die neun Abstände der auf folgenden Schichten verhalten sich wie

$$2, e - 1, 2, e + 1, 2, e + 1, 2, e - 1, 2$$

Fall V. Die Dreiecke $p s p^{II}$ und $(3, 4, 10)$ sind ähnlich und entgegengesetzt ähnlich liegend, wie die Beziehungen

$$p s : s p^{II} = 2 : e + 1, (3, 4): (4, 10) = 2 : e + 1$$

beweisen. Die der Spurrichtung $(3, 10)$ entsprechende Schichtung (Fig. 4^b) ist (2231221322) mit den Abstandsverhältnissen

$$e + 1, 2, e + 1, 2, e - 1, 2, e + 1, 2, e + 1.$$

Fall VI. Man hat

$$\begin{aligned} (10, 13): (p, 10) &= (10, 13): (5, 6) = 2 : e + 1, \\ (4, 10): (10, p^{III}) &= r s : s q = 2 : e + 1. \end{aligned}$$

Deshalb sind die Geraden $p p^{III}$ und $(4, 13)$ parallel. Die der Spurrichtung $(4, 13)$ entsprechende Schichtung (Fig. 4^c) ist (1232222321) mit den Abstandsverhältnissen

$$2, e + 1, e + 1, 2, e + 1, 2, e + 1, e + 1, 2.$$

Fall VIII. Hier ist

$$\begin{aligned} (1, 6): p q &= (1, 6): (3, 14) = (13, 6): (13, 14) = e - 1 : e + 1, \\ (3, 1): q p^{IV} &= (3, 1): r q = (2, 1): (2, q) = e - 1 : e + 1. \end{aligned}$$

Also sind die Dreiecke $(1, 3, 6)$ und $q p^{IV} p$ ähnlich und

entgegengesetzt ähnlich liegend, und deshalb p^{IV} und (3, 6) parallel. Die der Spurrichtung (3, 6) entsprechende Schichtung (Fig. 4^d) ist (12212421221) mit den Abstandsverhältnissen

$$e - 1, 2, e + 1, 2, e + 1, e + 1, 2, e + 1, 2, e - 1.$$

In jeder der vier Figuren 4^a, 4^b, 4^c, 4^d ist auf einer Parallele zur Projektionsachse die Seitenzahl der Polygone der intermediären Schnitte und Uebergangsformen angegeben worden; dies wird uns bei der Bestimmung der Kantenzahl der Seitenflächenpolygone des Schnittpolyeders nützlich sein.

12. Ist einmal gefunden, wie die Dodekaedergruppen sich auf den gewählten Hauptstrahl OE_0 des Z^{120} projizieren, so erhält man leicht ihre genaue Lage mittels der bekannten Abstandsverhältnisse. Dabei kann noch die Bemerkung nützlich sein, dass die Schwerpunkte der Dodekaeder sich auf diesen Hauptstrahl in Punkte projizieren, deren Mittelpunktsabstände sich wie

$$7 + 3e, 5 + 3e, 6 + 2e, 4 + 2e, 3 + e, 1 + e, 2, 0$$

verhalten, was hieraus hervorgeht, dass die 120 Dodekaederschwerpunkte die Eckpunkte eines Z^{600} in Stellung OR_0 bilden. Hat man z. B. gefunden, dass die Eckpunkte der Dodekaeder der ersten Gruppe sich in der Tafel II^a in a, b, c, d, e, f projizieren und die Projektion des Schwerpunktes also die Mitte der Strecke cd ist, d. h. von Mittelpunkt O die Entfernung $\frac{47 + 21e}{2} = \frac{1}{4}(7 + 3e)^2$ hat, so werden die Abstände der übrigen Schwerpunktsprojektionen

$$20 + 9e, 18 + 8e, \frac{1}{2}(29 + 13e), 9 + 4e, \frac{1}{2}(11 + 5e), \\ \frac{1}{2}(7 + 3e), 0$$

sein, d. h. diese Projektionen liegen in

$$ef, g, hi, lm, no, op, q,$$

wenn ef die Mitte der Strecke ef andeutet, usw. Achtet man nun auf die bekannten Abstandsverhältnisse der Schichtungspunkte, so ist es schon nicht mehr möglich sich zu irren.

Ausserdem gibt es noch andere Kontrollehilfsmittel, deren wir zwei erwähnen, ein allgemeines und ein besonderes.

13. Das allgemeine Hilfsmittel besteht darin, dass man für jede Schicht untersucht, ob die Summe der Dodekaedereckpunkte wirklich das vierfache der Anzahl der in der Schicht liegenden Zelleckpunkte bildet, welche letztere Anzahlen aus der Kolonne F der Tabelle III der ersten Abhandlung hervorgehen. So muss in der Schicht e

$$4 \times 3 + 6 \times 2 + 12 \times 2$$

das vierfache von 12 bilden. Diese Bedingung wird für jede Schicht der Tafel II^a erfüllt.

Das besondere Hilfsmittel stützt sich auf der Tatsache, dass die Projektion des Hauptstrahles OE_0 auf irgend ein begrenzendes Dodekaeder zu einem Hauptstrahle OK_0 dieses Körpers senkrecht ist. Hieraus geht nämlich hervor, dass man sich sämtliche Dodekaeder mittels Drehung um den Hauptstrahl, welche Projektionsachse der Schichtungen ist, auf irgend eine als Bildebene zu verwendende Ebene durch diesen Hauptstrahl senkrecht gestellt denken kann. Ist nun (Fig. 5) der Masstab der Projektion a, b, c, \dots so gewählt, dass die Sehne $A_1 B_1$ des über aa' geschlagenen Kreises, welche sich in af projiziert, in Länge dem Körperdiagonale des Dodekaeders der vier Figuren $4^a, 4^b, 4^c, 4^d$ gleich kommt, wird sodann um q als Zentrum mit dem aus q auf $A_1 B_1$ gefällten Lote qM_1 als Radius den Schnittkreis des Inkugelraums des Z^{120} mit der Bildebene beschrieben, werden weiter auf diesem Kreise die Punkte M_2, M_3, \dots, M_8 bestimmt, welche sich in den Schwerpunktsprojektionen der Gruppen II, III, \dots , VIII projizieren und in diesen Punkten an diesem Kreise die Tangente II, III, \dots , VIII, gezogen, so sind die sich der Reihe nach auf $bi, ck, dn, gq, ho', in', ll'$ projizierenden Segmente $A_2 B_2, A_3 B_3, \dots, A_8 B_8$ dieser Tangenten die Projektionen der Dodekaeder der Gruppen II, III, \dots , VIII auf die Bildebene. Und nun findet man, dass die Segmente $A_1 B_1, A_2 B_2, \dots, A_8 B_8$ mit den von den vertikalen Linien auf sie eingeschnittenen Punktreihen genau die in den Figuren 3, $4^a, 4^b, 4^c, 4^d$ gefundenen Punktschichtungen liefern.

14. Aus Tafel II^a wird nun leicht die in Tafel III angegebene Kantenprojektion abgeleitet. Dabei sind die Kanten in zwei Gruppen eingeteilt. Zunächst sind die Kanten eingetragen, welche in Projektion nur ein Segment ab, bc, \dots des Hauptstrahles über-

decken, sodann die Kanten dg, eh, \dots , welche sich in Projektion über zwei oder mehrere Segmente erstrecken; nur die Kanten der zweiten Gruppe liefern Eckpunkte der sogenannten Uebergangsformen. In Berechnungsweise der Anzahlen stimmen beide Gruppen mit einander überein; deshalb können wir mit einem einzigen Beispiele vollstehen. Wir wählen die Kante hk .

Die Kante hk tritt scheinbar bei der dritten, vierten, fünften und sechsten Dodekaedergruppe auf; denn die beiden Punkte h und k des Hauptstrahles tragen in Tafel II^a Eckpunktenprojektionen der Dodekaeder dieser vier Gruppen. Weil die sich in h und k projizierenden Eckpunkte bei der dritten und der fünften Gruppe aber nicht durch Kanten verbunden sind und hk , wie die Figuren 4^a und 4^c zeigen, Projektion ist von *zwei* Kanten jedes der 12 Dodekaeder der vierten und von *einer* Kante jedes der 12 Dodekaeder der sechsten Gruppe, so ist

$$\text{die Zahl der Kanten } hk = \frac{1}{3} (2 \times 12 + 1 \times 12) = 12,$$

wobei der Faktor $\frac{1}{3}$ von der Tatsache herrührt, dass jede Kante des Z^{120} in drei verschiedenen Dodekaedern liegt.

15. Ist die Lage der Kantenprojektionen in der angegebenen Weise tabellarisch dargestellt, so können die drei kennzeichnenden Zahlen e, k, f von intermediären Schnitten und Uebergangsformen unmittelbar bestimmt werden. Wir zeigen dies mit zwei Beispielen an.

Der intermediäre Schnitt zwischen h und i. Der Schnittraum begegnet 88 Kanten, nämlich:

$$36 \text{ } hi, 4 \text{ } fi, 24 \text{ } gi, 12 \text{ } hk, 12 \text{ } hl;$$

also ist $e = 88$.

Es werden im ganzen 46 Dodekaeder geschnitten; denn eine vertikale Linie zwischen h und i trifft auf Tafel II^a die Dodekaeder der Gruppen II, III, IV, V, VI, also $4 + 6 + 12 + 12 + 12 = 46$ Dodekaeder; deshalb ist $f = 46$.

Es bestimmt der Schnittraum in den Dodekaedern der Gruppen II, III, IV, V, VI der Reihe nach Dreiecke, Achtecke, abermals Achtecke, Sechsecke und Dreiecke. Also wird der Schnittkörper

von sechzehn Dreiecken, zwölf Sechsecken, achtzehn Achtecken eingeschlossen, und ist

$$\frac{1}{2} (16 \times 3 + 12 \times 6 + 18 \times 8) = 132$$

die Kantenzahl, d. h. man findet $k = 132$.

Kontrolle liefern die Beziehungen $k = \frac{3}{2} e$, $f = \frac{1}{2} e + 2$.

Der Uebergangsform h. Der Schnittraum enthält 24 Zelleckpunkte und begegnet 4 Kanten fi und 24 Kanten gi ; deshalb ist $e = 52$.

Es werden nach Tafel II^a die Dodekaeder der Gruppen II, III, IV, V geschnitten; also hat der Schnitt $4 + 6 + 12 + 12$ Seitenflächen, d. h. man findet $f = 34$.

Der Schnittraum bestimmt in den Dodekaedern der Gruppen II, III, IV, V der Reihe nach Dreiecke, Sechsecke, abermals Sechsecke und Vierecke; derhalb wird das Schnittpolyeder von vier Dreiecken, zwölf Vierecken, achtzehn Sechsecken eingeschlossen, und ist

$$\frac{1}{2} (4 \times 3 + 12 \times 4 + 18 \times 6) = 84$$

die Kantenzahl, also $k = 84$.

Kontrolle liefert nur die Eulersche Formel.

16. Die Bestimmung der Vielkantigkeitszahlen der Eckpunkte des Schnittpolyeders liefert keine Schwierigkeit. Einerseits fanden wir schon (vergleiche Nr. 3 am Schluss), dass sämtliche Eckpunkte der intermediären Schnitte dreikantig sind; derhalb können wir uns weiter auf die Uebergangsformen beschränken. Andererseits ergibt sich aber sofort, dass die von den Zelleckpunkten herrührenden Eckpunkte des Schnittpolyeders entweder dreikantig oder vierkantig sind; denn einem Zelleckpunkte A des Z^{120} sind vier Eckpunkte B_i benachbart und das reguläre Tetraeder dieser vier Eckpunkte B_i wird von der Schnittebene des dieses Tetraeder tragenden Raumes mit dem Schnitttraume entweder in einem Dreieck oder in einem Viereck geschnitten. Werden die Zahlen der dreikantigen und vierkantigen Ecken der Uebergangsform durch x und y angedeutet, so tut Lösung der beiden Gleichungen

$$x + y = f, \quad 3x + 4y = 2k$$

nach x und y den Wert dieser Grössen kennen, d. h. man hat

$$x = 2(2f - k), \quad y = 2k - 3f.$$

Die letztere Grösse, welche (vergleich meine *Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 56) als „Grad der Flächensingularität“ des Polyeders gelten kann, kann verschwinden; in diesem Falle kommt der Uebergangsform das Charakter des intermediären Schnittes zu. Verschwindet y aber nicht — und diese sieben Fälle sind auf Tafel III mit einem Sternchen bezeichnet —, so ist diese Zahl entweder der Zahl e' der im Schnittraum liegenden Zelleckpunkte gleich oder man hat $y < e'$. Im Falle $y = e'$ sind sämtliche im Schnittraume liegende Zelleckpunkte gleicher Natur; für $y < e'$ teilt sich die Gruppe dieser e' Punkte in Untergruppen, wie sich später auch zeigen wird.

Die Zahlen x und y sind nicht auf Tafel III angegeben; sie werden in die tabellarische Uebersicht der Resultate am Schluss dieser Abhandlung erscheinen.

17. Es führt Fig. 5 zu einer leichten Berechnung der Winkel $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_8$ welche von dem Hauptstrahle $abc\dots$ mit den Räumen der Dodekaeder der Gruppen I, II, \dots , VIII gebildet werden. Man findet zunächst

$$\begin{aligned} A_1 M_1^2 &= \frac{1}{4} (56 + 24e) (9 + 3e) = 6 (7 + 3e) (3 + e), \\ M_1 q^2 &= (28 + 12e)^2 - 6 (7 + 3e) (3 + e) = \\ &= (14 + 6e) (47 + 21e). \end{aligned}$$

Also ist

$$M_1 q = 2 (9 + 4e) \sqrt{2}.$$

Deshalb hat man

$\cos \alpha_1 = \frac{1}{8} (3 + e) \sqrt{2},$	$\cos \alpha_5 = \frac{1}{4} \sqrt{2},$
$\cos \alpha_2 = \frac{1}{8} e \sqrt{2},$	$\cos \alpha_6 = \frac{1}{8} (-1 + e) \sqrt{2},$
$\cos \alpha_3 = \frac{1}{2} \sqrt{2},$	$\cos \alpha_7 = \frac{1}{8} (3 - e) \sqrt{2},$
$\cos \alpha_4 = \frac{1}{8} (1 + e) \sqrt{2},$	$\cos \alpha_8 = 0.$

18. Bei einer parallelen Verschiebung des Schnittraumes ändern die Zahlen e, k, f des Schnittes sich selbstverständlich nicht, so lange nicht eine Zelleckpunkte aufnehmende Lage des Schnittraumes erreicht wird; eben deshalb heissen die den letzteren Lagen des Schnittraumes entsprechenden Schnittpolyeder „Uebergangsformen“. Wir bemerken noch, dass eine parallele Verschiebung des Schnittraumes innerhalb der erwähnten Grenzen nicht nur die Zahlen e, k, f sondern auch die Richtung der Kanten des Schnittes nicht ändert. Deshalb sind zwei parallele Schnitte, zwischen welchen kein Zelleckpunkt liegt, nicht nur isomorph nach der von V. EBERHARD eingeführten Bezeichnungsweise (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 23) sondern isomorph mit parallelen einander entsprechenden Kanten. Die Frage, ob zwei solche Schnitte vielleicht ähnlich und ähnlich liegend seien, ist nun leicht zu beantworten. Da die Dodekaeder der verschiedenen Gruppen in Bezug auf die Projektionsachse verschiedene Neigung haben, sind zwei solche parallele Schnitte dann und nur dann ähnlich und ähnlich liegend, falls nur eine Gruppe von Dodekaedern geschnitten wird, d. h. für die intermediären Schnitte zwischen a und b (und zwischen b' und a').

b) Die Stellung OK_0 .

19. Die Ergebnisse dieser Untersuchung sind niedergelegt in die Tafeln IV^a, IV^b, V welche der Reihe nach den Tafeln II^a, II^b, III der vorhergehenden Betrachtungen entsprechen. Um Wiederholungen zu vermeiden beschränken wir uns bei der Besprechung dieser neuen Tafeln auf die Punkte, welche wesentlich abweichen von den bisher behandelten.

Die Ueberschrift a, b, c, \dots der Tafel IV^a und die Mittelpunktsabstände $33 + 15e$, $32 + 14e$, $30 + 14e, \dots$ sind der Handschrift der Fig. 16 der ersten Abhandlung entnommen. Die erste Reihe der Anzahlen der Dodekaeder der verschiedenen Gruppen ist aus der dritten Kolonne (C , zweite Querlinie) der Tabelle I der ersten Abhandlung abgeleitet. Dabei tritt aber etwas ganz besonderes auf. Bei der in Tafel IV^b schematisierten Vorarbeit der Bestimmung der von den zwölf einem Eckpunkte des Z^{600} in Stellung OF_0 benachbarten Eckpunkten gelieferten Ikosaeder findet man, dass die einem Punkte mit verschwindender z_1 -Koordinate entsprechenden Ikosaeder in Bezug auf den angenommenen Hauptstrahl nicht sämtlich die nämliche Lage besitzen, sondern sich in zwei Untergruppen, eine von sechs Ikosaedern mit der Schichtung (11222211) und eine von zwei

Ikosaedern mit der Schichtung (3333), zerlegen; die erste dieser beiden Untergruppen rührt von den Punkten ± 3 , ± 58 , ± 59 , die zweite rührt von den Punkten ± 4 her.

Die verschiedenen Ikosaederschichtungen der Tafel IV^b sind teilweise schon bekannt. Deutet man die neuen Gruppen mit I_2 , II_2 , ... XI_2 , XI_2 an und legt den alten Gruppen den Fussindex 1 bei, so ist der Schichtung nach

$$I_2 = VII_2 = III_1 \text{ (gelb)}, II_2 = XI_2 = I_1 \text{ (rot)}, IV_2 = V_1 \text{ (blau)}, \\ V_2 = VIII_1 \text{ (schwarz)},$$

während die Schichtungen von III_2 , VI_2 , $VIII_2$, IX_2 , X_2 , XI_2 neu sind. Von diesen ist $VIII_2$ gekennzeichnet durch die Eigenschaft, dass keine zwei Ikosaederpunkte die nämliche Projektion haben; während die Projektionsachse der Gruppen III_2 , VI_2 , IX_2 , X_2 , XI_2 nach Nr. 9 in einer zwei Gegenkanten enthaltende Ebene angenommen werden kann, ist dies also bei der Gruppe $VIII_2$ unmöglich. Es betragen die ersten drei Abstandsverhältnisse

$$\begin{array}{llll} \text{im Falle } III_2 & \dots & 2, & 1 + e, \quad 1 + e, \\ \text{,, } VI_2 & \dots & 2, & 2, \quad 1 + e, \\ \text{,, } IX_2 & \dots & e - 1, & 3 + e, \quad 2, \\ \text{,, } X_2 & \dots & 1 + e, & 1 + e, \quad 2, \\ \text{,, } XI_2 & \dots & 4, & e - 1, \quad 2. \end{array}$$

In Verbindung mit den Schichtungssymbolen ergibt sich hieraus, dass die Schichtungsebenen (Fig. 3) in diesen Fällen der Reihe nach in Parallelen zu pp_2^I , pp_2^{II} , up_2^{III} , qp_2^{IV} , Op^{IV} auf der Bildebene senkrecht stehen, wo p_2^I , p_2^{II} , p_2^{III} , p_2^{IV} die Mittelpunkte der Segmente qs , rs , sv , ps sind.

Zur Deutung der Ikosaederschichtung des Ausnahmefalles der Gruppe $VIII_2$ betrachten wir die ersten fünf Abstandsverhältnisse

$$1 + e, \quad 2, \quad 1 + e, \quad 1 + e, \quad 2.$$

Sind nun in der Projektion auf die Mittelebene senkrecht zur Ikosaederdiagonale (1,12) (Fig. 6) die Eckpunkte 1 und 2 der erste und der zweite Schnittpunkt, so ergibt sich aus dem zweiten, dritten, vierten und fünften der fünf Abstände, dass die Ebene durch die Eckpunkte 2, 3, 4, 5, 6 von der zweiten, vierten, sechsten, fünften und dritten Schichtungsebene in durch diese Punkte gelegte Parallelen a_2 , a_3 , a_4 , a_5 , a_6 zur Projektion der Kante (1,3) geschnitten wird. Weiter bestimmt dann das erste Schichtungssegment

1 + e die Lage der Spur a_1 der ersten Schichtungsebene durch den Eckpunkt 1 und findet man, in Verbindung mit dem bekannten Wert der Entfernung des Punktes 1 von der Ebene durch 2, 3, 4, 5, 6, für den Winkel ϕ zwischen dieser Ebene und den Schichtungsebenen

$$\tan \phi = \frac{1}{5} \sqrt{250 - 110e} \dots\dots\dots 1)$$

Das hinzugefügte Dodekaeder in polarreziproken Stellung wird uns bei der Bestimmung der entsprechenden Dodekaederschichtungen sogleich nützlich sein.

20. Wir bestimmen jetzt die den Schichtungen der Ikosaedergruppen III_2 , VI_2 , VIII_2 , IX_2 , X_2 , XI_2 entsprechenden Dodekaederschichtungen mittels der Bemerkung, dass die Geraden pp_2^I , pp_2^{II} , up_2^{III} , qp_2^{IV} , Op^{IV} der Fig. 3, welche die Ikosaedergruppenschichtungen kennzeichnen, der Reihe nach zusammenfallen oder parallel sind zu den Verbindungslinien

des Eckpunktes 6 mit der Mitte des Segmentes (5, 10),
 „ „ 3 „ „ „ „ „ (4, 5),
 „ „ 3 „ „ „ „ „ (1, 7),
 „ „ 6 „ „ „ „ „ (4, 8),
 der Eckpunkte 8 und 13.

Hieraus sind die Dodekaederschichtungen abgeleitet und in die Figuren $7a$, $7b$, $7c$, $7d$, $7e$ niedergelegt; in diesen Figuren sind auch wieder die Seitenzahlen der Schnittpolygone angegeben.

Die der Gruppe VIII_2 entsprechende Dodekaederschichtung ist in Fig. 8 gegeben; dabei ist die Ebene pq der Fig. 6 Bildebene. Wirklich ist die Neigung der Verbindungslinie (9, 18) durch die Gleichung 1) bestimmt.

21. Sind die Dodekaederschichtungen richtig in die Tafel IV^a eingetragen — und diese Arbeit wird wieder erleichtert durch die Bemerkung, dass die doppelten Mittelpunktsabstände

$$58 + 26e, 54 + 24e, 47 + 21e, 40 + 18e, 36 + 16e, \\ 29 + 13e, 22 + 10e, 18 + 8e, 11 + 5e, 7 + 3e, 0$$

sich verhalten wie die Koordinaten

$$6 + 2e, 3 + 3e, 4 + 2e, 5 + e, 2 + 2e, 3 + e, 4, \\ 1 + e, 2, e - 1, 0$$

der Eckpunkte des Z^{600} in Stellung OF_0 (vergleiche die Randschrift der Figur 8 der ersten Abhandlung) und kontrolliert mit Hilfe der Zahl der in den Schichten enthaltenen Eckpunkte des Z^{120} —, so kann man zur Tafel V der Kantenprojektionen aufsteigen und angeben wie die intermediären Schnitte und die Uebergangsformen gebildet sind, und welche die Vielkantigkeit der Eckpunkte der Uebergangsformen ist. Dabei ist nur zu bemerken, dass es Kanten giebt, welche sich als Punkte projizieren und also senkrecht stehen auf dem als Projektionsachse verwendeten Hauptstrahle OK_0 des Z^{120} . Für die einzige sich in a projizierende Kante ist dies aus der angenommenen Stellung des Z^{120} einleuchtend.

c) Die Stellung OF_0 .

22. Diesem Falle entsprechen die Tafeln VI^a, VI^b, VII.

Die in der Ueberschrift der Tafel VI^a auftretenden Mittelpunktststände stimmen mit der Randschrift der Figur 14 der ersten Abhandlung überein, die erste Reihe der Anzahlen der Dodekaeder der verschiedenen Gruppen III_1, III_2, \dots ist der zweiten Kolonne (B , erste Querlinie) der Tabelle I der ersten Abhandlung entnommen. Auch hier tritt die Besonderheit zweier Untergruppen von Dodekaedern mit einem sich im Nullpunkte projizierenden Schwerpunkt auf, wie dies sich bei der in Tafel VI^b schematisierten Vorarbeit der Bestimmung der benachbarten Ikosaeder ergibt. Von den 12 Ikosaedern der Mittelgruppe erhalten zehn das Schichtungssymbol ($e f^2 h^2 i^2 h'^2 f'^2 e'$), zwei das Schichtungssymbol ($d g^5 g^5 d'$).

23. Die hier auftretenden Ikosaederschichtungen $I_3, II_3, \dots, VIII_3, IX_3, IX_3$ sind fast alle bekannt; es ist nämlich $I_3 = IV_3 = IX_3$ die Körperdiagonalenschichtung des Ikosaeders und

$$II_3 = V_3 = III_1, III_3 = VI_1, VI_3 = X_2, VII_3 = III_2, \\ VIII_3 = IV_1.$$

Nur die Schichtung der Gruppe IX_3 ist neu; ihr entspricht offenbar das Büschel auf der Bildebene von Fig. 3 senkrecht stehender Ebenen, deren Spuren der Gerade Or parallel sind.

Die entsprechenden Dodekaederschichtungen sind also für I_3, IV_3, IX_3 die Schichtung (5555) parallel zweier Seitenflächen, für II_3, V_3 die Schichtung (2424242) parallel einer Mittelebene durch zwei parallele Kanten, für $III_3, VI_3, VII_3, VIII_3$ der Reihe nach die Schichtungen der Figuren 4^c, 7^d, 7^a, 4^a und für IX_3 die neue

Schichtung (12122222121), wobei (Fig. 9) die in der Ebene durch zwei parallele Kanten liegende Mittelpunktsparelle zu (4,8) Projektionsachse ist.

24. Bei der Ableitung der in Tafel VII niedergelegten Kantenprojektionen ergeben sich wieder sich in Punkte projizierende Kanten; die Zahl dieser in den Punkt a auftretenden Kant ist selbstverständlich fünf, da eine fünfkantige Seitenfläche in a auf der Projektionsachse senkrecht steht.

In Bezug auf die Ableitung der Zahl f der Uebergangsformen ist etwas besonderes zu erwähnen; es tritt hier zum ersten Male die Grösse f' der in Nr. 4 gegebenen Formel $f = r + f'$ auf. Bei den Uebergangsformen ereignet es sich hier nämlich, dass der Schnittraum bisweilen eine Seitenfläche eines Dodekaeders aufnimmt. In diesem Falle ist, weil jede Seitenfläche zwei Dodekaedern angehört, die Dodekaedernanzahl mit einer im Schnitttraume liegenden Seitenfläche bei der Berechnung von f für die Hälfte in Rechnung zu bringen. So ist $f = 1$ bei a die Hälfte der Anzahl der Dodekaeder der ersten Gruppe und man hat für d

$$17 = \frac{2}{2} + 5 + 10 + \frac{2}{2},$$

usw. Wo dieser besondere Umstand auftritt, ist die Seitenzahl der entsprechenden Fläche überstrichen.

d) Die Stellung OR_0 .

25. In ganz derselben Weise findet man hier die einfachen Resultate der Tafeln VIII^a, VIII^b, IX. Dabei treten keine neue Schichtungen und überhaupt keine neue Bemerkenswerthigkeiten auf.

Während die Gruppe I_4 nur ein Dodekaeder enthält, bilden die Schnittebenen des Schnitttraumes senkrecht auf OR_0 mit den die Dodekaeder der Gruppen II_4 , III_4 , IV_4 , V_4 tragenden Räumen der Reihe nach bei II_4 ein Dodekaeder, bei III_4 ein Ikosaeder, bei IV_4 ein Dodekaeder und bei V_4 das halbrekuläre gleichflächige Polyeder (32, 60, 30), welches der Kombination (30, 60, 32) von Dodekaeder und Ikosaeder in Gleichgewicht (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 189 und 195) polarreziprok verwandt ist. Dies wird leicht abgeleitet aus der Schichtung der Eckpunkte des Z^{600} in Stellung OE_0 (vergleiche Tafel X).

II. Das Z^{600} .

a.) Die Stellung OE_0 .

26. Die in Tafel X angegebene Projektionen der 600 begrenzenden Tetraeder, auf den gewählten Hauptstrahl OE_0 als Achse, kann, unabhängig von den vorhergehenden Entwicklungen, aus den Tabellen der ersten Abhandlung abgeleitet werden. Es gibt die Tabelle I (Koordinatenstellung des Z^{600}) in der ersten Kolonne (A , Zelldiagonale) die Entfernung x_1 der 120 Eckpunkte vom Zellmittelpunkt, während aus der Tabelle II (Kanten des Z^{600}) zu entnehmen ist, wie die Eckpunkte sich zu vierten zu Tetraedereckpunkten verbinden. Mehr braucht man offenbar nicht.

Nachdem das Z^{120} schon in der in Rede stehende Richtung untersucht worden ist, führen jedoch beim Z^{600} einfache Reziprozitätsbetrachtungen schneller zum Ziele. Und gerade im Falle der Lageverhältnisse der 600 Tetraeder des Z^{600} in Stellung OE_0 ist diese Reziprozität am durchsichtlichsten. So ist wirklich Tafel X unmittelbar aus Tafel VIII^a abzulesen, wie wir zunächst betonen wollen; dabei sprechen wir, mit Unterdrückung des Wortes „Tafel“, der Kürze wegen von VIII^a und X.

Die neun Horizontalreihen und die fünfzehn Vertikalreihen von VIII^a gehen in die neun Vertikalreihen und die fünfzehn Horizontalreihen von X über; dabei tauschen die Anzahlgruppen (1, 12, 20, 12, 30, 12, 20, 12, 1) und (20, 20, 30, 60, 60, 60, 20, 60, 20, 60, 60, 60, 30, 20, 20) ihre Rollen um. Bemerkt man noch, dass die Mittelpunktsabstände

$$2 + 2e, 3 + e, 1 + e, 2, 0$$

der Vertikalreihen von X proportional sind zu den Schwerpunktsabständen

$$11 + 5e, 9 + 4e, \frac{11 + 5e}{2}, \frac{7 + 3e}{2}, 0$$

der Dodekaedergruppen von VIII^a vom Mittelpunkt des Z^{120} , so ist man völlig imstande das tragende Gitter von X zu zeichnen.

27. Wie die 600 Tetraeder des Z^{600} in das nun fertige Gitter einzutragen sind, wird vielleicht am leichtesten verstanden mittels Tafel XI, worin VIII^a (schwarz) und X (rot) mit einander zur Dec-

kung gebracht sind. Ist zunächst VIII^a wiederholt worden mit dieser besondern Anordnung der Horizontalreihen, dass die Zwischenräume nicht mehr einander gleich sondern den Zwischenräumen der Vertikalreihen von X proportional erscheinen, so hat man weiter nur (in Rot) auf jeder Vertikalreihe die Punkte zu verbinden, welche schon Eckpunkte des Z^{120} tragen, und endlich bei jedem Punkte des Gitters, welcher schon eine schwarze Zahl trägt, eine bestimmte rote Zahl hinzuschreiben, welche folgendermassen gefunden wird. Multipliziert man die schwarze Zahl (z. B. den 5 der vierten Reihe und sechsten Kolonne) mit der Zahl (12) der Reihe und dividiert die Zahl (60) der Kolonne in das erhaltene Produkt (60), so bestimmt man das rote Ziffer (1), welches dem betrachteten Gitterpunkte beizulegen ist.

28. Ist Tafel X einmal gefunden, so leitet man aus ihr die Anordnung der Kanten und die Schnitte ab, wie dies beim Z^{120} geschah. Diese Arbeit ist leicht, weil das Tetraeder von einer Ebene nur in Dreiecken und Vierecken geschnitten werden kann; die Resultate gibt Tafel XII. Wir bemerken noch, dass die genaue Form der Seitenflächen unmittelbar aus Tafel X abzulesen ist. So wird (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 225) der Schnitt (12, 30, 20) begrenzt von 20 roten gleichseitigen Dreiecken und ist dieser also ein rotes Ikosaeder; so wird der Schnitt (72, 180, 110) eingeschlossen von 20 orangefarbigem gleichseitigen Dreiecken, 30 gelben Rechtecken und 60 grünen gleichschenkligen Dreiecken, der erste Schnitt (132, 330, 200) von 60 grünen gleichschenkligen Dreiecken, 60 blauen gleichschenkligen Trapezen, 60 indigo gleichschenkligen Dreiecken und 20 violetten gleichseitigen Dreiecken, der zweite Schnitt (132, 330, 200) von 60 blauen gleichschenkligen Dreiecken, 60 indigo gleichschenkligen Trapezen, 20 violetten gleichseitigen Dreiecken und 60 schwarzen gleichschenkligen Dreiecken, usw.

Auch hier kann wieder leicht angegeben werden, welches Polyeder die Schnittebenen des Schnitttraumes senkrecht auf OE_0 mit den die Tetraeder einer Gruppe tragenden Räumen bei Verlängerung zusammen einschliessen. Man findet, wieder mit Hilfe der Schichtung der 600 Ecken des Z^{120} in Stellung OR_0 (Tafel VIII^a) für die

Gruppen I (rot), II (orange), VII (violett) ein Ikosaeder,

Gruppe III (gelb) das schon in Nr. 25 vorgeführte Polyeder (32, 60, 30),

Gruppen IV (grün), V (blau) das halbbreguläre gleichflächige Polyeder (32, 90, 60),

Gruppen VI (indigo), VIII (schwarz) das halbreguläre gleichflächige Polyeder (62, 120, 60).

Die neuen halbregulären gleichflächigen Polyeder (32, 90, 60) und (62, 120, 60) sind (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 189) dem sechsten und dem fünfzehnten der Archimedischen Vielfache polarreziprok verwandt.

29. War die Bestimmung der Seitenzahl der den Schnittkörper des Z^{600} begrenzenden Polygone leichter als bei Z^{120} , bei der Bestimmung der Vielkantigkeit der Eckpunkte der Schnitte, zu welcher wir uns jetzt wenden, tritt das umgekehrte Verhältnis ein. Allerdings können wir uns auch hier wieder auf die Uebergangsformen beschränken, weil die Eckpunkte der intermediären Schnitte (vergleiche Nr. 3 am Schluss) sämtlich *fünfkantig* sind. Aber die von den Zelleckpunkten herrührenden Eckpunkte eines intermediären Schnittes können von fünf- bis zwölfkantig sein. Denn das einem Zelleckpunkte des Z^{600} benachbarte Ikosaeder wird vom diesen Punkt enthaltenden Schnittraum in einem Polygone geschnitten, welches von fünf bis zwölf Seiten und also auch von fünf bis zwölf Eckpunkte hat, und die Verbindungslinien dieser Eckpunkte mit dem angenommenen Zelleckpunkte bilden die durch diesen Punkt gehenden Kanten des Schnittes. Allein diese Formulierung der Frage der Vielkantigkeitszahlen enthält auch sogleich ihre Lösung. Denn die oben erwähnten Polygone werden unmittelbar aus Tafel VIII^b abgeleitet als die Schnitte der dort auf $a b c \dots$ projizierten Ikosaeder mit in bestimmten Punkten — und zwar für das zweite, dritte, vierte und fünfte Ikosaeder der Reihe nach in b, c, d, e — auf dieser Gerade senkrecht stehenden Räumen. So findet man, in Verbindung mit den bekannten Ikosaederschichtungen, dass die in den vier Uebergangsformen liegenden Zelleckpunkte der Reihe nach fünfkantig, sechskantig, zehnkantig und sechskantig sind. Diese nicht in Tafel XII erwähnten Resultate werden in die tabellarische Uebersicht am Schluss dieser Abhandlung aufgenommen werden.

Die oben erhaltenen sich auf die Vielkantigkeit der Eckpunkte des Schnittes beziehenden Resultate können wieder auf verschiedene Weisen kontrolliert werden. Zunächst ist, wenn x und y die Zahlen der fünfkantigen und t -kantigen Eckpunkte des Schnittes angeben

$$x + y = e, \quad 5x + ty = 2k.$$

Und weiter ist die Zahl y im Allgemeinen entweder Null oder der Zahl e' der Zelleckpunkte des Schnittes gleich. Nur wenn die

Gruppe dieser e' Zelleckpunkte sich zerlegt in Untergruppen verschiedenen Charakters, welcher Fall hier noch nicht auftritt, wird es notwendig sein für jede dieser Untergruppen, welche dann auch in die Tafel der benachbarten Ikosaeder erscheinen wird, eine eigene Vielkantigkeitszahl zu suchen.

6) Die Stellung OK_0 .

30. Bei der Ableitung der in Tafel XIII angegebenen Projektionen der 600 Tetraeder des Z^{600} auf einen Hauptstrahl OK_0 als Achse aus der Tafel VI^a, welche für die 120 Dodekaeder des Z^{120} in Stellung OF_0 das nämliche leistet, begegnet uns eine Schwierigkeit. Multipliziert man die Zahlen (5, 4, 3, 5, 2) der vierten Kolonne der Reihe nach mit den Zahlen (2, 5, 10, 2, 5) der entsprechenden Horizontalreihen, so erhält man die Produkte (10, 20, 30, 10, 10), welche bei Teilung durch die Zahl 20 der Kolonne die Quotiente $\left(\frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ liefern, deren Summe richtig vier ist. Hieraus ist zu entnehmen, dass die Gruppe der zwanzig Tetraeder der vierten Reihe der Tafel XIII in zwei (= dem gemeinsamen Nenner der gebrochenen Quotiente) Untergruppen von zehn Tetraedern zerlegt werden muss, welche Untergruppen, obgleich sie die nämliche Schwerpunktsprojektion besitzen in der Projektion ihrer Eckpunkte von einander verschieden sind. Aus der bekannten Mittelpunktsentfernung des Schwerpunktes, $\frac{1}{4}(11 + 5e)$ nach dem Masstabe der Ueberschrift der Tafel XIII, findet man dann weiter, dass man zwischen den beiden in Fig. 10 vorgeführten Anordnungen zu wählen hat und von diesen ist dann, wie sich aus den Tabellen der ersten Abhandlung ergibt, die zweite die wirkliche. Wie Tafel XIII anzeigt, wiederholt sich die Zerlegungsnotwendigkeit der Gruppen in Untergruppen mit gemeinschaftlicher Schwerpunktsprojektion sehr oft, ist aber jedesmal die Zahl der Untergruppen zwei.

Bei der Ableitung von Tafel XIV aus Tafel XIII ist nur zu bemerken, dass die beiden Untergruppen von 10 und 2 Dodekaedern, welche zusammen die Mittelgruppe von Tafel VI^a bilden, sich zu einer Gruppe mit den auf (l, m, n, o, p, q) fallenden Produkte (10, 30, 10, 20, 20, 30) vereinen, während die bei der Vielkantigkeit der Zelleckpunkte zu betrachtende Mittelgruppe von zwölf Ikosaedern sich umgekehrt in zwei Untergruppen von zehn und zwei Ikosaedern

zerlegt, wie Tafel VI^b zeigt, woraus hervorgeht, dass zehn der zwölf Zelleckpunkte achtkantig, die beiden übrigen zehnkantig sind.

c) **Die Stellung OF_0 .**

31. Bei der Ableitung der Projektionen der 600 Tetraeder des Z^{600} auf einen Hauptstrahl OF_0 als Achse aus Tafel IV^a haben wir wieder die oben schon beschriebene Schwierigkeit der Zerlegung der Gruppen in Untergruppen zu bekämpfen. Wie Tafel XV zeigt, ereignet es sich hier sogar, dass eine Gruppe, die Mittelgruppe, sich in *drei* Untergruppen zerlegt.

Die Konstruktion der Tafel XV gibt zu keiner Bemerkung Anlass. Ebenso wenig die Ableitung der Tafel XVI, welche wieder die Kantenprojektionen und die Charaktere der Schnittpolyeder kennen thut, und die Berechnung der Vielkantigkeitzahlen. Nur mag noch betont werden, dass in Tafel XVI die überstrichenen Seitenflächen wieder erscheinen und die Mittelgruppe der acht benachbarten Ikosaeder sich in zwei Untergruppen von sechs und zwei Ikosaedern zerlegt.

d) **Die Stellung OR_0 .**

32. Diesem letzten Falle entsprechen die Tafeln XVII und XVIII, von welchen die erste aus Tafel II^a abgeleitet werden kann. Dabei ist es nicht nur die Mittelgruppe sondern sind es auch zwei in gleicher Entfernung von der Mitte liegende Gruppen, welche in drei Teile zerfallen. In diesen der Reziprozitätsanwendung innewohnenden Schwierigkeiten geben die Tabelle der ersten Abhandlung immer sichere und zuverlässige Auskunft.

Auch hier mag wieder angewiesen werden, welche Polyeder die Schnittebenen der die Tetraeder einer Gruppe tragenden Räume mit dem Schnitttraume senkrecht auf OR_0 bilden. Man findet, wieder mit Hilfe der Schichtung der Ecke des Z^{120} in Stellung OE_0 (vergleiche Tafel II^a), der Reihe nach bei der Gruppe mit

4 Tetraedern . .	(4, 6, 4)	ein l. Tetraeder,
12 „ . .	(8, 18, 12)	„ l. Pyramidentetraeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ Pyramidenhexaeder.
12 „ . .	(8, 18, 12)	„ r. Pyramidentetraeder,
4 „ . .	(4, 6, 4)	„ r. Tetraeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ l. Hexakistetraeder,
12 „ . .	(8, 18, 12)	„ r. Pyramidentetraeder,
12 „ . .	(14, 24, 12)	„ l. Triakistetraeder,
4 „ . .	(4, 6, 4)	„ l. Tetraeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ Pyramidenhexaeder,
4 „ . .	(4, 6, 4)	„ r. Tetraeder,
12 „ . .	(8, 18, 12)	„ l. Pyramidentetraeder,
12 „ . .	(8, 18, 12)	„ r. Pyramidentetraeder,
12 „ . .	(14, 24, 12)	„ l. Triakistetraeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ Pyramidenhexaeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ r. Hexakistetraeder,
4 „ . .	(4, 6, 4)	„ l. Tetraeder,
12 „ . .	(8, 18, 12)	„ l. Pyramidentetraeder,
12 „ . .	(14, 24, 12)	„ l. Triakistetraeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ l. Hexakistetraeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ l. Hexakistetraeder,
6 „ . .	(8, 12, 6)	„ Hexaeder,
24 „ . .	(14, 36, 24)	„ r. Hexakistetraeder,
usw.		

Die Ableitung dieser Formen liefert keine Schwierigkeit, wenn die bei der Schichtung der Eckpunkte des Z^{120} in Stellung OL_0 auftretenden polarreziproken Polyeder bekannt sind; weil diese Polyeder in der dritten Abhandlung in Bild erscheinen werden, erörtern wir diesen Punkt hier nicht weiter.

III. Tabellarische Uebersicht der Resultate.

33. Wird ein Schnitt vom Symbole

$$a^b c^d \dots (P, Q, R) \alpha^\beta \gamma^\delta \dots$$

gekennzeichnet, so soll dies aussagen, dass das Schnittpolyeder von b Vielecken mit a Seiten, d Vielecken mit c Seiten, usw. begrenzt wird, P Eckpunkte, Q Kanten, R Seitenflächen hat und dass durch β von den Eckpunkten α Kanten, durch δ von den

Eckpunkten γ Kanten gehen, usw. Diesem Schnitte irgend eines der beiden Zelle Z^{120} , Z^{600} ist dann der Schein

$$\alpha^\beta \gamma^\delta \dots (R, Q, P) \alpha^b c^d \dots$$

des andren polarreziprok verwandt, welcher von β Vielecken mit α Seiten, δ Vielecken mit γ Seiten, usw. eingeschlossen wird, R Eckpunkte, Q Kanten, P Seitenflächen zählt, während b der Eckpunkte a -kantig, d der Eckpunkte c -kantig sind, usw. Weil diese Scheine sich unmittelbar aus den Schnitten ablesen lassen beschränken wir die tabellarische Uebersicht der Resultate auf die Schnitte.

Zur leichteren Orientirung der Schnittstelle lassen wir dem Symbole einer Uebergangsform die entsprechende Buchstabe des betreffenden Hauptstrahles, dem Symbole eines intermediären Schnittes die Buchstaben der beiden benachbarten Uebergangsformen vorangehen.

34. Die Schnitte des Z^{120} .

a) Stellung $0E_0$.

$ab \dots \dots \dots 3^4(4, 6, 4) 3^4$	$i \dots 3^{12} 4^6 5^{12} 6^{12} (56, 96, 42) 3^{32} 4^{24}$
$b \dots \dots \dots 3^4(4, 6, 4) 3^4$	$ik \dots 3^4 4^6 5^{12} 7^{24} (88, 132, 46) 3^{88}$
$bc \dots \dots \dots 3^4 6^4 (12, 18, 8) 3^{12}$	$k \dots 3^4 5^{24} 6^{12} (64, 102, 40) 3^{52} 4^{12}$
$c \dots \dots \dots 3^4 6^4 (12, 18, 8) 3^{12}$	$kl \dots \dots 5^{12} 6^{28} (76, 114, 40) 3^{76}$
$cd \dots \dots \dots 4^6 6^8 (24, 36, 14) 3^{24}$	$l \dots \dots 5^{12} 6^{28} (76, 114, 40) 3^{76}$
$d \dots \dots \dots 4^6 6^8 (24, 36, 14) 3^{24}$	$lm \dots 3^{12} 6^{28} 8^{12} (100, 150, 52) 3^{100}$
$de \dots \dots 4^{12} 6^8 8^6 (48, 72, 26) 3^{48}$	$m \dots 3^{12} 4^{12} 6^{28} (76, 126, 52) 3^{52} 4^{24}$
$e \dots \dots 3^4 4^{12} 6^{10} (36, 60, 26) 3^{24} 4^{12}$	$mn \dots 4^{12} 5^{12} 6^{16} 8^{12} (100, 150, 52) 3^{100}$
$ef \dots \dots \dots 3^4 6^{22} (48, 72, 26) 3^{48}$	$n \dots \dots 5^{12} 6^{28} (76, 114, 40) 3^{76}$
$f \dots \dots \dots 5^{12} 6^{10} (40, 60, 22) 3^{40}$	$no \dots 3^4 5^{12} 6^{16} 7^{12} (84, 126, 44) 3^{84}$
$fg \dots \dots \dots 5^{12} 6^{10} (40, 60, 22) 3^{40}$	$o \dots \dots 3^4 5^{24} 6^{16} (72, 114, 44) 3^{60} 4^{12}$
$g \dots \dots \dots 5^{12} 6^{10} (40, 60, 22) 3^{40}$	$op \dots 3^{12} 6^{32} 8^{12} (108, 162, 56) 3^{108}$
$gh \dots \dots 4^{12} 6^{10} 7^{12} (64, 96, 34) 3^{64}$	$p \dots 3^{12} 4^{12} 6^{32} (84, 138, 56) 3^{60} 4^{24}$
$h \dots \dots 3^4 4^{12} 6^{18} (52, 84, 34) 3^{40} 4^{12}$	$pq \dots 4^{12} 5^{12} 6^{20} 8^{12} (108, 162, 56) 3^{108}$
$hi \dots 3^{16} 6^{12} 8^{18} (88, 132, 46) 3^{88}$	$q \dots \dots 5^{24} 6^{20} (78, 120, 44) 3^{72} 4^6$

b) Stellung OK_0 .

ab $3^2 4^3 (6, 9, 5) 3^6$	mn . $3^{12} 6^{18} 7^6 8^9 (86, 129, 45) 3^{86}$
b $3^2 4^3 (6, 9, 5) 3^6$	n $3^6 5^{18} 6^{15} (62, 99, 39) 3^{50} 4^{12}$
bc $3^6 6^2 8^3 (18, 27, 11) 3^{18}$	no . . $3^6 5^6 6^{27} 8^6 (86, 129, 45) 3^{86}$
c $3^6 6^5 (15, 24, 11) 3^{12} 4^3$	o . . $3^6 4^6 5^{12} 6^{21} (71, 114, 45) 3^{50} 4^{21}$
cd $4^6 6^5 (18, 27, 11) 3^{18}$	op . $4^6 5^{12} 6^{15} 7^{12} (86, 129, 45) 3^{86}$
d $4^6 6^5 (18, 27, 11) 3^{18}$	p . $4^6 5^{12} 6^{15} 7^{12} (86, 129, 45) 3^{86}$
de $4^6 6^{11} (30, 45, 17) 3^{30}$	pq . $3^2 4^6 5^{12} 6^9 7^{18} (90, 135, 47) 3^{90}$
e $4^6 6^{11} (30, 45, 17) 3^{30}$	q . $3^2 5^{12} 6^{21} 7^6 (78, 117, 41) 3^{78}$
ef . . . $3^6 4^6 6^2 8^9 (42, 63, 23) 3^{42}$	qr . $3^2 4^6 5^{12} 6^9 7^{18} (90, 135, 47) 3^{90}$
f $3^6 4^9 6^8 (30, 51, 23) 3^{18} 4^{12}$	r . $3^8 4^6 5^{12} 6^{21} (72, 117, 47) 3^{54} 4^{18}$
fg $4^3 5^6 6^{14} (42, 63, 23) 3^{42}$	rs . . $3^6 5^6 6^{29} 8^6 (90, 135, 47) 3^{90}$
g $5^{12} 6^8 (36, 54, 20) 3^{36}$	s $5^{12} 6^{29} (78, 117, 41) 3^{78}$
gh . . . $4^6 5^6 6^8 7^6 (48, 72, 26) 3^{48}$	st . $3^6 5^6 6^{23} 7^{12} (90, 135, 47) 3^{90}$
h . . . $3^2 4^6 5^6 6^{12} (42, 66, 26) 3^{36} 4^6$	t . . $3^6 4^6 5^6 6^{29} (78, 123, 47) 3^{66} 4^{12}$
hi $3^2 4^3 6^{24} (54, 81, 29) 3^{54}$	tu . $3^6 4^6 5^{12} 6^8 7^{12} 8^9 (102, 153, 53) 3^{102}$
i $4^3 5^6 6^{18} (50, 75, 27) 3^{50}$	u . $3^6 4^3 5^{12} 6^{26} (78, 123, 47) 3^{66} 4^{12}$
ik . $3^{12} 4^3 5^6 8^{18} (74, 111, 39) 3^{74}$	ur . . $4^3 5^{12} 6^{26} 7^6 (90, 135, 47) 3^{90}$
k . . . $4^3 5^6 6^{12} 8^6 (62, 99, 39) 3^{50} 4^{12}$	v . . $4^3 5^{24} 6^{14} 7^6 (84, 129, 47) 3^{78} 4^6$
kl . $4^{15} 6^{12} 7^6 8^6 (74, 111, 39) 3^{74}$	vw . $3^{12} 4^3 6^{26} 7^6 8^{12} (114, 171, 59) 3^{114}$
l $4^{21} 6^{12} 7^6 (62, 99, 39) 3^{50} 4^{12}$	w . $3^{12} 4^{35} 5^{12} 6^{20} 8^6 9^6 (102, 159, 59) 3^{90} 4^{12}$
lm . $3^6 4^6 5^{12} 7^{12} 8^9 (86, 129, 45) 3^{86}$	wx . $4^{15} 5^{12} 6^{20} 8^6 9^6 (114, 171, 59) 3^{114}$
m . $3^{12} 5^{12} 6^6 7^6 8^9 (80, 123, 45) 3^{74} 4^6$	x . . . $4^{24} 6^{26} 8^6 (96, 150, 56) 3^{84} 4^{12}$

c) Stellung OF_0 .

ab $4^5 5^2 (10, 15, 7) 3^{10}$	g $5^{12} 6^{15} (50, 75, 27) 3^{50}$
b $4^5 5^2 (10, 15, 7) 3^{10}$	gh . $3^{10} 5^{10} 6^5 8^{10} 10^2 (70, 105, 37) 3^{70}$
bc $3^{10} 8^5 10^2 (30, 45, 17) 3^{30}$	h . $3^{10} 5^{10} 6^{15} 10^2 (60, 95, 37) 3^{50} 4^{10}$
c $3^{10} 5^2 6^5 (20, 35, 17) 3^{10} 4^{10}$	hi . . $4^{10} 6^{25} 10^2 (70, 105, 37) 3^{70}$
cd $5^{12} 5^5 (30, 45, 17) 3^{30}$	i $4^{10} 5^{12} 6^{15} (60, 95, 37) 3^{50} 4^{10}$
d $5^{12} 6^5 (30, 45, 17) 3^{30}$	ik . $4^{10} 5^{12} 6^{15} 8^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$
de $4^5 5^2 6^{15} (40, 60, 22) 3^{40}$	k . $3^{10} 4^{10} 5^2 6^{25} (70, 115, 47) 3^{50} 4^{20}$
e $4^5 5^2 6^{15} (40, 60, 22) 3^{40}$	kl . $3^{10} 5^2 6^{25} 8^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$
ef . . $3^{10} 4^5 5^2 8^{15} (60, 90, 32) 3^{60}$	l $5^{12} 6^{25} (70, 105, 37) 3^{70}$
f . . $3^{10} 4^{10} 5^2 6^{10} (40, 70, 32) 3^{20} 4^{20}$	lm . $3^{10} 5^{12} 6^{10} 8^{15} (90, 135, 47) 3^{90}$
fg . . $4^5 5^{12} 6^{10} 8^5 (60, 90, 32) 3^{60}$	m . $3^{10} 4^5 5^{12} 6^{20} (70, 115, 47) 3^{50} 4^{20}$

mn $4^5 5^{12} 6^{20} 7^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$
 n $4^5 5^{22} 6^{10} 7^{10} (85, 130, 47) 3^{80} 4^5$
 no $4^5 5^{12} 6^{20} 7^{10} (90, 135, 47) 3^{90}$
 o $5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$
 op $4^{10} 5^{12} 6^{20} 8^{10} (100, 150, 52) 3^{100}$

p $3^{10} 4^{10} 5^2 6^{30} (80, 130, 52) 3^{60} 4^{20}$
 pq $3^{20} 5^2 6^{10} 7^{10} 8^{20} (120, 180, 62) 3^{120}$
 q $3^{10} 5^{12} 6^{20} 7^{10} (90, 140, 52) 3^{80} 4^{10}$
 qr $4^{10} 5^{10} 6^{20} 7^{10} 10^2 (100, 150, 52) 3^{100}$
 r $4^{20} 5^{12} 6^{10} 10^{10} (80, 130, 52) 3^{60} 4^{20}$

d) Stellung OR_0 .

a $5^{12} (20, 30, 12) 3^{20}$
 ab $5^{12} (20, 30, 12) 3^{20}$
 b $5^{12} (20, 30, 12) 3^{20}$
 bc $3^{20} 10^{12} (60, 90, 32) 3^{60}$
 c $3^{20} 5^{12} (30, 60, 32) 4^{30}$
 cd $5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$
 d $5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$
 de $5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$

e $5^{12} 6^{20} (60, 90, 32) 3^{60}$
 ef $4^{30} 6^{20} 10^{12} (120, 180, 62) 3^{120}$
 f $3^{20} 4^{30} 5^{12} (60, 120, 62) 4^{60}$
 fg $3^{20} 5^{12} 8^{30} (120, 180, 62) 3^{120}$
 g $5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$
 gh $5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$
 h $5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80}$

35. Die Schnitte des Z^{600} .

a) Stellung OE_0 .

ab $3^{20} (12, 30, 20) 5^{12}$
 b $3^{20} (12, 30, 20) 5^{12}$
 bc $3^{80} 4^{30} (72, 180, 110) 5^{72}$
 c $3^{60} (32, 90, 60) 5^{12} 6^{20}$

cd $3^{140} 4^{60} (132, 330, 200) 5^{132}$
 d $3^{140} (72, 210, 140) 5^{60} 10^{12}$
 de $3^{140} 4^{60} (132, 330, 200) 5^{132}$
 e $3^{80} (42, 120, 80) 5^{12} 6^{30}$

b) Stellung OK_0 .

ab $3^{30} 4^5 (22, 55, 35) 5^{22}$
 b $3^{30} (17, 45, 30) 5^{12} 6^5$
 bc $3^{60} 4^{20} (52, 130, 80) 5^{52}$
 c $3^{60} (32, 90, 60) 5^{22} 7^{10}$
 cd $3^{100} 4^{40} (92, 230, 40) 5^{92}$
 d $3^{100} 4^{30} (82, 210, 130) 5^{80} 10^2$
 de $3^{100} 4^{40} (92, 230, 140) 5^{92}$
 e $3^{110} 4^{20} (77, 205, 130) 5^{72} 10^5$

ef $3^{120} 4^{50} (112, 280, 170) 5^{112}$
 f $3^{120} 4^{10} (72, 200, 130) 5^{62} 9^{10}$
 fg $3^{130} 4^{55} (122, 305, 185) 5^{122}$
 g $3^{130} 4^{25} (92, 245, 155) 5^{32} 8^{10}$
 gh $3^{150} 4^{65} (142, 355, 215) 5^{142}$
 h $3^{150} 4^{15} (92, 255, 165) 5^{82} 10^{10}$
 hi $3^{150} 4^{65} (142, 355, 215) 5^{142}$
 i $3^{140} 4^{20} (92, 250, 160) 5^{80} 8^{10} 10^2$

c) Stellung $0F_0$.

$ab \dots 3^{38} 4^9 (30, 75, 47) 5^{30}$	$fg \dots 3^{122} 4^{51} (114, 285, 173) 5^{111}$
$b \dots 3^{42} 4^3 (26, 69, 45) 5^{24} 9^2$	$g \dots 3^{128} 4^{39} (105, 270, 167) 5^{102} 10^3$
$bc \dots 3^{50} 4^{15} (42, 105, 65) 5^{42}$	$gh \dots 3^{134} 4^{57} (126, 315, 191) 5^{126}$
$c \dots 3^{56} (30, 84, 56) 5^{24} 8^6$	$h \dots 3^{134} 4^9 (78, 219, 143) 5^{66} 9^{12}$
$cd \dots 3^{80} 4^{30} (72, 180, 110) 5^{72}$	$hi \dots 3^{146} 4^{63} (138, 345, 209) 5^{133}$
$d \dots 3^{92} 4^6 (54, 150, 98) 5^{48} 10^6$	$i \dots 3^{152} 4^{36} (114, 300, 188) 5^{108} 10^6$
$de \dots 3^{104} 4^{42} (96, 240, 146) 5^{96}$	$ih \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$e \dots 3^{104} 4^{18} (72, 192, 122) 5^{66} 9^6$	$k \dots 3^{152} 4^{36} (114, 300, 188) 5^{108} 10^6$
$ef \dots 3^{110} 4^{45} (102, 255, 155) 5^{102}$	$kl \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$f \dots 3^{110} 4^{27} (84, 219, 137) 5^{78} 8^6$	$l \dots 3^{156} 4^{24} (104, 282, 180) 5^{96} 10^6 12^2$

d) Stellung $0R_0$.

$a \dots 3^4 (4, 6, 4) 3^4$	$e \dots 3^{116} 4^{12} (72, 198, 128) 5^{60} 8^{12}$
$ab \dots 3^{44} 4^{12} (36, 90, 56) 5^{36}$	$ef \dots 3^{140} 4^{60} (132, 330, 200) 5^{132}$
$b \dots 3^{52} (28, 78, 52) 5^{24} 9^4$	$f \dots 3^{140} 4^{12} (84, 234, 152) 5^{72} 9^{12}$
$bc \dots 3^{68} 4^{24} (60, 150, 92) 5^{60}$	$fg \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$c \dots 3^{80} (42, 120, 80) 5^{36} 10^6$	$g \dots 3^{160} 4^{92} (124, 324, 202) 5^{120} 12^4$
$cd \dots 3^{92} 4^{36} (84, 210, 128) 5^{84}$	$gh \dots 3^{152} 4^{66} (144, 360, 218) 5^{144}$
$d \dots 3^{92} (48, 138, 92) 5^{36} 8^{12}$	$h \dots 3^{152} 4^6 (84, 240, 158) 5^{72} 10^{12}$
$de \dots 3^{116} 4^{48} (108, 270, 164) 5^{108}$	

36. *Schlussbemerkungen.* Die tabellarische Uebersicht der Schnittresultate bleibt in einem Rücksicht bei den Tafeln zurück: aus den Tafeln liest man ab, wie die von den verschiedenen Gruppen begrenzender Dodekaeder und Tetraeder herrührenden Seitenflächen bei paralleler Verschiebung des Schnitttraumes in einander übergehen, was den Nrn. 34 und 35 nicht so leicht zu entnehmen ist.

Im ganzen treten

$$\begin{aligned} \text{bei } Z^{120} & \dots 30 + 44 + 32 + 15 = 121, \\ \text{,, } Z^{600} & \dots 8 + 16 + 20 + 15 = 59 \end{aligned}$$

Schnittpolyeder auf.

Bei Z^{120} findet man nur ein einziges von Dreiecken eingeschlossenes Schnittpolyeder, 3^4 ; bei Z^{600} giebt es deren neun, nämlich

$$3^4, 3^{20}, 3^{30}, 3^{52}, 3^{56}, 3^{60}, 3^{80}, 3^{140},$$

von welchen 3^{60} in den beiden Stellungen OE_0 und OK_0 von Z^{600} angetroffen wird.

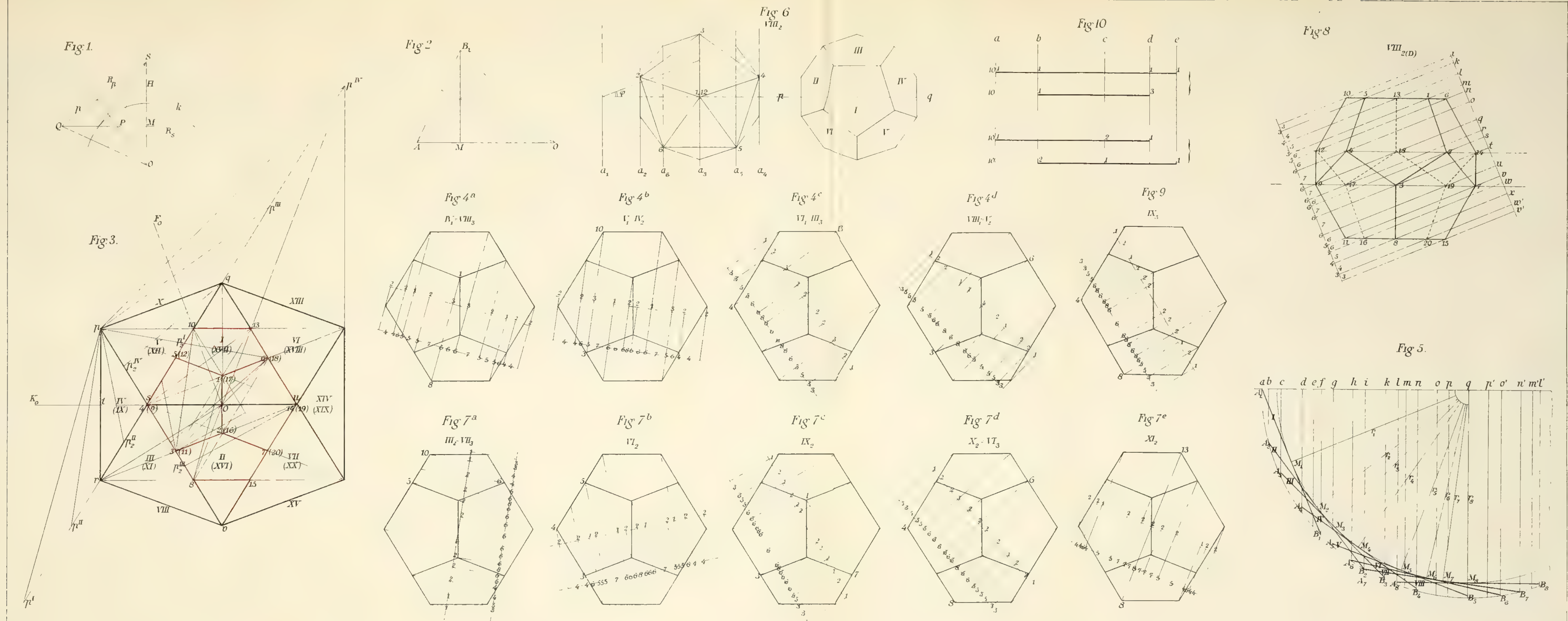
Von den 15 Scheinen von Z^{600} in Stellung OE_0 werden 13 nur von Dreiecken, die beiden übrigen nur von Vierecken begrenzt.

Will man zu den wirklichen Formen der Schnittfiguren aufsteigen, so reichen die hier erhaltenen Resultate noch nicht aus, muss man vielmehr noch zweierlei bedenken. Zunächst muss man für jede der acht Schnittreihen tun, was hier nur geschah für die vier Reihen der extremen Stellungen OE_0 , OR_0 : die Polyeder bestimmen, welche eingeschlossen werden von den Schnittebenen des Schnitttraumes mit den die Grenzpolyeder einer jeglichen Gruppe tragenden Räumen. Sind diese Polyeder bestimmt, so müssen die Schnittpolygone in ihren wirklichen Lagen in die Seitenflächen dieser Polyeder hineingezeichnet werden. Dieser Gedanken soll in der dritten Abhandlung für einzelne Schnittpolyederreihen verwirklicht werden. Dort wird sich dann ergeben, ob zwei Schnitte mit dem nämlichen Symbole — wie z.B. die Schnitte (Z^{120}, OE_0, o) , (Z^{120}, OR_0, g) mit dem Symbole

$$5^{12} 6^{30} (80, 120, 42) 3^{80} —$$

nur *allomorph* (*Mehrdimensionale Geometrie*, II, S. 23) oder aber auch *isomorph* sind, usw.

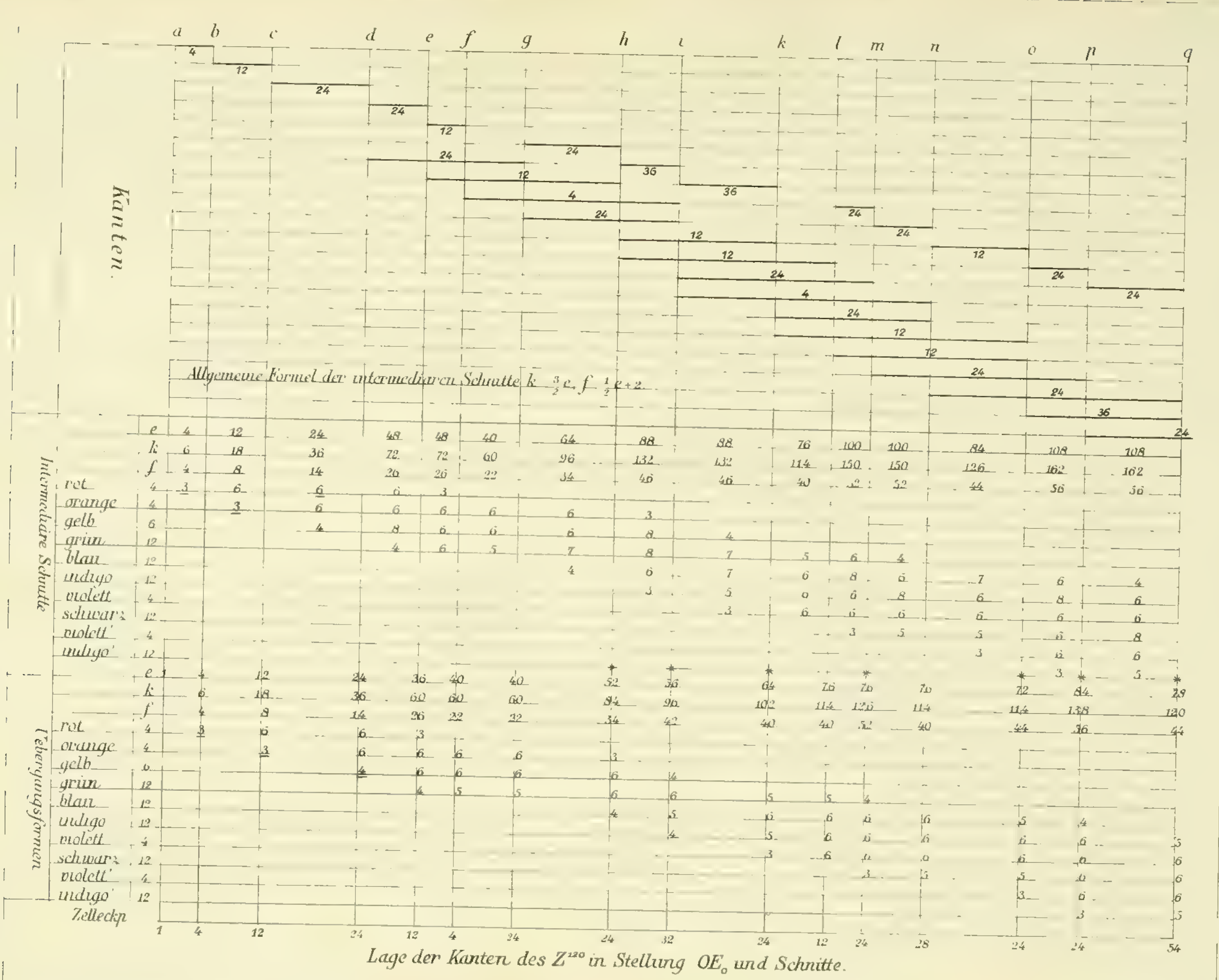
Auch wenn diese Arbeit für die sämtlichen acht Schnittreihen erbracht wäre, würde das Thema dieser Schnitte und Scheine noch nicht ganz erschöpft sein. Um nur noch einen Punkt zu streifen bemerken wir, dass es nur noch *wahrscheinlich* ist aus den hier gegebenen Entwicklungen, dass das Polyeder $(120, 180, 62)$ für Z^{120} und das Polyeder $(144, 360, 218)$ für Z^{600} den Schnitt mit der grössten Eckpunkten- und Seitenanzahl bildet; vielleicht würde die Entscheidung dieser Frage zu neuen Problemen Anlass geben.



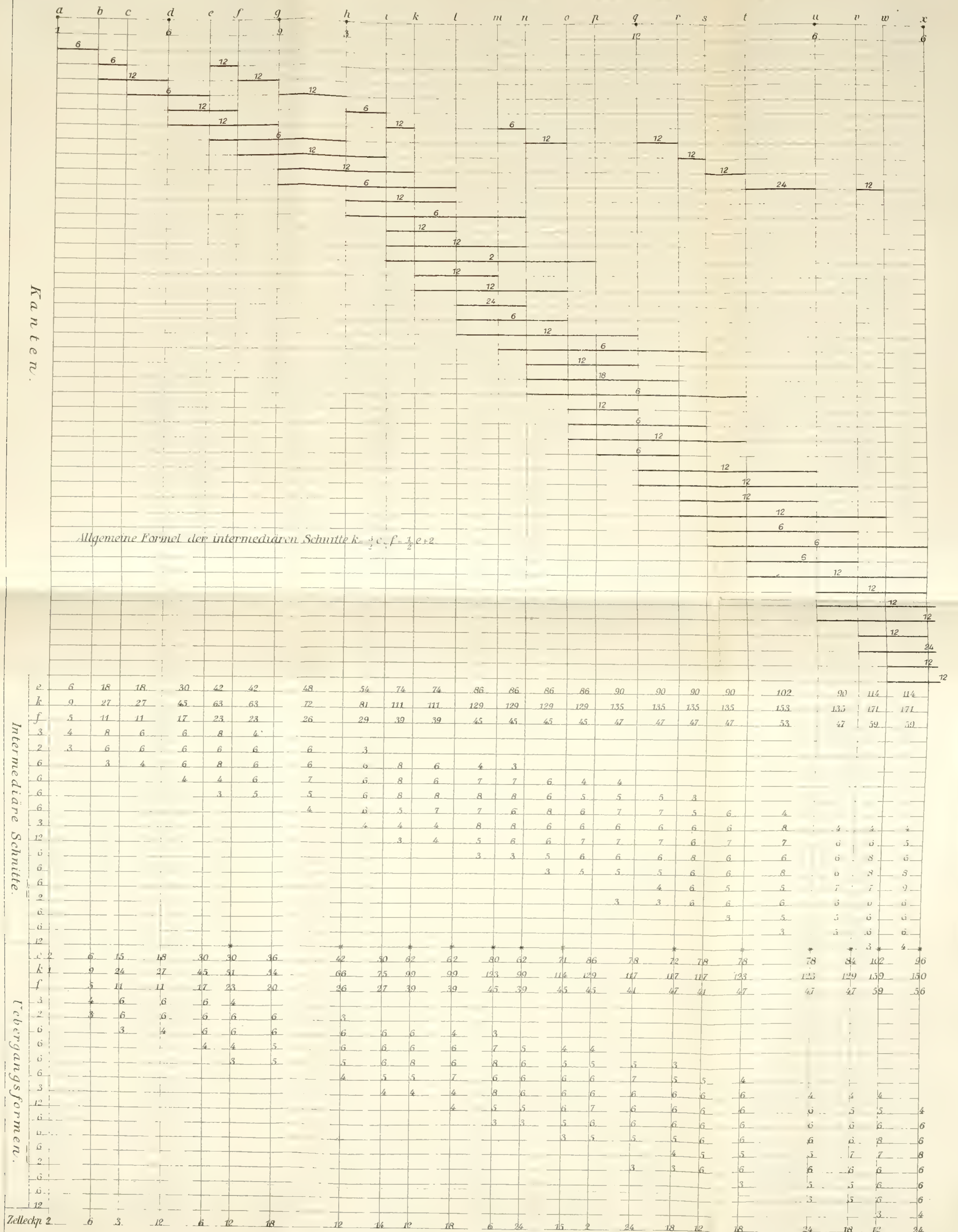
[illegible]

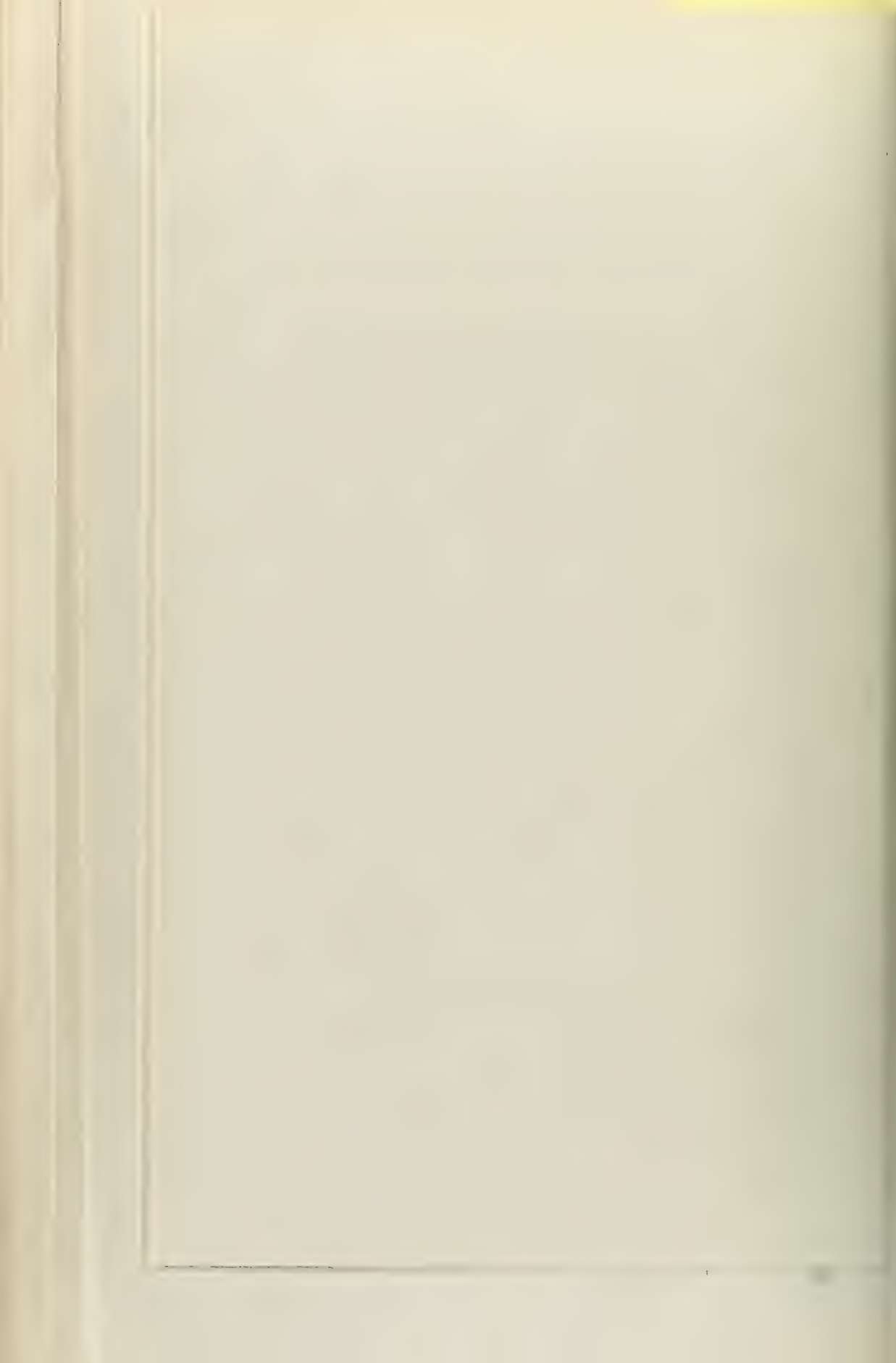
^{a)} Lage der begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Stellung OE_0 .

b) Lage der Nachbarikosäeder des Z^{600} in Stellung OR_0 .



b) Lage der Nachbarikosaeder des Z^{600} in Stellung OF_0 .

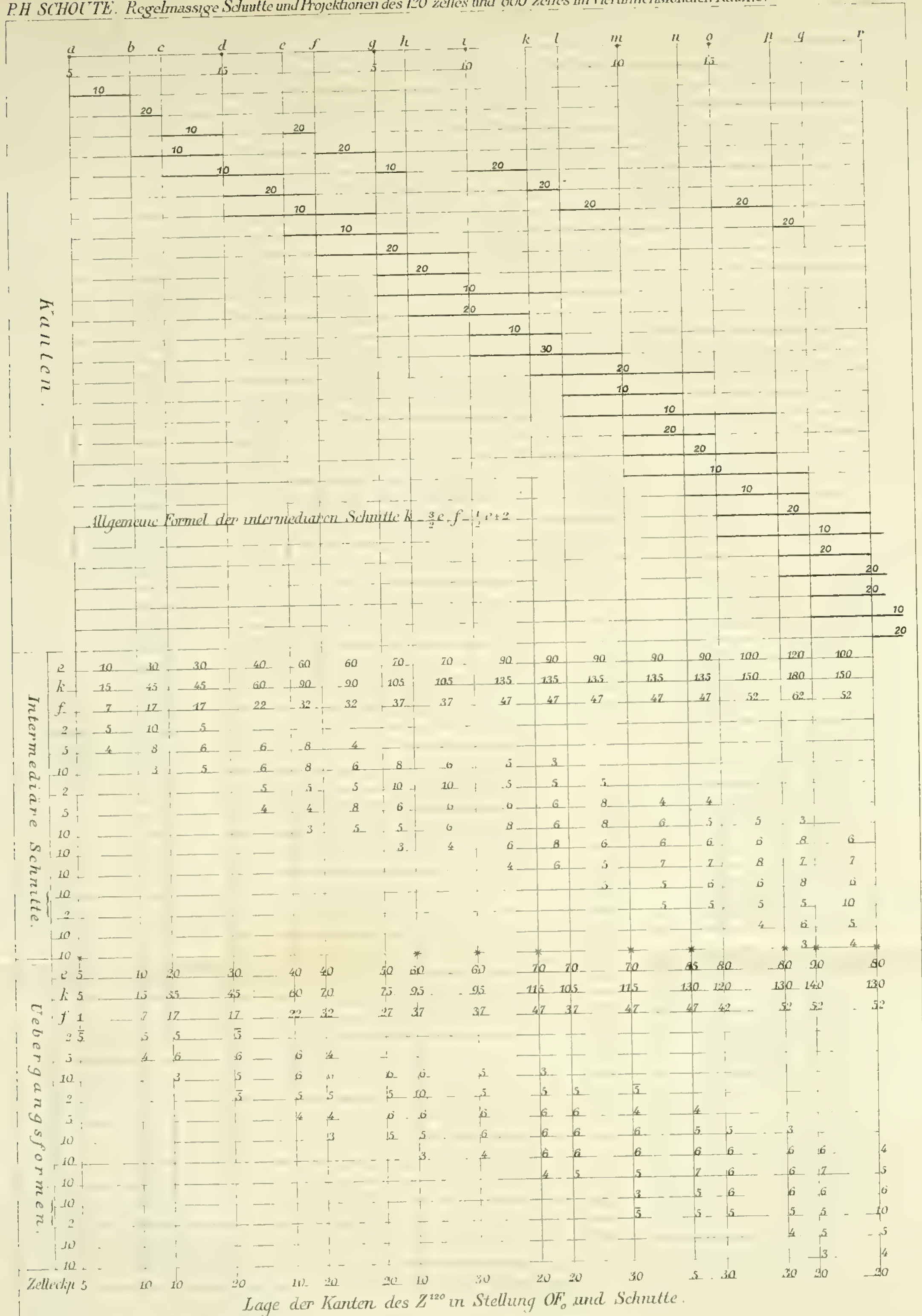




[illegible]

^{a)} Lage der begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Stellung Of_0 .

b) Lage der Nachbarikosaeder des Z^{600} in Stellung OK_0 .



$11+5e$	$10+4e$	$8+4e$	$7+3e$	$4+2e$	$1+e$	0	2	$1+e$	$3+e$	$2+2e$	$-(1+e)$	$-(3+e)$	$-(2+2e)$	
a'	b'	c'	d'	e'	f'	g'	h	g	f	e	d	c	b	a
I_4	$2+2e$	12												1
II_4	$3+e$	1	5	5	1									12
III_4	$1+e$	3	3	3	3									20
IV_4	2	1	5	5	1									12
V_4	0		2	2	4	2	2							30
IV'_4	-2		1	5	5	1								12
III'_4	$-(1+e)$		3	3	3	3								20
II'_4	$-(3+e)$		1	5	5	1								12
I'_4	$-(2+2e)$													12
120	20	20	30	60	60	20	60	20	60	60	30	20	20	1

^{a)} Lage der begrenzenden Dodekaeder des Z^{120} in Stellung OR_0 .

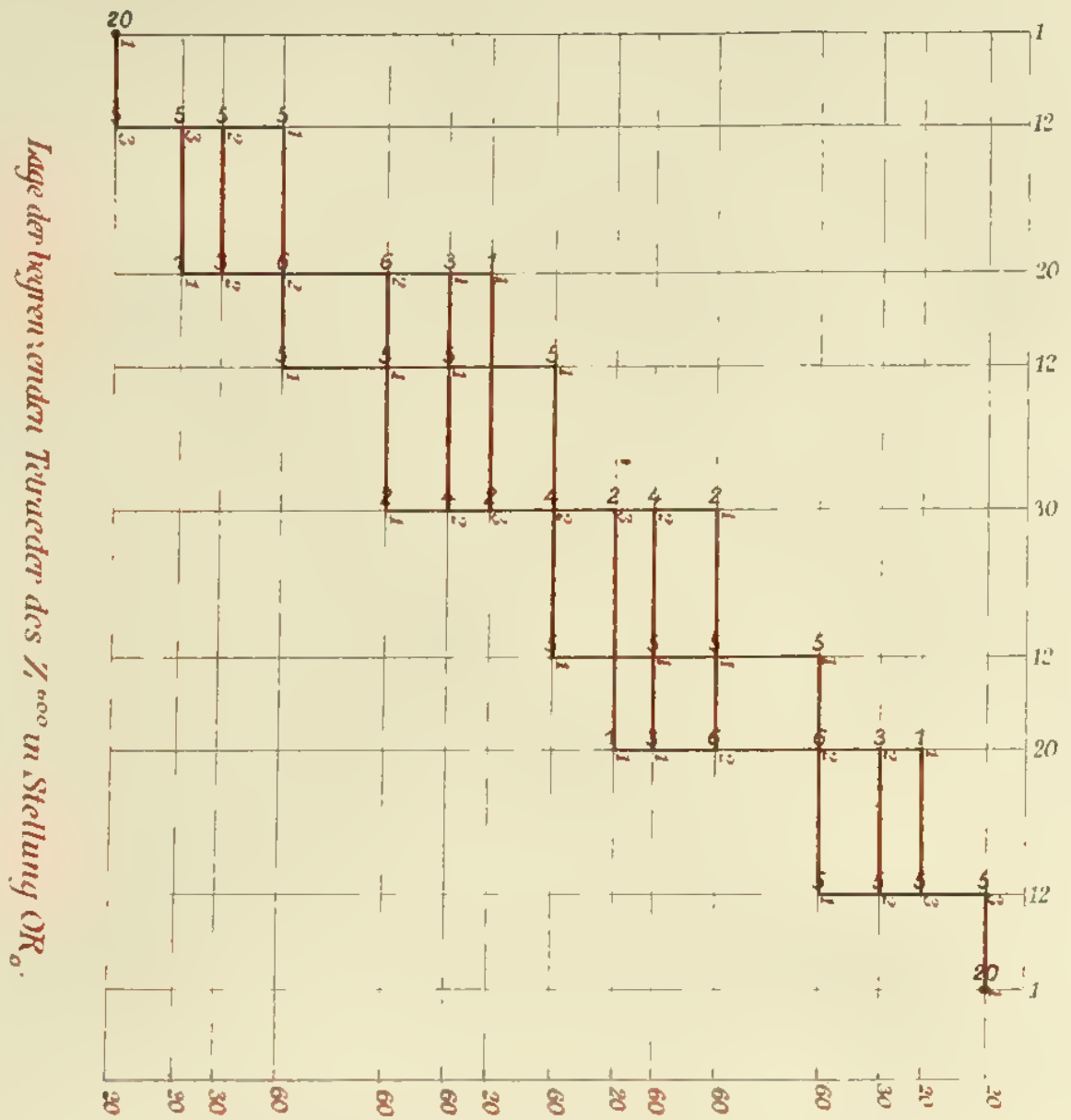
^{b)} Lage der Nachbarkoseder des Z^{600} in Stellung OE_0 .

	a	b	c	d	e	f	g	h
Kanten	30			60	30			60
	20							
		60						
			60					
				60				
					120			
Allgemeine Formel der intermediären Schnitte $k = \frac{3}{2}e$, $f = \frac{1}{2}e + 2$.								
						60		
							60	
								20
Intermediäre Schnitte.	e	20	60	60	60	120	120	80
	k	30	90	90	90	180	180	120
	f	12	32	32	32	62	62	42
	12	5	10	5				
	20		3	6	6	6	3	
	12				5	10	5	5
	30					4	*	8
Uebergangs- formen.	e	20	20	30	60	60	80	80
	k	30	30	60	90	120	120	120
	f	12	12	32	32	62	42	42
	12	5	5	5	5			
	20		3	6	6	3		
	12			5	5	5	5	5
	30					4	6	6
	12							5
Zelleckp.	20	20	30	60	60	60	20	60

Lage der Kanten des Z^{120} in Stellung OR_0 und Schnitte.

		$2+2e$	$3+e$	$1+e$	2	0	-2	$-(1+e)$	$-(3+e)$	$-(2+2e)$
		<i>a</i>	<i>b</i>	<i>c</i>	<i>d</i>	<i>e</i>	<i>d'</i>	<i>e'</i>	<i>b'</i>	<i>a'</i>
rot	20	1	3							
orange	20		3	1						
gelb	30		2	2						
grün	60		1	2	1					
blau	60			2	1	1				
indigo	60			1	1	2				
violett	20			1		3				
schwarz	60				1	2	1			
violett'	20					3		1		
indigo'	60					2	1	1		
blau'	60					1	1	2		
grün'	60						1	2	1	
gelb'	30							2	2	
orange'	20							1	3	
rot'	20								3	1
	600									
Zelleckp		1	12	20	12	30	12	20	12	1

Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OE_0 .



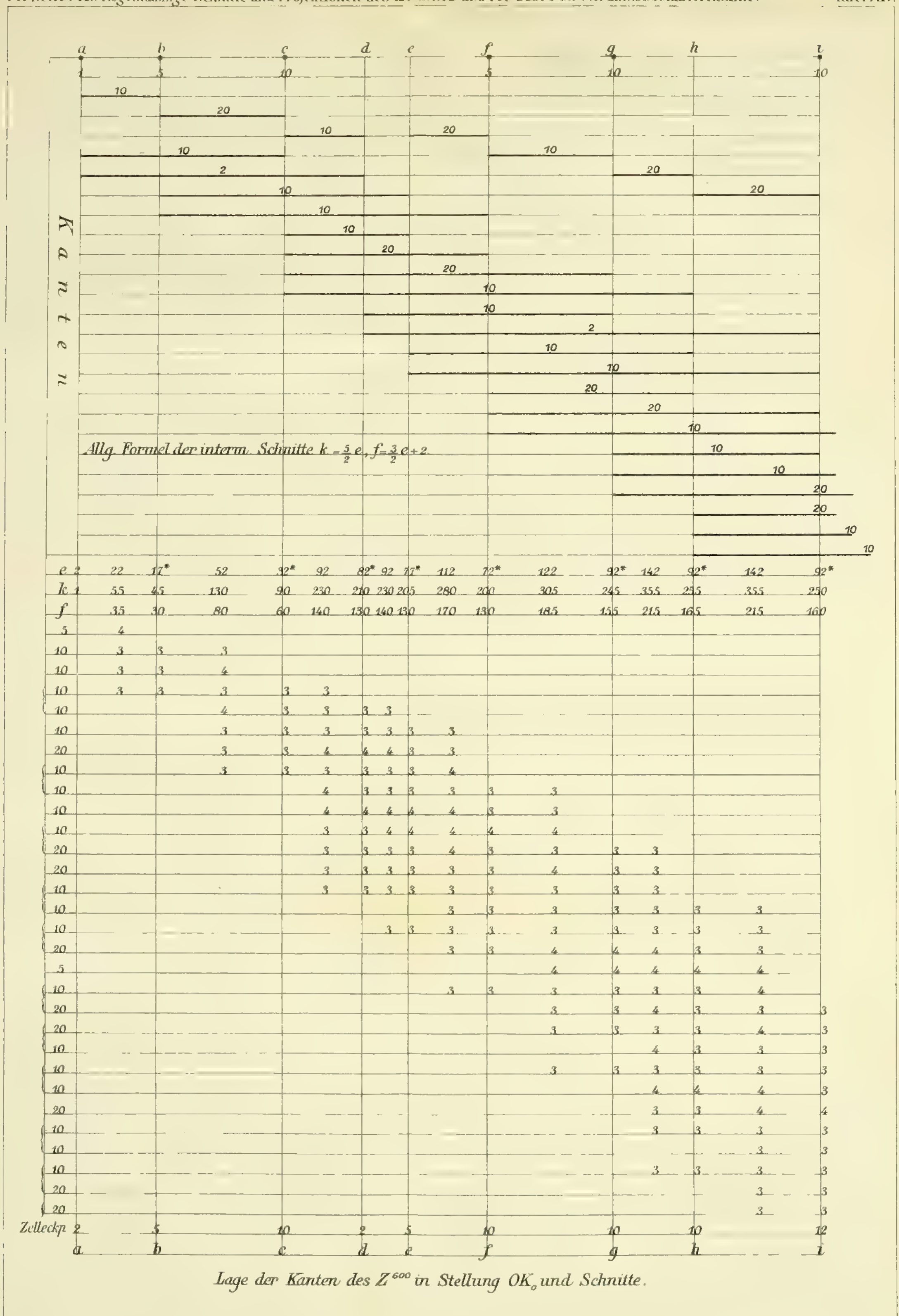
Lage der begrenzenden Dodckaeder des Z^{120} in Stellung OR_0 .

		a	b	c			d		e
Kanten.			30		30			60	
		12							
			60						
				60					
					60				
				12					
		Allg. Formel der intern. Schnitte					60		
	$k = \frac{3e}{2}, f = \frac{3e}{2} + 2$								12
	e	12	12	72	32*	132	72*	132	42*
	k	30	30	180	90	330	210	330	120
	f	20	20	110	60	200	140	200	80
rot	20	3	$\overline{3}$						
orange	20		$\overline{3}$	3					
gelb	30			4					
grün	60			3	3	3			
blau	60					4	3	3	
indigo	60					3	3	4	
violett	20					3	3	3	$\overline{3}$
schwarz	60							3	3
violett'	20								$\overline{3}$
Zelleckp.	1		12		20		12		30

Lage der Kanten des Z^{600} in Stellung OE_0 und Schritte.

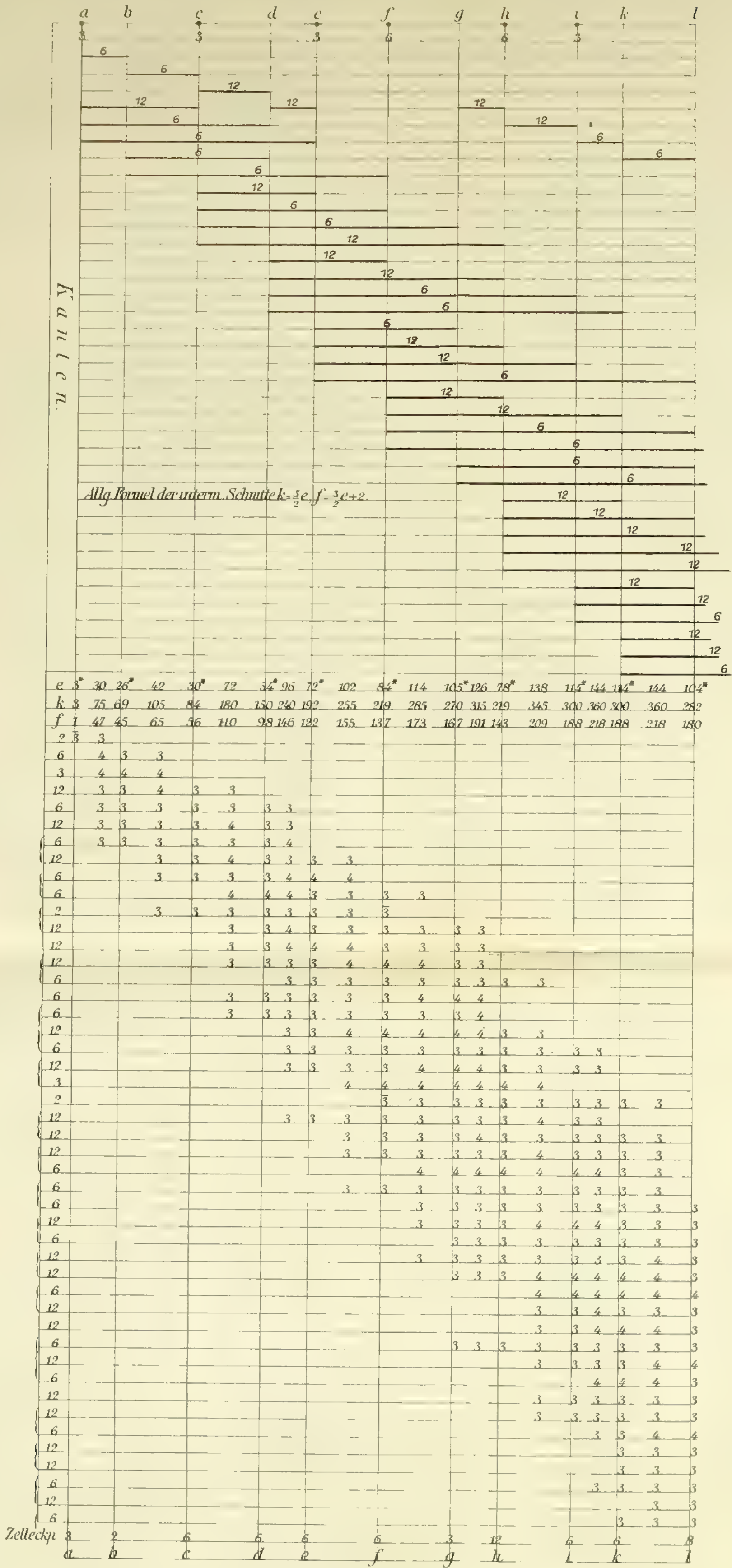
	$5+2c$	$2+2c$	$3+c$	$2c$	4	$1+c$	0	$-1+c$	0	$1-c$	-2	$-(1+c)$	4	$-2c$	$-(3+c)$	$-(2+2c)$	$-(5+2c)$
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'
	5	2															
10	1	2	1														
10	1	1	2														
10	1		2	1													
10		2	1		1												
10		1	2			1											
20		1	1		1	1											
10		1			1	2											
10			2	1			1										
10			2			1	1										
10			1	1			2										
20			1		1	1		1									
20			1			1	1	1									
10			1				2	1									
10				1	2				1								
10				1			2			1							
20				1	1			1	1								
5						2			2								
10					1			1	2								
20						1		1	1	1							
20						1		1	1	1							
10							2	1			1						
10							1		2	1							
10								2	1		1						
20								1	1	1	1						
10								1	1		2						
10								1	2			1					
10									1	1	2						
20									1	1	1	1					
20									1	1	1	1					
10									2	1			1				
5									2			2					
20									1	1		1	1				
10									1		2			1			
10									1			2	1				
10										2		1		1			
20										1	1	1		1			
20										1		1	1		1		
10											2			1	1		
10											1	1			2		
10													2		2		
10												2	1			1	
20												1	1		1	1	
10												1		2		1	
10													1	1	2		
10																2	1
10																2	1
5																2	2
600	2	5	10	2	5	10	10	10	12	10	10	10	5	2	10	5	2
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'

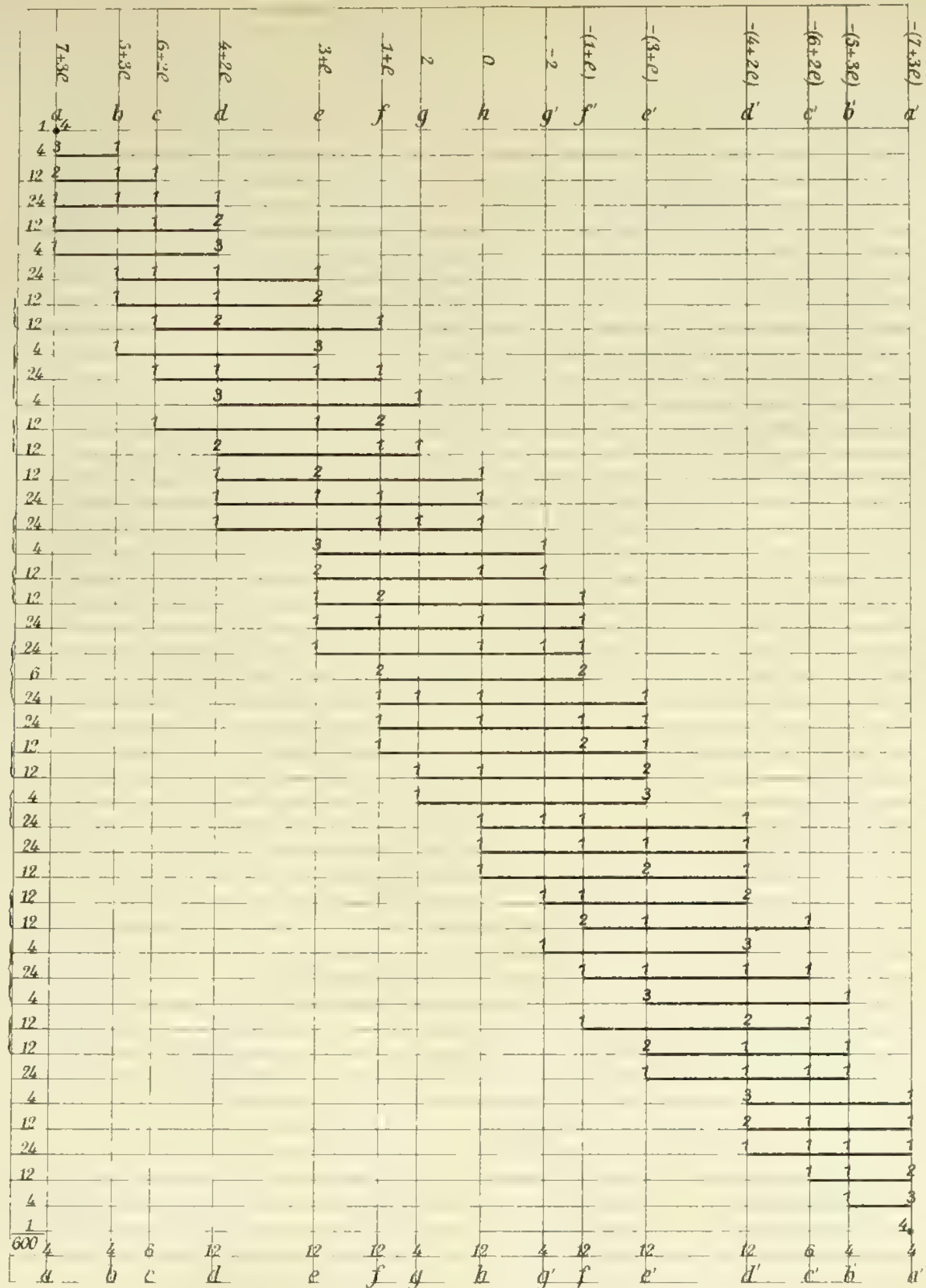
Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OK_0 .



	<div><div><div>$-(6+2e)$</div><div>$-(3+3e)$</div><div>$-(4+2e)$</div><div>$-(5+e)$</div><div>$-(2+2e)$</div><div>$-(3+e)$</div><div>-4</div><div>$-(1+e)$</div><div>-2</div><div>$1-e$</div><div>0</div><div>$-1+e$</div><div>2</div><div>$1+e$</div><div>4</div><div>$3+e$</div><div>$2+2e$</div><div>$5+e$</div><div>$4+2e$</div><div>$3+3e$</div><div>$6+2e$</div></div></div>																				
	<div><div>a</div><div>b</div><div>c</div><div>d</div><div>e</div><div>f</div><div>g</div><div>h</div><div>i</div><div>k</div><div>l</div><div>k'</div><div>i'</div><div>h'</div><div>g'</div><div>f'</div><div>e'</div><div>d'</div><div>c'</div><div>b'</div><div>a'</div></div>																				
2	3	1																			
6	2	1	1																		
3	2		2																		
12	1	1	1	1																	
6	1		2		1																
12	1		1	1	1																
6	1			1	2																
12		1	1	1		1															
6		1		1		2															
6			2		1		1														
2		1				3															
12			1	1	1			1													
12			1	1		1		1													
12			1		1			1	1												
6				1	2				1												
6			1			1		2													
6			1					1	2												
12				1	1			1	1												
6				1		2			1												
12				1				1	1												
3					2				2												
2						3				1											
12				1				1	1	1											
12				1				1	1			1									
12				1				1	1		1										
6					2				1	1											
6				1				2	2		1										
6					1		2				1										
12					1		1	1		1											
6						1		1	2				1								
12							1	1		1											
6								2			1		1								
12								1	1		1										
6									2			1	1								
12									1		1		1								
6										2			1								
12										1		1		1							
6											2			1							
12											1		1		1						
6												2			1						
12												1		1	1	1					
3													2			2					
6														1	1	2					
2																1	3				
600	3	2	6	6	6	6	3	12	6	6	8	6	6	12	3	6	6	6	6	2	3
	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l	k'	i'	h'	g'	f'	e'	d'	c'	b'	a'

Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OF_0 .





Lage der begrenzenden Tetraeder des Z^{600} in Stellung OR_0 .

Kanten.

Allg. Formel der untern. Schritte $k = \frac{5}{2}e$, $f = \frac{3}{2}e + 2$

	e	k	f	1	4	12	24	12	4	24	4	12	12	24	24	4	12	12	24	24	6	24	24	12	12	4
e	4	36	28*	60	42*	84	48*	108	72*	132	84*	144	124*	144	84*											
k	6	90	78	150	120	210	138	270	198	330	234	360	324	360	240											
f	4	56	52	92	80	128	92	164	128	200	152	218	202	218	158											
1																										
4	3																									
12	4	3	3																							
24	3	3	4	3																						
12	3	3	3	3	4																					
4	3	3	3	3	3	3																				
24			3	3	4	3	3																			
12			3	3	3	3	4																			
12					3	3	3	3	3																	
4			3	3	3	3	3	3	3																	
24					3	3	4	3	3																	
4						3	3	3	3	3	3															
12						3	3	3	3	4																
12							4	4	4	3	3															
12							3	3	3	3	3	3														
24							3	3	4	3	3	3														
24							3	3	3	3	4	3														
4								3	3	3	3	3	3													
12								4	4	4	4	4	4													
12								3	3	3	3	3	3													
24								3	3	4	4	4	4													
24								3	3	3	3	3	3													
6										4	4	4	4													
24											3	3	4													
24												3	3	3												
12													3	3	3											
12															3											
4																3										
4																										
a	b	c	d	e	f	g	h																			

Lage der Kanten des Z^{600} in Stellung OR_0 und Schnitte.

Over de meetkundige plaats der punten in het
platte vlak, waarvoor de som der
afstanden tot n gegeven rechten standvastig is,
en analoge vragen in de
ruimten van drie en meer afmetingen

DOOR

FRED. SCHUH.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

DEEL IX. N^o. 5.

(Met 8 platen.)



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.

Januari 1908.

Over de meetkundige plaats der punten in het
platte vlak, waarvoor de som der
afstanden tot n gegeven rechten standvastig is,
en analoge vragen in de
ruimten van drie en meer afmetingen

DOOR

FRED. SCHUH.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

DEEL IX. N^o. 5.

(Met 8 platen.)



AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1908.

INHOUD.

HOOFDSTUK I.

DE MEETKUNDIGE PLAATS DER PUNTEN IN R_d , WAARVOOR DE SOM
DER ABSOLUTE AFSTANDEN
TOT n GEGEVEN RUIMTEN R_{d-1} STANDVASTIG IS.

§ 1. HET VRAAGSTUK IN HET PLATTE VLAK.

	Blz.
1. Inleidende beschouwingen.....	1
2. Het verloop van S op een willekeurige lijn.....	3
3. De meetkundige plaats is één convexe veelhoek.....	4
4. Aantal zijden van den veelhoek.....	5

§ 2. HET VRAAGSTUK IN DE RUIMTE.

5. Algemeene beschouwingen.....	6
6. Bijzondere eigenschappen van het veelvlak.....	8

§ 3. HET VRAAGSTUK IN R_d .

7. De meetkundige plaats is een convex polytoop.....	9
8. Aantal grenspolytopen voor kleine en groote waarden van C	9
9. Aantal grenspolytopen voor willekeurige C	11
10. Strengere afleiding der formule voor het aantal grens- polytopen.....	12
11. Betrekkingen tusschen de aantallen grenspolytopen.....	14
12. Verandering der aantallen grenspolytopen.....	15

HOOFDSTUK II.

DE MEETKUNDIGE PLAATS DER PUNTEN IN DE RUIMTE, WAARVAN DE
SOM DER AFSTANDEN TOT n GEGEVEN RECHTEN STANDVASTIG IS.

§ 4. ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN VAN HET OPPERVLAK.

13. Samenhang der bladen van het oppervlak.....	17
14. Het blad, waar de absolute som gelijk aan C is.....	18
15. Graad en vergelijking van het oppervlak.....	18

§ 5. DE SINGULIERE KROMMEN VAN HET OPPERVLAKE.

16. Dubbelkromme in het oneindige.....	20
17. Krommen van aanraking.....	21
18. Kegelpunten van het oppervlak.....	22
19. De in het eindige gelegen dubbelkromme.....	23
20. De dubbelkromme bestaat uit $2^n - n - 2$ krommen....	24
21. Nulligging der singuliere krommen.....	26
22. Rang van het oppervlak.....	26
23. Doorsneden met vlakken door gegeven lijnen.....	27
24. Bijzonder geval $C = 0$	27

§ 6. DE SNIJPUNTEN VAN DRIE SINGULIERE KROMMEN.

25. Twee singuliere krommen snijden elkaar.....	28
26. Door de snijpunten van twee singuliere krommen gaat een derde.....	29
27. Drievoudige punten; punten P_1	29
28. Viervoudige punten; punten P_2	30
29. In het eindige gelegen uniplanaire tweebladige dubbel- punten; punten P_3	31
30. In het oneindige gelegen uniplanaire tweebladige dubbel- punten; punten P_4	32
31. Uniplanaire eenbladige dubbelpunten; punten P_5	32
32. Singulariteiten der dubbelkromme in het oneindige.....	33
33. Singulariteiten der krommen van aanraking.....	34
34. Singulariteiten der dubbelkrommen in het eindige.....	34
35. Aantal gemeenschappelijke punten van drie singuliere krommen.....	35
36. Aantal singuliere puntgroepen.....	37
37. Verschillende soorten van singuliere puntgroepen.....	38
38. Aantallen punten P_1, P_2, P_3, P_4 en P_5	39
39. Aantallen punten P gelegen op de singuliere krommen..	40
40. Wijziging der voorgaande resultaten voor $C = 0$	42

§ 7. GRAADVERLAGING VAN HET OPPERVLAKE VOOR n GEGEVEN
LIJNEN EN VAN DAT VOOR n GEGEVEN PUNTEN.

41. Voorwaarde voor graadverlaging.....	44
42. Bedrag der graadverlaging.....	46
43. Voorwaarde voor verdere graadverlaging als $C = 0$ is..	46
44. Het analoge oppervlak voor n gegeven punten.....	47
45. Aan de n punten worden coëfficiënten toegekend.....	48

	Blz.
46. Graadverlaging als de coëfficiënten de eenheid zijn.....	50
47. Verdere graadverlaging voor $C = 0$	50
48. Bijzonder geval $n = 4$	51

§ 8. GRAADVERLAGING DER VLAKE DOORSNEDEN VAN HET
OPPERVLAK VOOR n GEGEVEN LIJNEN.

49. Voorwaarde voor afsplitsing van een plat vlak.....	52
50. Voorwaarde voor graadverlaging eener vlakke doorsnede.	53
51. Bijzonder geval $n = 2$	53
52. Bedrag der graadverlaging eener vlakke doorsnede.....	54
53. Toepassing op de gevallen $n = 3$ en $n = 4$	55
54. Voorwaarde voor verdere graadverlaging der doorsnede..	56
55. Toepassingen.....	58

§ 9. HET OPPERVLAK VOOR TWEE GEGEVEN LIJNEN.

56. Algemeene beschouwingen.....	59
57. Het oppervlak is een bijzonder KUMMER'sch oppervlak...	60
58. De 16 kegelsneeraakvlakken van het oppervlak.....	61
59. De 16 kegelpunten van het oppervlak.....	62
60. De configuratie der singuliere punten en vlakken.....	63
61. Rechte lijnen van het oppervlak.....	64
62. Raakkegels der kegelpunten.....	65
63. STEINER'sch oppervlak voor $C = 2k$	65
64. Hyperbolische paraboloïde voor $C = 0$	66
65. Vorm van het oppervlak.....	67
66. Doorsneden evenwijdig aan het xz -vlak.....	68
67. Andere stelsels van kegelsneden op het oppervlak.....	69
68. Doorsneden evenwijdig aan het xy -vlak.....	70

Over de meetkundige plaats der punten in het platte vlak, waarvoor de som der afstanden tot n gegeven rechten standvastig is, en analoge vragen in de ruimten van drie en meer afmetingen.

HOOFDSTUK I.

DE MEETKUNDIGE PLAATS DER PUNTEN IN R_d , WAARVOOR DE SOM DER ABSOLUTE AFSTANDEN TOT n GEGEVEN RUIMTEN R_{d-1} STANDVASTIG IS.

§ 1. HET VRAAGSTUK IN HET PLATTE VLAKE.

1. Inleidende beschouwingen.

In een vlak zijn gegeven n rechten l_1, l_2, \dots, l_n . De meetkundige plaats der punten te bepalen, waarvoor de som S van de absolute waarden der afstanden tot die rechten een gegeven waarde C heeft¹⁾.

Bij de beantwoording dier vraag zullen we onderstellen, *dat de gegeven lijnen niet alle evenwijdig zijn*, daar anders door het aanbrengen van een loodrechte snijlijn de vraag onmiddellijk tot de zeer eenvoudige overeenkomstige vraag in één dimensie is teruggebracht. Ook kunnen we zonder aan de algemeenheid te kort te doen aannemen, *dat de gegeven lijnen alle verschillen*, daar uit het volgende duidelijk te zien is, dat de behandeling van het vraagstuk geheel dezelfde blijft als we aan de gegeven lijnen *positieve coëfficiënten* toevoegen, waarmee de afstanden tot die lijnen moeten worden vermenigvuldigd; in dat geval komt natuurlijk het samenvallen van i gegeven lijnen op vermenigvuldiging van den coëfficiënt met i neer.

¹⁾ Dit vraagstuk komt o. a. voor in BRIOT et BOUQUET, *Leçons de géométrie analytique* (Livre II, vraagstuk n°. 7). Zie ook de oplossingen dier vraagstukken door KORTEWEG (vermeerderd en herzien door WYTHOFF, 's-Hertogenbosch, W. C. VAN HEUSDEN).

Is $l_i = 0$ de normaalvergelijking van de lijn l_i , dan heeft men voor ieder *vak*, waarin het platte vlak door de gegeven lijnen en de lijn in het oneindige verdeeld wordt, de verg.

$$\Sigma \pm l_i = C$$

neer te schrijven, waarbij de teekens zoo gekozen moeten worden, dat binnen het beschouwde vak alle termen positief uitvallen. De door deze verg. voorgestelde rechte lijn, die ook de lijn in het oneindige zijn kan ¹⁾, draagt alleen dan iets tot de m. pl. bij als ze minstens één punt met dat vak (waartoe we ook steeds de begrenzing zullen rekenen) gemeen heeft. Van de gevonden rechte behoort dan tot de meetkundige plaats of een punt, hoekpunt van het beschouwde vak, of het binnen dat vak gelegen lijnsegment, dat ook een der zijden van het vak zijn kan. Onder een *segment*, hetzij van een willekeurige hetzij van een gegeven lijn, zullen we steeds verstaan een stuk van die lijn gelegen tusschen twee opvolgende snijpunten met van die lijn verschillende gegeven lijnen; bij een willekeurige lijn wordt dit een binnen één enkel vak gelegen gedeelte, bij een gegeven lijn de afscheiding tusschen twee vakken.

De bijzonderheid kan zich voordoen, dat de gevonden verg. een identiteit wordt, in welk geval ieder punt van het vak tot de m. pl. behoort ¹⁾. In dat geval is voor ieder punt van het platte vlak de algebraïsche som der afstanden $= C$ als we voor iedere gegeven lijn een tekenafspraken maken, die binnen het beschouwde vak de absolute waarde van den afstand oplevert. Overal buiten dit vak is dus $S > C$, zoodat dit vak de geheele m. pl. uitmaakt. Dit geval kan zich dus alleen voordoen als C haar *minimale waarde* M heeft, d. w. z. de kleinste waarde, waarbij er nog een punt is, dat aan de vraag voldoet; bovendien moet dan nog de som der eenheidsvectoren, die langs de loodlijnen vallen uit een punt van het beschouwde vak op de gegeven lijnen neergelaten, nul zijn ²⁾.

Is $C > M$ en verschillend van de waarden, die S in de snijpunten van gegeven lijnen aanneemt, dan bestaat de m. pl. uit een eindig aantal lijnsegmenten, die zich in de gemaakte onderstelling (dat de gegeven lijnen niet alle evenwijdig zijn) niet naar het oneindige kunnen uitstrekken. Men ziet onmiddellijk, dat zulk een lijnsegment in een snijpunt met een gegeven lijn een voortzetting (maar noodzakelijk in een andere richting) in het aangrenzende vak vinden zal. Op deze wijze zal een *gesloten veelhoek* ontstaan,

¹⁾ Dit kan natuurlijk alleen als het beschouwde vak eindig is.

²⁾ Deze laatste voorwaarde beteekent voor drie gegeven lijnen, dat ze een gelijkzijdigen driehoek, voor vier gegeven lijnen, dat ze een parallelogram vormen.

waarvan de hoekpunten op de gegeven lijnen liggen. Van dezen veelhoek kan men gemakkelijk aantoonen, dat hij geen inspringende hoeken vertoonen kan. Immers een lijn, die langs een zijde van den veelhoek valt, is de m. pl. der punten, waarvoor met bepaalde tekenafpraak de algebraische som der afstanden $= C$ is, welke algebraische som alleen op de zijde van den veelhoek de som der absolute afstanden is; op het verlengde dier zijde is deze laatste som dus $> C$, waaruit volgt, dat dit verlengde de m. pl. niet snijden kan.

2. Het verloop van S op een willekeurige lijn.

We beschouwen het verloop der functie S (de som der absolute afstanden) op een willekeurige lijn l , die we *snijlijn* noemen. Zijn $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$ de hoeken, die l met de gegeven lijnen maakt, dan is met de vraag welke punten van l tot de m. pl. behooren de quaestie teruggebracht tot de overeenkomstige vraag in één dimensie, waarbij dan echter aan de gegeven punten (snijpunten van l met de gegeven lijnen) de positieve coëfficiënten $\sin \beta_1, \sin \beta_2, \dots, \sin \beta_n$ moeten worden toebedeeld. Langs l laten we in een aangenomen positieve richting een punt P loopen, waarvan we de plaats aanwijzen door den afstand z tot een vast punt O van l (positief gerekend als OP in de aangenomen pos. richting valt), zoodat we z laten aangroeien van $-\infty$ tot $+\infty$. Nu is

$$\frac{dS}{dz} = \Sigma \pm \sin \beta_i,$$

waarbij het $-$ teeken genomen moet worden voor de gegeven lijnen, die P nog niet gepasseerd is, het $+$ teeken voor de lijnen, die gepasseerd zijn; $\frac{dS}{dz}$ begint dus met de negatieve waarde $-\Sigma \sin \beta_i$, is in

een zelfde vak standvastig om telkens bij het passeeren van een gegeven lijn op een grootere waarde te springen en met de positieve waarde $\Sigma \sin \beta_i$ te eindigen. Bij het passeeren van een der gegeven lijnen, b.v. l_j , zal dus $\frac{dS}{dz}$ van $-$ op $+$ verspringen, tenzij zich de bij-

zonderheid voordoet, dat $\frac{dS}{dz}$ bij het passeeren van l_j op 0 springt om eerst bij het passeeren van de volgende gegeven lijn l_k pos. te worden. Hieruit volgt, dat S op de lijn l met $+\infty$ beginnend voortdurend afneemt, totdat in het snijpunt van l met een gegeven lijn of in alle punten van een segment van l een minimale waarde $M' (\geq M)$ bereikt wordt, waarna S voortdurend toeneemt tot $+\infty$;

hierin is M' de kleinste waarde, die S in een snijpunt van l met gegeven lijnen aanneemt; is S voor twee opvolgende snijpunten dezelfde, dan is in alle punten van het tusschengelegen segment $S = M'$. Uit dit verloop der functie S blijkt, dat S een waarde $C > M'$ tweemaal (aan weerskanten van het minimum) aanneemt, zoodat een lijn, waarvoor $M' > C$ of $M' < C$ is, de m. pl. niet, resp. in twee punten snijdt, terwijl een lijn, waarvoor $M' = C$ is, met de m. pl. één punt of een segment gemeen heeft.

3. De meetkundige plaats is één convexe veelhoek.

Uit het voorgaande volgt, dat de *minimum-meetkundige plaats* (m. pl. voor $C = M$) van dien aard is, dat een rechte er slechts een punt van een gegeven lijn of een lijnsegment mede gemeen kan hebben, waaruit weer volgt, dat die min.-m. pl. een snijpunt van gegeven lijnen, een segment van een gegeven lijn of een vak is; het eerste is natuurlijk het algemeene geval¹⁾.

Verder blijkt, dat iedere lijn, die de min.- m. pl. snijdt met de m. pl. voor $C > M$ twee punten gemeen heeft, zoodat de m. pl. voor $C > M$ één enkele gesloten veelhoek is, die de min.-m. pl. omgeeft. Daar ook gebleken is, dat een rechte lijn niet meer dan twee geïsoleerd liggende punten met de m. pl. gemeen kan hebben, vindt men opnieuw, dat de veelheid convex is. Daar op een snijlijn de grootheid S niet in twee opvolgende segmenten standvastig kan zijn, wordt de veelhoek gevormd door lijnsegmenten (waaronder ook segmenten van gegeven lijnen kunnen voorkomen), waarvan geen twee opvolgende in elkaars verlengde kunnen liggen, zoodat ieder snijpunt van een zijde van den veelhoek met een daarvan verschillende gegeven lijn een hoekpunt van den veelhoek is.

Daar binnen den veelhoek $S < C$ en daarbuiten $S > C$ is, zoo blijkt, dat de veelhoek zich bij grooter wordende C uitbreidt en de

¹⁾ Het eerste geval doet zich voor als S voor een der snijpunten van gegeven lijnen een kleinere waarde heeft dan voor alle overige; het tweede geval als S voor twee snijpunten (die noodzakelijk uiteinden van een zelfde segment van een gegeven lijn moeten zijn) dezelfde waarde heeft, die kleiner is dan voor alle overige; het derde geval als S voor drie snijpunten (die hoekpunten van een zelfde vak moeten zijn) dezelfde waarde heeft en voor geen der overige snijpunten een kleinere waarde.

Heeft men dit derde geval, dan krijgt men steeds het tweede geval door een lijn toe te voegen, die gedeeltelijk in het minimum-vak verloopt; de min.-m. pl. wordt dan het in dit vak gelegen segment der toegevoegde lijn. Omgekeerd zal natuurlijk het tweede geval door weglating van de lijn, waartoe het minimale segment behoort, in het algemeen niet het nog meer bijzondere derde geval opleveren. Het tweede geval heeft men b.v. bij drie gegeven lijnen, die een gelijkbeenigen driehoek met tophoek $< 60^\circ$ vormen; laat men de gegeven lijn, waarlangs de basis valt, weg dan krijgt men het eerste geval.

rorige veelhoeken omgeeft. Hierbij verschuift iedere zijde evenwijdig aan zich zelf, om, als het vak waarin ze ligt eindig is, in het algemeen in een hoekpunt van dat vak te verdwijnen; in het bijzonder kan het ook gebeuren, dat die zijde met een begrenzing van het vak komt samen te vallen, in welk geval die zijde bij grooter wordende C de begrenzing passeert en daarbij haar richting behoudt.

4. Aantal zijden van den veelhoek.

Heeft C niet een zoodanige waarde, dat de veelhoek door een snijpunt van gegeven lijnen gaat, dan zal een gegeven lijn den veelhoek of niet of in twee punten (hoekpunten van den veelhoek) snijden. *Zijn er j gegeven lijnen, die gedeeltelijk binnen den veelhoek verlopen*¹⁾, *dan is die veelhoek een $2j$ -hoek, dus een veelhoek met een even aantal zijden.* Daar de veelhoek bij uitbreiding steeds nieuwe gegeven lijnen gaat snijden, zoo volgt, *dat het aantal hoekpunten van den veelhoek bij grooter wordende C niet af-, maar wel toenemen kan; alleen op het oogenblik dat de veelhoek door een snijpunt van gegeven lijnen gaat neemt dit aantal af en kan oneven worden* (doordat er dan verschillende gegeven lijnen zijn, die hetzelfde hoekpunt van den veelhoek opleveren).

*Is i het aantal gegeven lijnen, die met de min.-m. pl. minstens één punt gemeen hebben, dan is de veelhoek onmiddellijk na zijn ontstaan een $2i$ -hoek*²⁾, *om als C grooter geworden is dan het grootste bij een der gegeven lijnen behorende minimum (maximum minimorum) als $2n$ -hoek te eindigen.*

Wordt C grooter, dan blijft de veelhoek dezelfde hoeken behouden zoolang hij niet een snijpunt van gegeven lijnen passeert. Passeert echter de veelhoek een snijpunt Q van j gegeven lijnen, waaronder er k zijn, die niet gedeeltelijk binnen den veelhoek liggen, dan trekken zich $j - k - 1$ zijden van den veelhoek tot dat snijpunt samen, waaruit dan weer $j + k - 1$ anders gerichte

¹⁾ Dus waarvan het minimum kleiner dan C is.

²⁾ Is de min.-m. pl. een snijpunt van i gegeven lijnen, dan ontstaat, als $C > M$ wordt, een $2i$ -hoek, die zich (totdat een ander snijpunt van gegeven lijnen bereikt is) gelijkvormig vergroot met dat snijpunt als gelijkvormigheidspunt. Is de min.-m. pl. een segment van een gegeven lijn door welks eindpunten h en k andere gegeven lijnen gaan, dan ontstaat voor C iets grooter dan M een $2(h + k + 1)$ -hoek met twee niet kleine zijden evenwijdig aan het genoemde segment, aan den eenen kant verbonden door $2h$, aan den anderen kant door $2k$ kleine zijden. Is de min.-m. pl. een h -hoekig vak en gaan er door de hoekpunten van dat vak k_1, k_2, \dots, k_h gegeven lijnen, die dat vak niet begrenzen, dan heeft de veelhoek onmiddellijk na zijn ontstaan h niet kleine zijden evenwijdig aan de begrenzingen van het vak, onderling verbonden door groepen van $2k_1 + 1, 2k_2 + 1, \dots, 2k_h + 1$ kleine zijden.

zijden ontstaan. Het aantal zijden is gelijk gebleven als $k = 0$ is, dus als de beide door Q gaande zijden van den veelhoek in twee overstaande der $2j$ om Q liggende vakken verlopen¹⁾.

Is C zoo groot geworden, dat alle in het eindige liggende snijpunten van gegeven lijnen binnen den veelhoek vallen, dan liggen de zijden van dien veelhoek uitsluitend in zich naar het oneindige uitstrekkende vakken, waarvan het aantal steeds $2n$ bedraagt²⁾. Zijn er onder de gegeven lijnen geen evenwijdige, dan hangen die $2n$ vakken twee aan twee in het oneindige samen. Een punt van zulk een vak en een punt van het in het oneindige daarmede samenhangende vak liggen aan verschillenden kant van alle gegeven lijnen, zoodat men in de verg. $\Sigma \pm l_i = C$ voor het eene vak de teekens alle anders moet nemen dan voor het andere vak, waaruit volgt dat de zijden van den veelhoek in beide vakken evenwijdig zijn. *Hebben dus alle gegeven lijnen verschillende richtingen en is C grooter dan de grootste waarde, die S in een snijpunt van gegeven lijnen aanneemt, dan is de veelhoek een $2n$ -hoek, waarvan de overstaande zijden evenwijdig zijn en in in het oneindige samenhangende vakken verlopen³⁾.*

§ 2. HET VRAAGSTUK IN DE RUIMTE.

5. Algemeene beschouwingen.

Breidt men het in de vorige paragraaf behandelde vraagstuk tot de ruimte uit, dan behoudt men de grootste analogie *als men de n gegeven lijnen door gegeven vlakken vervangt*. De behandelingswijze daarvan is nagenoeg dezelfde als van het vraagstuk in het platte vlak.

¹⁾ In het algemeen is S op ieder der gegeven lijnen in één punt minimaal. De veelhoek ontwikkelt zich dan als vierhoek uit het minimum minimorum, dat minimum voor twee gegeven lijnen is, terwijl de overige $n-2$ minima slechts minimum voor één gegeven lijn zijn. Bij het passeeren van ieder der $n-2$ minimumpunten neemt het aantal zijden van den veelhoek met 2 toe. Er zijn dus nog $\frac{1}{2}n(n-1)-1-(n-2)=\frac{1}{2}(n-1)(n-2)$ snijpunten van gegeven lijnen bij het passeeren waarvan het aantal hoekpunten van den veelhoek gelijk blijft. Dit aantal is gelijk aan dat der eindige vakken, waarin het vlak door de gegeven lijnen verdeeld wordt; ieder der eindige vakken heeft een hoekpunt, waar de in dit vak gelegen zijde van den veelhoek bij grooter wordende C verdwijnt; passeert de veelhoek zulk een hoekpunt, dan blijft zijn aantal zijden gelijk.

²⁾ Het aantal zijden van den veelhoek is echter reeds eerder $2n$ geworden.

³⁾ Wordt C nog grooter, dan gaat de veelhoek steeds meer een bepaalden vorm aannemen, nl. den vorm, dien de veelhoek direct verkrijgt als men de gegeven lijnen evenwijdig aan zich zelf naar één punt verlegt. De veelhoek is dan een $2n$ -hoek, die de bijzonderheid vertoont, dat hij n diagonalen bezit, die door één punt gaan en elkaar middendoor deelen.

We kunnen onderstellen, dat de gegeven vlakken niet alle aan een zelfde lijn evenwijdig loopen, daar anders door het aanbrengen van een vlak loodrecht op die lijn de vraag onmiddellijk tot de overeenkomstige planimetrische teruggebracht is, zoodat men dan als m. pl. het zijdelingsch oppervlak van een naar beide kanten naar het oneindige loopend prisma vindt.

Door de n gegeven vlakken V_1, V_2, \dots, V_n en het vlak in het oneindige wordt de ruimte in *ruimtevlakken* verdeeld. Een willekeurig *snijvlak*, dat ook met een der gegeven vlakken kan samenvallen, wordt door die vlakken in *vlakvakken* en een willekeurige *snijlijn*, die ook in een of meer gegeven vlakken kan liggen, in *segmenten* verdeeld.

Door het aanbrengen van een snijvlak V wordt de vraag tot de overeenkomstige planimetrische teruggebracht, waarbij echter aan de snijlijnen van het snijvlak met de gegeven vlakken de positieve coëfficiënten $\sin \beta_1, \sin \beta_2, \dots, \sin \beta_n$ moeten worden toegekend, waarin β_i de hoek is, dien V met V_i maakt. *Van de doorsnede der meetkundige plaats met een willekeurig vlak V zal dus alles gelden wat we in de vorige paragraaf van de m. pl. behoorend bij het planimetrische vraagstuk gevonden hebben.*

Ook kan men door het aanbrengen van een snijlijn l de vraag direct tot die in één dimensie terugbrengen, waarbij de snijpunten met de gegeven vlakken weer van de coëfficiënten $\sin \beta_i$ moeten worden voorzien, waarin nu β_i den hoek voorstelt, dien l met V_i maakt. Een lijn zal dus met de m. pl. twee punten gemeen hebben als C grooter is dan het bij l behoorende minimum M' en een punt van een gegeven vlak of een segment als $C = M'$ is.

Op deze wijze blijkt:

Is C gelijk aan de kleinste waarde M , waarbij er nog een punt is, dat aan de vraag voldoet, dan is de meetkundige plaats der punten, waarvoor de som der absolute afstanden tot n gegeven vlakken $= C$ is, een snijpunt van gegeven vlakken¹⁾ (algemeene geval), een segment van een snijlijn van gegeven vlakken, een vak van een gegeven vlak of een ruimtevak²⁾. Is $C > M$, dan is de m. pl. een gesloten convex veelvlak, waarvan de zijvlakken vlakcaken zijn, zoodat de ribben in gegeven vlakken, de hoekpunten

¹⁾ Onder een snijpunt van gegeven vlakken verstaan we een punt, waardoor minstens drie niet door één lijn gaande vlakken gaan.

²⁾ Dit laatste geval doet zich voor als de som nul is van eenheidsvectoren, die langs de loodlijnen vallen uit een punt binnen dit ruimtevak op de gegeven vlakken neergelaten. Bij vier gegeven vlakken beteekent deze voorwaarde, dat de vlakken een gelijkzijdig viervlak vormen, dus een viervlak, waarvan de overstaande ribben gelijk zijn.

op snijlijnen van gegeven vlakken liggen. Gaat het veelvlak niet door een snijpunt van gegeven vlakken en zijn er i snijlijnen van gegeven vlakken, die gedeeltelijk binnen het veelvlak verlopen¹⁾, dan heeft dit veelvlak $2i$, dus een even aantal, hoekpunten. Wordt C grooter, dan breidt het veelvlak zich uit, waarbij (overgangsgevallen uitgezonderd) het aantal hoekpunten gelijk blijft of toeneemt.

6. Bijzondere eigenschappen van het veelvlak.

Het veelvlak vertoont, in tegenstelling met een willekeurig veelvlak, deze bijzonderheid, *dat het diagonaalvlakken* (dit zijn dan gegeven vlakken) *bezit, die het oppervlak uitsluitend volgens ribben snijden, en dat door iedere ribbe zulk een diagonaalvlak gaat²⁾. Gaat het oppervlak niet door een ribbe van een ruimtevak, dan wordt het veelvlak door ieder vlak, dat niet door de hoekpunten gaat, volgens een veelhoek met een even aantal zijden gesneden. De doorsnede met een gegeven vlak bezit een even aantal zijden als het veelvlak niet door een in het beschouwde gegeven vlak gelegen snijpunt van gegeven vlakken gaat.*

Zij Q een hoekpunt van het veelvlak, waardoor geen ribbe gaat, die snijlijn van gegeven vlakken is. Gaan er i gegeven vlakken door Q ³⁾, dan heeft ieder dier vlakken met het veelvlak het punt Q of een veelhoek gemeen, daar door de gemaakte onderstelling het geval is uitgesloten, dat het gegeven vlak met het veelvlak een ribbe of een zijvlak gemeen heeft. Zijn er nu onder de i door Q gaande gegeven vlakken j , die het veelvlak doorsnijden, dan heeft het veelvlak $2j$ door Q gaande ribben, zoodat in een hoekpunt van het veelvlak, waardoor geen ribbe gaat, die snijlijn van gegeven vlakken is, een even aantal ribben samenkomen⁴⁾.

Gaat het veelvlak niet door een snijpunt van gegeven vlakken, dan is het aantal ribben van het veelvlak even; immers door ieder der in even aantal aanwezige hoekpunten gaat een even aantal ribben, waarbij we echter iedere ribbe tweemaal krijgen⁵⁾. Vol-

¹⁾ Dus waarvoor het minimum kleiner dan C is.

²⁾ Door een ribbe gaan alleen dan twee of meer zulke diagonaalvlakken als die ribbe snijlijn van gegeven vlakken is.

³⁾ In het algemeen is natuurlijk $i = 2$.

⁴⁾ Is Q geen snijpunt van gegeven vlakken, maar een punt van een snijlijn van i gegeven vlakken, dan is $j = i$. De ribben van den $2i$ -vlakshoek Q kunnen dan twee aan twee door diagonaalvlakken worden verbonden, die alle door één lijn (de snijlijn der gegeven vlakken, waarop Q ligt) gaan.

⁵⁾ Dat het aantal ribben even is blijkt ook daaruit, dat in ieder gegeven vlak, dat het veelvlak snijdt, een door ribben van het veelvlak gevormde veelhoek met een even aantal zijden ligt, terwijl zoo geen der ribben tweemaal geteld wordt.

gens de stelling van EULER is dan ook het aantal zijvlakken even.

Gaan geen drie gegeven vlakken door één lijn ¹⁾ en gaat het veelvlak niet door een snijpunt van gegeven vlakken, dan komen in ieder hoekpunt van het veelvlak vier ribben samen. Liggen i snijlijnen van gegeven vlakken gedeeltelijk binnen het veelvlak, dan heeft dit $2i$ hoekpunten, $4i$ ribben en dus $2i + 2$ zijvlakken. Loopen bovendien geen twee gegeven vlakken evenwijdig, dan eindigt het veelvlak met $n(n - 1)$ hoekpunten, $2n(n - 1)$ ribben ²⁾ en $n(n - 1) + 2$ zijvlakken ³⁾.

§ 3. HET VRAAGSTUK IN R_d .

7. De meetkundige plaats is een convex polytoop.

Bij de uitbreiding van het vraagstuk tot een ruimte R_d van d dimensies worden de n gegeven vlakken door n gegeven ruimten R_{d-1} vervangen, waarvan we weer onderstellen kunnen, dat ze niet alle evenwijdig aan een zelfde lijn loopen, daar anders de vraag onmiddellijk tot die in $d - 1$ dimensies kan worden teruggebracht. Men heeft dus noodzakelijk $n \geq d$, daar anders een lijn evenwijdig aan alle gegeven ruimten R_{d-1} steeds te vinden is.

De m. pl. is nu de uit stukken van lineaire ruimten R_{d-1} bestaande begrenzing van een convex polytoop, dat de bijzonderheid vertoont diagonaalruimten R_i ($i = 2, 3, \dots, d - 1$) — dit zijn dan snijruimten R_i van gegeven ruimten ⁴⁾ — te bezitten, die het polytoop uitsluitend volgens $(i - 1)$ - dimensionale grenspolytopen snijden. Bij dergelijke uitbreidingen van vroeger gevonden eigenschappen, die zonder meer uit het voorgaande zijn af te leiden, zullen we hier echter niet langer stil staan.

8. Aantal grenspolytopen voor kleine en groote waarden van C .

In het volgende zullen we ons beperken tot het algemeene geval, dat geen $d + 1$ gegeven ruimten R_{d-1} door een zelfde punt gaan, geen der snijpunten van d gegeven ruimten in het oneindige ligt en

¹⁾ Voldoende is, dat geen der lijnen, waardoor drie of meer gegeven vlakken gaan, gedeeltelijk binnen het veelvlak verloopt.

²⁾ Dit aantal vindt men ook daaruit, dat ieder der n gegeven vlakken het veelvlak volgens een $2(n - 1)$ - hoek snijdt.

³⁾ Dit aantal vindt men ook als het dubbel van het aantal zich naar het oneindige uitstrekkende ruimtevlakken.

⁴⁾ Onder een snijruimte R_i van gegeven ruimten verstaan we een R_i , waardoor minstens $d - i$ niet door één R_{i+1} gaande gegeven ruimten R_{d-1} gaan.

de som S der absolute afstanden tot de gegeven ruimten voor geen twee uiteinden van een zelfde segment eener snijlijn van $d - 1$ gegeven ruimten dezelfde waarde aanneemt¹⁾.

De m. pl. begint zich dan voor een zekere minimale waarde M van C uit een snijpunt van d gegeven ruimten R_{d-1} te ontwikkelen als een *polytoop met $2^{i+1}(d)_{i+1}$ grenspolytopen (simplexen) van i afmetingen*; dit polytoop verschilt alleen daarin van het regelmatige *kruispolytoop* (de reciproke figuur van het maatpolytoop), dat de d assen van het kruis geen rechte hoeken behoeven te vormen. Het polytoop blijft denzelfden vorm behouden totdat een tweede snijpunt van d gegeven ruimten R_{d-1} bereikt wordt.

Is C zoo groot, dat alle snijpunten van d gegeven ruimten R_{d-1} binnen het polytoop liggen en dus de begrenzendende ruimten R_{d-1} daarvan uitsluitend in oneindige d -dimensionale vakken verlopen, dan is het aantal i -dimensionale grenspolytopen ($i = 0, 1, 2, \dots, d-1$) der m. pl. gemakkelijk aan te geven. Zulk een grenspolytoop G_i ligt nl. geheel in een snijruimte R_{i+1} van $d-i-1$ -gegeven ruimten R_{d-1} . Nu is het aantal dier snijruimten R_{i+1} gelijk aan $(n)_{d-i-1}$. Ieder dier snijruimten R_{i+1} wordt door de $n-d+i+1$ gegeven ruimten R_{d-1} , die er niet door gaan, gesneden volgens $n-d+i+1$ ruimten R_i , waardoor de R_{i+1} in $(n-d+i)_{i+1}$ eindige vakken en $2 \{ (n-d+i)_i + (n-d+i)_{i-1} + \dots + (n-d+i)_1 + 1 \}$ twee aan twee in het oneindige samenhangende vakken verdeeld wordt²⁾; in ieder dier oneindige vakken ligt een i -dimensionaal grenspolytoop G_i der m. pl., zoodat het aantal dier grenspolytopen G_i

¹⁾ Voor verschillende eigenschappen is echter een minder ver gaande beperking voldoende.

²⁾ Een ruimte R_d wordt door n willekeurig in die ruimte gelegen ruimten R_{d-1} in $(n-1)_d$ eindige vakken verdeeld, zooals zich gemakkelijk door volledige inductie laat aantonen. De formule is nl. juist voor $n=d+1$ en bij willekeurige n ook voor $d=1$. Neemt men nu de juistheid der formule aan als men n door $n-1$ of d door $d-1$ vervangt, dan weet men, dat R_d door $n-1$ ruimten R_{d-1} in $(n-2)_d$ eindige vakken verdeeld wordt. Brengt men nu de n^{de} ruimte R_{d-1} aan, dan wordt deze R_{d-1} door de $n-1$ overige ruimten R_{d-1} volgens $n-1$ ruimten R_{d-2} gesneden en daardoor in $(n-2)_{d-1}$ eindige $(d-1)$ -dimensionale vakken verdeeld. Door die laatste R_{d-1} wordt dus van $(n-2)_{d-1}$ eindige of oneindige vakken een eindig stuk afgesneden, zoodat het aantal eindige vakken $(n-2)_d + (n-2)_{d-1} = (n-1)_d$ wordt.

Het totale aantal vakken (twee in het oneindige samenhangende vakken voor één vak gerekend) bedraagt $(n-1)_d + (n-1)_{d-1} + (n-1)_{d-2} + \dots + (n-1)_1 + 1$. Immers neemt men de juistheid dier formule (die geldt voor $d=1$) voor $d-1$ dimensies aan, dan wordt de oneindig verre ruimte R_{d-1} der R_d in $(n-1)_{d-1} + (n-1)_{d-2} + \dots + (n-1)_1 + 1$ vakken en dus de R_d in even zoovele het oneindige snijdende vakken verdeeld. Gevoegd bij de $(n-1)_d$ eindige vakken geeft dit voor het totale aantal vakken $(n-1)_d + (n-1)_{d-1} + \dots + 1$.

$2(n)_{d-i-1} \{ (n-d+i)_i + (n-d+i)_{i-1} + \dots + (n-d+i)_1 + 1 \}$
bedraagt. Door toepassing der formule $(k-1)_l + (k-1)_{l-1} = (k)_l$
vindt men voor het aantal grenspolytopen G_i :

$$\begin{aligned} & 2(n)_{d-i-1} \{ (n-d+i+1)_i + (n-d+i+1)_{i-2} + \\ & \quad + (n-d+i+1)_{i-4} + \dots \} = \\ & = 2 \{ (d-1)_i (n)_{d-1} + (d-3)_{i-2} (n)_{d-3} + \\ & \quad + (d-5)_{i-4} (n)_{d-5} + \dots \}, \end{aligned}$$

waarbij de laatste term tusschen accoladen $(d-i)_1 (n)_{d-i}$ is voor i oneven en $(n)_{d-i-1}$ voor i even.

9. Aantal grenspolytopen voor willekeurige C .

In de boven gevonden uitdrukking voor het aantal der grenspolytopen G_i , die alleen voor voldoende groote waarde van C geldt, is $(n)_{d-1}$ het aantal snijlijnen van $d-1$ gegeven ruimten R_{d-1} , $(n)_{d-3}$ het aantal snijruimten R_3 van $d-3$ gegeven ruimten, enz. Heeft daarentegen C een zoo kleine waarde, dat slechts één snijpunt van gegeven ruimten R_{d-1} binnen het polytoop (vervormd kruispolytoop) ligt, dan is het aantal grenspolytopen G_i

$$\begin{aligned} 2^{i+1} (d)_{i+1} &= 2 (d)_{i+1} \{ (i+1)_1 + (i+1)_3 + (i+1)_5 + \dots \} = \\ &= 2 \{ (d-1)_i (d)_{d-1} + (d-3)_{i-2} (d)_{d-3} + \\ & \quad + (d-5)_{i-4} (d)_{d-5} + \dots \}. \end{aligned}$$

Hierin is $(d)_{d-1}$ het aantal gedeeltelijk binnen het kleine polytoop verlopende snijlijnen van gegeven ruimten R_{d-1} , $(d)_{d-3}$ het aantal snijruimten R_3 ¹⁾, die dat polytoop snijden, enz. Door de uitdrukking voor het aantal grenspolytopen G_i voor groote waarde van C te vergelijken met die voor kleine waarde van C , vindt men, dat bij toenemende waarde van C het aantal grenspolytopen G_i met $(d-1)_i$ vermeerderd voor iedere snijlijn van gegeven ruimten, die gedeeltelijk binnen het polytoop komt, met $(d-3)_{i-2}$ voor iedere snijruimte R_3 , die door het polytoop bereikt wordt, enz. *Is dus q_j het aantal gedeeltelijk binnen het polytoop verlopende snijruimten R_j ¹⁾, dan is*, als het polytoop niet door een snijpunt van gegeven ruimten R_{d-1} gaat, *het aantal N_i der grenspolytopen G_i :*

$$N_i = 2 \{ (d-1)_i q_1 + (d-3)_{i-2} q_3 + (d-5)_{i-4} q_5 + \dots \}^2).$$

¹⁾ Onder een snijruimte R verstaan we de doorsnede van $d-j$ gegeven ruimten R_{d-1} .

²⁾ Voor het aantal hoekpunten geeft dit $N_0 = 2q_1$, iets dat onmiddellijk is in te zien. Voor het aantal ribben vindt men $N_1 = 2(d-1)q_1 = (d-1)N_0$, zooals ook direct daaruit volgt, dat door ieder hoekpunt $2(d-1)$ ribben gaan.

Voor $i = d - 1$ en d oneven is de laatste term tusschen accoladen q_d , welke grootheid, blijkens de afleiding der formule, als $= 1$ moet worden opgevat, hetgeen trouwens geheel met de betekenis van q_j in overeenstemming is.

Het blijkt dus, dat men voor de berekening der aantallen grenspolytopen slechts de q 's met oneven index behoeft te kennen.

Men verifieert gemakkelijk, dat met de gevonden waarden voor N_i aan de meerdimensionale uitbreiding van het theorema van EULER, nl.:

$$1 - N_0 + N_1 - N_2 + \dots + (-1)^d N_{d-1} + (-1)^{d+1} = 0,$$

voldaan is. Dit levert dus een controle.

10. Strengere afleiding der formule voor het aantal grenspolytopen.

In de formule voor N_i is $(d - j)_{i+1-j}$ het aantal snijruimten R_{i+1} ¹⁾, dat door een bepaalde snijruimte R_j kan worden aangebracht. In de uitdrukking voor N_i kan dus de term $(d - j)_{i+1-j} q_j$ als een aantal snijruimten R_{i+1} worden opgevat (nl. de snijruimten R_{i+1} door de gedeeltelijk binnen het polytoop verloopende snijruimten R_j), waarbij ieder dier snijruimten zooveel maal geteld wordt als het aantal gedeeltelijk binnen het polytoop verloopende snijruimten R_j bedraagt, die in deze snijruimte R_{i+1} gelegen zijn. Stellen we dit aantal voor een bepaalde snijruimte R_{i+1} door k_j voor, dan komt deze R_{i+1} in de geheele uitdrukking voor N_i

$$2(k_1 + k_3 + k_5 + \dots).$$

maal voor, zoodat voor het aantal der grenspolytopen G_i ook kan geschreven worden

$$N_i = 2 \sum (k_1 + k_3 + k_5 + \dots);$$

hierin moet de sommeering over alle snijruimten R_{i+1} (of zoo men wil alleen over die snijruimten R_{i+1} , die gedeeltelijk binnen het polytoop verlopen) worden uitgestrekt.

Is $i = d - 2$, dan zijn de snijruimten R_{i+1} , waarover de sommeering moet worden uitgestrekt, de gegeven ruimten R_{d-1} . Is $i = d - 1$, dan levert de oorspronkelijke uitdrukking voor N_i

$$N_{d-1} = 2(q_1 + q_3 + q_5 + \dots),$$

hetgeen met de laatst gevonden formule voor N_i in overeenstemming is als we onder een snijruimte R_d de operatieruimte verstaan.

¹⁾ Zie noot 1 van bldz. 11.

In den laatsten vorm kan men de formule voor N_i (waarvan we in het vorige nummer een minder strenge afleiding gegeven hebben door de uitdrukkingen bij kleine en groote waarde van C met elkaar te vergelijken) gemakkelijk door volledige inductie aantoonen. Ieder grenspolytoop G_i ligt nl. (als volgens de onderstelling de m. pl. niet door een snijpunt van gegeven ruimten gaat) in één en slechts één snijruimte R_{i+1} . Is nu $i < d-1$, dan kunnen we voor zulk een snijruimte R_{i+1} (met minder dan d afmetingen) de formule, die klaarblijkelijk juist is voor $d=2$, als bewezen beschouwen. Voor het aantal grenspolytopen G_i , die in deze R_{i+1} liggen, vindt men dan

$$2(k_1 + k_3 + k_5 + \dots),$$

dus voor het totale aantal grenspolytopen G_i

$$2 \sum (k_1 + k_3 + k_5 + \dots).$$

Is op deze wijze de juistheid der formule voor alle waarden van i , die kleiner dan $d-1$ zijn, aangetoond, dan volgt de juistheid der formule voor $i = d-1$ uit het meerdimensionale theorema van EULER, daar reeds gebleken is dat de gevonden uitdrukkingen voor N_i met dit theorema in overeenstemming zijn.

Hiermede is het volledige bewijs der volgende eigenschap geleverd:

In R_d is de meetk. pl. der punten, waarvan de som der absolute afstanden tot n willekeurig ¹⁾ gegeven ruimten R_{d-1} een willekeurig ¹⁾ gegeven waarde C heeft, voor voldoende groote waarde van C de begrenzing van een convex polytoop, waarvan het aantal i -dimensionale grenspolytopen G_i voor i even gelijk is aan

$$N_i = 2 \{ (d-1)_i q_1 + (d-3)_{i-2} q_3 + \\ + (d-5)_{i-4} q_5 + \dots + (d-i+1)_2 q_{i-1} + q_{i+1} \}$$

en voor i oneven aan

$$N_i = 2 \{ (d-1)_i q_1 + (d-3)_{i-2} q_3 + \\ + (d-5)_{i-4} q_5 + \dots + (d-i+2)_3 q_{i-2} + (d-i)_1 q_i \}^2.$$

Hierin is q_j het aantal gedeeltelijk binnen het polytoop verlopende snijruimten R_j van $d-j$ gegeven ruimten R_{d-1} , terwijl $q_d = 1$ is ³⁾.

¹⁾ Uit het voorgaande is voldoende duidelijk wat hier onder „willekeurig” te verstaan is.

²⁾ Beide formules kan men samenvatten tot

$$N_i = 2 \{ (d-1)_i q_1 + (d-3)_{i-2} q_3 + \dots + (d-i'+2)_{i-i'+3} q_{i'-2} + (d-i')_{i-i'+1} q_{i'} \},$$

waarin i' het kleinste oneven getal is, dat niet kleiner is dan i .

³⁾ q_j is dus het aantal snijruimten R_j , waarvoor de minimumwaarde van S kleiner dan C is. Ook hieruit blijkt, dat q_d als 1 moet worden opgevat, daar er slechts één snijruimte R_d is, nl. de operatieluimte, en daarvan het minimum volgens de onderstelling kleiner dan C is.

11. Betrekkingen tusschen de aantallen grenspolytopen.

Uit de gevonden formule voor N_i blijkt, dat de aantallen N_1 , N_3 , N_5 , enz. uit de aantallen N_0 , N_2 , N_4 , enz. kunnen worden berekend, terwijl bovendien als d oneven is N_{d-1} uit N_0 , N_2 , N_4 , \dots , N_{d-3} kan worden gevonden. Uit de formules voor N_0 , N_2 , N_4 , \dots , N_{2i} , N_{2i+1} de grootheden q_1 , q_3 , q_5 , \dots , q_{2i+1} elimineerend, vindt men door de j^{de} rij ($j = 1, 2, 3, \dots, i+1$) van den determinant met $(d+1-2j)_{2i+3-2j}$ te vermenigvuldigen en de $j+1^{\text{ste}}$ kolom door hetzelfde getal te deelen:

$$N_1 = (d-1)_1 N_0, \quad N_3 = - \begin{vmatrix} (d-1)_3 N_0 & 1 \\ (d-3)_1 N_2 & 2 \end{vmatrix},$$

$$N_5 = \begin{vmatrix} (d-1)_5 N_0 & 1 & 0 \\ (d-3)_3 N_2 & (5)_2 & 1 \\ (d-5)_1 N_4 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \quad N_7 = - \begin{vmatrix} (d-1)_7 N_0 & 1 & 1 & 0 \\ (d-3)_5 N_2 & (7)_2 & 1 & 0 \\ (d-5)_3 N_4 & (7)_4 & (5)_2 & 1 \\ (d-7)_1 N_6 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix},$$

$$N_9 = \begin{vmatrix} (d-1)_9 N_0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (d-3)_7 N_2 & (9)_2 & 1 & 0 & 0 \\ (d-5)_5 N_4 & (9)_4 & (7)_2 & 1 & 0 \\ (d-7)_3 N_6 & (9)_6 & (7)_4 & (5)_2 & 1 \\ (d-9)_1 N_8 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix}, \text{ enz.}$$

Hieruit volgt:

$$N_1 = (d-1)_1 N_0,$$

$$N_3 = (d-3)_1 N_2 - A_1 (d-1)_3 N_0,$$

$$N_5 = (d-5)_1 N_4 - A_1 (d-3)_3 N_2 + A_2 (d-1)_5 N_0,$$

$$N_7 = (d-7)_1 N_6 - A_1 (d-5)_3 N_4 + A_2 (d-3)_5 N_2 - A_3 (d-1)_7 N_0, \text{ enz.},$$

waarin:

$$A_1 = 2, \quad A_2 = \begin{vmatrix} (5)_2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 16, \quad A_3 = \begin{vmatrix} (7)_2 & 1 & 0 \\ (7)_4 & (5)_2 & 1 \\ 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 272,$$

$$A_4 = \begin{vmatrix} (9)_2 & 1 & 0 & 0 \\ (9)_4 & (7)_2 & 1 & 0 \\ (9)_6 & (7)_4 & (5)_2 & 1 \\ 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 7936, \quad A_5 = \begin{vmatrix} (11)_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (11)_4 & (9)_2 & 1 & 0 & 0 \\ (11)_6 & (9)_4 & (7)_2 & 1 & 0 \\ (11)_8 & (9)_6 & (7)_4 & (5)_2 & 1 \\ 10 & 8 & 6 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 353792, \text{ enz. } ^1).$$

¹⁾ Deze coëfficiënten kunnen gemakkelijk berekend worden door op te merken, dat men heeft:

$$A_3 = (7)_2 A_1 - (7)_4 A_1 + 6, \quad A_4 = (9)_2 A_3 - (9)_4 A_1 + (9)_6 A_1 - 8,$$

$$A_5 = (11)_2 A_4 - (11)_4 A_3 + (11)_6 A_2 - (11)_8 A_1 + 10, \text{ enz.}$$

Is d oneven, dan kan N_{d-1} in N_0, N_2, \dots, N_{d-3} worden uitgedrukt door uit de formules voor $N_0, N_2, \dots, N_{d-3}, N_{d-1}$ de grootheid $2q_d$ op te lossen en den daarbij verkregen determinant gelijk aan 2 te stellen. Men vindt dan als b.v. $d=9$ is:

$$N_8 = - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & N_0 \\ (8)_2 & 1 & 0 & 0 & N_2 \\ (8)_4 & (6)_2 & 1 & 0 & N_4 \\ (8)_6 & (6)_4 & (4)_2 & 1 & N_6 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix} + 2 = \\ = 2 + N_6 - D_1 N_4 + D_2 N_2 - D_3 N_0$$

en algemeener:

$$N_{d-1} = 2 + N_{d-3} - D_1 N_{d-5} + D_2 N_{d-7} - \\ - D_3 N_{d-9} + \dots + (-1)^{\frac{1}{2}(d-3)} D_{\frac{1}{2}(d-3)} N_0,$$

waarin

$$D_1 = \begin{vmatrix} (4)_2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 5, \quad D_2 = \begin{vmatrix} (6)_2 & 1 & 0 \\ (6)_4 & (4)_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 61, \\ D_3 = \begin{vmatrix} (8)_2 & 1 & 0 & 0 \\ (8)_4 & (6)_2 & 1 & 0 \\ (8)_6 & (6)_4 & (4)_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 1385, \quad D_4 = \begin{vmatrix} (10)_2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ (10)_4 & (8)_2 & 1 & 0 & 0 \\ (10)_6 & (8)_4 & (6)_2 & 1 & 0 \\ (10)_8 & (8)_6 & (6)_4 & (4)_2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 50521, \text{ enz.}$$

12. Verandering der aantallen grenspolytopen.

Het aantal hoekpunten, ribben, enz. kan slechts een verandering ondergaan als het polytoop een der $(n)_d$ snijpunten van gegeven ruimten R_{d-1} passeert. De veranderingen, die deze aantallen ondergaan, zijn echter voor de verschillende snijpunten verschillend en afhankelijk van het aantal k ($k=0, 1, 2, \dots, d$) der door het punt gaande snijlijnen (van $d-1$ gegeven ruimten R_{d-1}), waarvoor S in dat punt minimaal is. Dan is in dat punt, dat we Q_k noemen, de som der afstanden minimaal voor $(k)_j$ der $(d)_j$ door Q_k gaande snijruimten R_j (dit zijn de ruimten R_j gebracht door j der k genoemde lijnen), zoodat met het punt Q_k ook $(k)_j$ oorspronkelijk geheel buiten het polytoop verlopende snijruimten R_j bereikt worden, en dus q_j met $(k)_j$ toeneemt. Na het passeeren van Q_k is dus het aantal grenspolytopen G_i met

$$2 \{ (d-1)_i (k)_1 + (d-3)_{i-2} (k)_3 + (d-5)_{i-4} (k)_5 + \dots \}$$

toegenomen.

Het aantal M_k der punten Q_k vindt men door op te merken, dat de punten Q_k de minimumpunten der $(n)_{d-k}$ snijruimten R_k zijn, waarbij dan echter ook de punten Q_{k+1} , Q_{k+2} , enz. worden medegeteld. Een punt Q_{k+1} is nl. minimumpunt van een snijruimte R_{k+1} en dus ook van $k+1$ in die R_{k+1} gelegen snijruimten R_k ; een punt Q_{k+2} is minimumpunt van een snijruimte R_{k+2} en dus van $(k+2)_1$ daarin gelegen snijruimten R_{k+1} en van $(k+2)_2$ daarin gelegen snijruimten R_k , enz. Daaruit leidt men gemakkelijk af:

$$M_k = (n)_{d-k} - (k+1)_1 (n)_{d-k-1} + (k+2)_2 (n)_{d-k-2} - \dots + \\ + (-1)^{d-k-1} (d-1)_{d-k-1} (n)_1 + (-1)^{d-k} (d)_{d-k} = (n-k-1)_{d-k} {}^1).$$

Het aantal snijpunten Q_k van d gegeven ruimten R_{d-1} , die voor k en niet meer dan k snijlijnen van $d-1$ gegeven ruimten minimumpunt zijn, bedraagt

$$M_k = (n-k-1)_{d-k}.$$

Men verifieert gemakkelijk, dat naar behooren voldaan is aan

$$M_d + M_{d-1} + M_{d-2} + \dots + M_0 = (n)_d.$$

Voor het aantal punten Q_0 vindt men $(n-1)_d$, welk aantal ook verkregen wordt uit dat der eindige vakken, waarin R_d door de gegeven ruimten R_{d-1} verdeeld wordt. De binnen zulk een vak gelegen begrenzende R_{d-1} van een polytoop verschuift nl. bij grooter wordende C evenwijdig aan zich zelf om in een hoekpunt van dat vak te verdwijnen; dat hoekpunt is dan een Q_0 , d. w. z. na het passeeren er van blijft het aantal hoekpunten, ribben, enz. van het polytoop hetzelfde. Er zijn dus even veel punten Q_0 als eindige d -dimensionale vakken.

¹⁾ Men heeft nl.:

$$(n)_m - (p)_1 (n)_{m-1} + (p+1)_2 (n)_{m-2} - (p+2)_3 (n)_{m-3} + \dots + \\ + (-1)^m (p+m-1)_m = (n-p)_m,$$

zooals men onmiddellijk ziet door de coëfficiënten van x^m in de ontwikkeling van $(1+x)^{n-p}$ en in het product der ontwikkelingen van $(1+x)^n$ en $(1+x)^{-p}$ aan elkaar gelijk te stellen.

HOOFDSTUK II.

DE MEETKUNDIGE PLAATS DER PUNTEN IN DE RUIMTE, WAARVAN DE SOM DER AFSTANDEN TOT n GEGEVEN RECHTEN STANDVASTIG IS.

§ 4. ALGEMEENE EIGENSCHAPPEN VAN HET OPPERVLAK.

13. Samenhang der bladen van het oppervlak.

Zijn in de ruimte n rechten in willekeurigen stand gegeven, dan is de m. pl. der punten, waarvan de som der afstanden tot die rechten een gegeven waarde C heeft, een gebogen oppervlak. De vergelijking van dit oppervlak luidt:

$$\sqrt{u_1 u'_1} + \sqrt{u_2 u'_2} + \dots + \sqrt{u_n u'_n} = C,$$

waarin u_i en u'_i ($i = 1, 2, \dots, n$) lineaire functies der coördinaten x, y, z zijn, terwijl $u_i = 0$ en $u'_i = 0$ de door de gegeven lijn l_i gaande isotrope vlakken (vlakken rakend aan den holcirkel) voorstellen.

Bij het verdrijven der wortels geraakt men tot dezelfde rationale vergelijking, welke teekens men ook aan de wortels toekent. *Hieruit blijkt, dat de m. pl. der punten, waarvan de som der absolute afstanden $= C$ is, een der bladen van een algebraisch oppervlak is.* In het volgende zullen we het geheele oppervlak aan een onderzoek onderwerpen en dus onder de som der afstanden de *algebraische som* verstaan, waarbij allerlei teekencombinaties kunnen voorkomen.

Het bestaanbare gedeelte van het oppervlak zal dus uit verschillende bladen bestaan, waarbij dan voor alle punten van een zelfde blad dezelfde teekens gelden. *Twee zulke bladen kunnen, als de gegeven lijnen elkaar niet snijden, in het eindige alleen samenhangen als ze slechts in één teeken verschillen; dit samenhangen moet dan plaats vinden op de gegeven lijn, waarop dat teekenverschil betrekking heeft.* Twee bladen, die in alle teekens verschillen, kunnen in het oneindige samenhangen. Twee bladen

echter, die in meer dan een, maar niet in alle teekens verschillen, kunnen niet samenhangen ¹⁾, maar elkaar wel doorsnijden.

14. Het blad, waar de absolute som gelijk aan C is.

Het oppervlak heeft alleen dan een bestaanbaar blad, voor welks punten de som der absolute afstanden $= C$ is, als C een zekere minimale waarde overschrijdt. Van dit blad kan gemakkelijk worden aangetoond, dat het *gesloten en convex* is.

Daartoe beschouwen we weer het verloop der functie S (de som der absolute afstanden a_1, a_2, \dots, a_n tot de gegeven lijnen) op een willekeurige rechte l . Een punt P laten we de lijn l doorloopen en wijzen de plaats van P door $OP = p$ aan, waarin O een vast punt van l is. Is nu k_i de kortste afstand en β_i de hoek der lijnen l en l_i , dan heeft men:

$$\frac{dS}{dp} = \sum \sin \beta_i \cdot \frac{\sqrt{a_i^2 - k_i^2}}{a_i},$$

waarbij men den negatieven wortel nemen moet voor de lijnen, waartoe P nadert, den positieven wortel voor lijnen, waarvan P zich verwijderd. Hieruit blijkt, dat $\frac{dS}{dp}$ voortdurend toeneemt van $-\sum \sin \beta_i$ tot $+\sum \sin \beta_i$ en dus S in één punt van l minimaal is. Is die minimale waarde kleiner dan C , dan heeft l met het blad, waarvoor $S = C$ is, twee en niet meer dan twee punten gemeen. We vinden dus:

De meetkundige plaats der punten in de ruimte, waarvan de som der absolute afstanden tot n gegeven rechten een gegeven waarde C heeft, is voor voldoende groote waarde van C een eindig gesloten convex blad van een algebraïsch oppervlak. Binnen dit blad is de som der absolute afstanden kleiner, daar buiten grooter dan C .

15. Graad en vergelijking van het oppervlak.

De graad van het oppervlak laat zich door toepassing van het beginsel van het behoud van het aantal gemakkelijk bepalen, nl. door de gegeven rechten alle in hetzelfde vlak te kiezen. De

¹⁾ Tenminste in het algemeen niet. In het eindige kunnen ze samenhangen als de gegeven lijnen, waarop de verschillende teekens betrekking hebben, door één punt gaan en dit punt op het oppervlak ligt. In het oneindige is samenhang alleen mogelijk als de gegeven lijn of lijnen, waarop de overeenstemmende teekens betrekking hebben, alle door een zelfde punt in het oneindige van het oppervlak gaan.

doorsnede van het oppervlak met dat vlak wordt dan gevormd door 2^n rechten, die worden voorgesteld door de vergelijkingen

$$\pm l_1 \pm l_2 \pm \dots \pm l_n = C$$

als $l_1 = 0$, $l_2 = 0$, enz. de normaalvergelijkingen der gegeven rechten zijn. Hieruit volgt, dat het oppervlak van den graad 2^n is ¹⁾ ook als de gegeven lijnen niet alle in hetzelfde vlak gelegen zijn ²⁾.

Ook uit de verg. van het oppervlak laat zich de graad gemakkelijk bepalen. De vergelijking verkrijgt men in rationalen vorm door de 2^n irrationale vergelijkingen

$$\pm \sqrt{u_1 u_1'} \pm \sqrt{u_2 u_2'} \pm \dots \pm \sqrt{u_n u_n'} - C = 0$$

met elkaar te vermenigvuldigen; ieder der irrationale factoren is van den graad 1, het rationale product dus van den graad 2^{n-3} .

Stellen we het product $u_i u_i'$ door v_i voor, dan wordt de rationale vergelijking:

$$C^{2^n} + C^{2^n-2} f_1(v_i) + C^{2^n-4} f_2(v_i) + \dots + C^2 f_{2^{n-1}-1}(v_i) - [f_{2^{n-2}}(v_i)]^2 = 0^4);$$

hierin is $f_j(v_i)$ een van C onafhankelijke homogene functie van den j^{den} graad in v_1, v_2, \dots, v_n , dus een functie van den $2j^{\text{den}}$ graad in de coördinaten. Dat in de vergelijking alleen even machten van C voorkomen en dat de termen, die C niet bevatten, een zuiver vierkant vormen, blijkt door bij het vermenigvuldigen telkens twee factoren, die in alle teekens der wortelvormen verschillen, samen te nemen. Op geheel dezelfde wijze blijkt, dat in de verg. alleen even machten van $\sqrt{v_i}$ voorkomen (dus dat de verg. werkelijk rationaal is) en dat de termen, die een der grootheden v_i niet bevatten, een zuiver vierkant vormen.

¹⁾ Is een der 2^n vergelijkingen $\pm l_1 \pm \dots \pm l_n = C$ een identiteit, dan behoort het geheele vlak der gegeven lijnen tot het oppervlak en wel tweemaal; de graad van het overige gedeelte der m. pl. wordt dan met twee verlaagd. Het kan echter ook gebeuren, dat de vergelijking voor verschillende teekencombinaties een identiteit wordt, in welk geval het vlak zich meerdere malen afsplitst.

²⁾ In bijzondere gevallen kan de graad door afsplitsing van het oneindig verre vlak lager worden. Zie hierover § 7.

³⁾ Men vergelijke: CAYLEY, On polyzomal curves, otherwise the curves $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \dots = 0$, *Trans. of the R. S. of Edinburgh* Vol. 25 (1868), p. 1—110; *Coll. Math. Papers* Vol. 6, p. 470—576. Zijn U, V , enz. functies van den r^{den} graad in de homogene coördinaten x, y, z , en is v het aantal termen, dan stelt de verg. een kromme van den graad 2^{v-2r} voor (art. 3 en 4).

⁴⁾ Voor $n=1$ is het oppervlak nog wel van den graad $2^n=2$, maar de termen, die C niet bevatten, vormen dan niet meer een zuiver vierkant.

§ 5. DE SINGULIERE KROMMEN VAN HET OPPERVLAKE.

In alle volgende beschouwingen zullen we ons, tenzij het tegendeel uitdrukkelijk gezegd wordt, beperken tot het *algemeene geval*, dat uit den aard der zaak moeilijk nader te omschrijven is. Alle resultaten zullen dus in bijzondere gevallen een wijziging kunnen ondergaan, waarmede we ons hier echter niet bezig zullen houden. Alleen zal steeds het bijzondere geval $C = 0$ aan een afzonderlijk onderzoek worden onderworpen.

16. Dubbelkromme in het oneindige.

Voor een punt in het oneindige is in het algemeen de algebraïsche som der afstanden tot de gegeven lijnen, welke teekencombinatie we ook kiezen, oneindig groot. Is die algebraïsche som eindig ¹⁾, dan zal de grootte dier eindige waarde afhangen van de wijze, waarop we een punt uit het eindige tot het oneindig verre punt laten naderen. Hieruit blijkt, *dat de kromme in het oneindige van het oppervlak niet van de waarde van C afhangt*, hetgeen ook onmiddellijk uit de vergelijking van het oppervlak volgt.

De kromme in het oneindige is dus dezelfde als die van het oppervlak voor $C = 0$, dus van het oppervlak

$$\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n} = 0;$$

dit oppervlak is van den graad 2^{n-1} , daar men nu bij het herleiden van de verg. tot den rationalen vorm aan een der wortelvormen, b.v. $\sqrt{v_1}$, steeds hetzelfde teeken kan toekennen, waardoor slechts 2^{n-1} irrationale factoren ontstaan. De kromme in het oneindige van het oppervlak voor $C > 0$ is dus van den graad 2^n , m. a. w. het vlak in het oneindige snijdt dit oppervlak volgens twee samenvallende krommen.

Dat we met een dubbelkromme en niet met raking aan het vlak in het oneindige te doen hebben, blijkt uit de rationale vergelijking van het oppervlak, die we in n°. 15 hebben neergeschreven. Maakt men die verg. homogeen door invoering van een grootheid τ en noemen we de zoo verkregen vergelijking $F(x, y, z, \tau) = 0$, dan vindt men voor een punt in het oneindige ($\tau = 0, f_{2n-2}(v_i) = 0$)

$$\frac{dF}{dx} = 0, \frac{dF}{dy} = 0, \frac{dF}{dz} = 0,$$

dus:

¹⁾ Dit is het geval als voldaan is aan

$$\sin \beta_1 \pm \sin \beta_2 \pm \dots \pm \sin \beta_n = 0,$$

waarin β_i de hoek is, dien de richting van het oneindig verre punt met de gegeven lijn l_i maakt.

De kromme in het oneindige van het oppervlak is een dubbelkromme van den graad 2^{n-1} ¹⁾ ²⁾.

Daar de kromme in het oneindige slechts van de termen van den hoogsten graad van $f_{2n-2}(v_i)$ afhangt, zoo blijkt direct, *dat de dubbelkromme in het oneindige niet verandert als men de gegeven lijnen evenwijdig verschuift*, dus dat die kromme alleen van de richtingen der gegeven lijnen afhangt.

17. Krommen van aanraking.

In ieder punt van een door een gegeven lijn l_i gaand isotroop vlak u_i is de afstand tot l_i gelijk aan nul, zoodat de doorsnede van u_i met het oppervlak dezelfde is als de doorsnede van u_i met het bij de overige $n-1$ gegeven lijnen behoorende oppervlak. Dit laatste oppervlak is echter van den graad 2^{n-1} , zoodat de doorsnede van u_i met het oorspronkelijke (bij de n lijnen behoorende) oppervlak van den graad 2^n in twee samenvallende krommen van den graad 2^{n-1} ontgaat.

We hebben hier echter niet met een dubbelkromme te doen, maar met raking aan het isotrope vlak. Dit blijkt door de vergelijking van het oppervlak in den volgenden rationalen vorm te schrijven:

$$F(xyz) = (u_i u_i')^{2^{n-1}} + (u_i u_i')^{2^{n-1}-1} f_1 + (u_i u_i')^{2^{n-1}-2} f_2 + \dots + \\ + u_i u_i' f_{2^{n-1}-1} - [f_{2^{n-2}}]^2 = 0,$$

waarin f_j een homogene functie van den graad j in $v_1, v_2, \dots, v_{i-1}, v_{i+1}, \dots, v_n$ ³⁾ en C^2 is. Voor $u_i = 0, f_{2^{n-2}} = 0$ heeft men:

$$\frac{dF}{dx} = u_i' f_{2^{n-1}-1} \frac{du_i}{dx}, \quad \frac{dF}{dy} = u_i' f_{2^{n-1}-1} \frac{du_i}{dy}, \quad \frac{dF}{dz} = u_i' f_{2^{n-1}-1} \frac{du_i}{dz},$$

waaruit volgt, dat het raakvlak in een punt der doorsnede met u_i het vlak u_i zelf is. We vinden dus:

Het oppervlak raakt aan ieder der $2n$ isotrope vlakken door de gegeven lijnen volgens een kromme van den graad 2^{n-1} ⁴⁾.

¹⁾ Hiervoor moet echter n minstens 2 zijn.

²⁾ Gaat een punt langs een bestaanbaar blad door het vlak in het oneindige heen, dan keeren de teekens van alle afstanden om. Voor het andere door de dubbelkromme gaande blad zijn aan denzelfden kant van het oneindige alle teekens anders dan voor het eerste blad, zoodat men om dezelfde teekens te behouden bij het passeeren van het oneindige niet op de analytische voortzetting van het blad, maar juist op het andere blad moet overgaan.

³⁾ Hierin is $v_1 = u_1 u_1', v_2 = u_2 u_2',$ enz.

⁴⁾ Dit geldt ook reeds voor $n=1$. De kromme van aanraking is dan de lijn in het oneindige van het isotrope raakvlak.

Deze isotrope vlakken zullen we de *singuliere raakvlakken* noemen, de krommen volgens welke ze het oppervlak aanraken de *krommen van aanraking*. Het zal dikwijls voorkomen, dat de krommen van aanraking met twee toegevoegde (door een zelfde gegeven lijn gaande) singuliere raakvlakken tegelijkertijd beschouwd worden. Beide krommen te zamen noemen we dan de *volledige kromme van aanraking*, terwijl we ter onderscheiding de krommen, waaruit deze bestaat, de *afzonderlijke krommen van aanraking* noemen ¹⁾.

18. Kegelpunten van het oppervlak.

Ieder der gegeven lijnen snijdt het oppervlak in 2^{n-1} punten (die dus alle dubbel tellen), nl. in de snijpunten met het bij de overige gegeven lijnen behoorende oppervlak van den graad 2^{n-1} . Hieruit blijkt, dat een kromme van aanraking de in het singuliere raakvlak gelegen gegeven lijn in 2^{n-1} punten snijdt en dus niet aanraakt.

In een snijpunt Q met een gegeven lijn l_i wordt het oppervlak door de beide door l_i gaande isotrope vlakken aangeraakt, waaruit volgt:

Ieder der n gegeven lijnen snijdt het oppervlak in 2^{n-1} kegelpunten²⁾, waarvan de raakkegels aan de beide isotrope vlakken door de gegeven lijn raken; m. a. w. zulk een raakkegel wordt door een vlak loodrecht op de gegeven lijn, waarop het kegelpunt ligt, gesneden volgens een kegelsnede³⁾, waarvan een der brandpunten op de gegeven lijn ligt⁴⁾.

In zulk een kegelpunt hangen, als het bestaanbaar is, twee bladen van het oppervlak samen behoorende bij teekencombinaties, die alleen in het teeken van den afstand tot de gegeven lijn, waarop het kegelpunt ligt, verschillen. In het geheel heeft het oppervlak $n 2^{n-1}$ zulke geïsoleerd liggende kegelpunten, waarvan er

¹⁾ CAYLEY (l. c. art. 13—19) toont aan, dat een „ ν -zomal curve” $\sqrt{U} + \sqrt{V} + \dots = 0$ door ieder der krommen $U = 0$, $V = 0$, enz., die hij „zomal curves” noemt, in $2^{\nu-3}$, ²⁾ (dus in al hare snijpunten) wordt aangeraakt en wel door $U = 0$ in de snijpunten van de „zomal curve” $U = 0$ met de „antizomal curve” $\sqrt{V} + \dots = 0$.

²⁾ Dat een snijpunt met een gegeven lijn l_i dubbelpunt is, blijkt ook uit de vergelijking van het oppervlak in den vorm, dien we daaraan in n°. 17 gegeven hebben. Immers is behalve u_i en $f 2^{n-2} = 0$ ook nog $u_i' = 0$, dan worden $\frac{dF}{dx}$, $\frac{dF}{dy}$ en $\frac{dF}{dz}$ alle nul.

³⁾ Is het kegelpunt bestaanbaar, dan kan deze kegelsnede zoowel een ellips als een hyperbool zijn. Zie n°. 19.

⁴⁾ Al deze resultaten gelden ook nog voor $n = 1$. Er is dan slechts één kegelpunt, dat in het punt in het oneindige der gegeven lijn ligt.

2^{n-1} op iedere kromme van aanraking liggen, terwijl door ieder dier kegelpunten twee toegevoegde krommen van aanraking gaan.

19. De in het eindige gelegen dubbelkromme.

Keeren we nog eens terug tot het reeds in n°. 15 genoemde bijzondere geval, dat alle gegeven rechten in een zelfde vlak V gelegen zijn. In dat geval bestaat de doorsnede van V met het oppervlak uit 2^n rechten, die twee aan twee evenwijdig loopen; deze rechten zullen we de rechten der doorsnede noemen.

Door ieder snijpunt van een gegeven lijn met een rechte der doorsnede gaat nog een andere rechte der doorsnede ¹⁾. Er zijn dus $n2^{n-1}$ snijpunten van gegeven lijnen met rechten der doorsnede; deze snijpunten zijn de in n°. 18 genoemde kegelpunten van het oppervlak, waar bij verschillende teekencombinaties behoorende bladen samenhangen, welke kegelpunten nu dus alle bestaanbaar zijn. De 2^{n-1} oneindig verre snijpunten van rechten der doorsnede zijn de snijpunten van V met de dubbelkromme in het oneindige.

De 2^n rechten der doorsnede kunnen we uit een zeker aantal gesloten even gebroken trekken (zoo genoemd omdat ze bij verplaatsing der gegeven lijnen uit het vlak V in de gebogen trekken der doorsnede van V met het oppervlak overgaan ²⁾) opgebouwd denken, zoodanig dat op iederen trek de som der met bepaalde teekens voorziene afstanden tot de gegeven rechten de standvastige waarde C heeft en voor ieder punt van een zelfden trek dezelfde teekencombinatie geldt. Deze trekken zijn, als de figuur der gegeven lijnen en der rechten der doorsnede geteekend is, gemakkelijk aan te wijzen. Daartoe beginnen we met een willekeurig punt van een rechte der doorsnede, vervolgen die rechte om telkens bij het passeeren van een gegeven lijn op de andere rechte der doorsnede door het snijpunt en bij het passeeren van de lijn in het oneindige op de evenwijdige rechte der doorsnede over te gaan; de in het eindige gelegen hoekpunten dier gebroken trekken zijn dus de kegelpunten van het oppervlak.

In fig. 1 zijn die gebroken trekken geteekend voor het geval van drie gegeven lijnen, die een driehoek met zijden 3, 4 en 5

¹⁾ De 2^n rechten der doorsnede vormen dus te zamen met de $(n+1)2^{n-1}$ snijpunten dier rechten met de gegeven rechten en de lijn in het oneindige een $[(n+1)2^{n-1}]_n$ configuratie; de punten dier configuratie kunnen bovendien worden ingedeeld in $n+1$ groepen ieder van 2^{n-1} op één lijn (gegeven lijn of lijn in het oneindige) gelegen punten.

²⁾ Hierbij worden de in het eindige gelegen hoekpunten der trekken afgerond, terwijl de trekken in de punten in het oneindige twee verschillende asymptoten behouden.

vormen, terwijl $C = \frac{2^1}{5}$ genomen is. Door een afronding van de rechten der doorsnede in de nabijheid van de hoekpunten is de samenhang der trekken aangeduid ¹⁾.

Wanneer C een zekere minimale waarde overschrijdt is een der gebroken trekken de in § 1 beschouwde convexe veelhoek, waarvoor de som der absolute afstanden $= C$ is. Deze trek kan door geen andere rechten der doorsnede worden gesneden, daar op de overige rechten der doorsnede de algebraïsche som der afstanden $= C$ en dus de absolute som $> C$ is. De overige trekken, die ook inspringende hoeken kunnen vertoonen en de lijn in het oneindige een even aantal malen kunnen snijden, zullen elkaar doorsnijden.

Een gebroken trek vormt de doorsnede van een zelfde blad van het oppervlak met het vlak V der gegeven lijnen. Wanneer dus gebroken trekken elkaar doorsnijden, zullen ook de bijbehorende bladen elkaar doorsnijden, m. a. w. *de buiten de gegeven lijnen en de lijn in het oneindige gelegen snijpunten der 2^n rechten der doorsnede zijn de snijpunten van het vlak V met een dubbelkromme van het oppervlak.* Deze dubbelkromme zal natuurlijk blijven bestaan als men de coplanaire ligging der gegeven lijnen verstoort, daar de elkaar doorsnijdende bladen bij verschillende teekencombinaties behooren en de doorsnijding dus niet in samenhang kan overgaan.

Daar er van de $2^{n-1} (2^n - 1)$ snijpunten der rechten der doorsnede $n 2^{n-1}$ op gegeven lijnen en 2^{n-1} in het oneindige liggen, zijn er nog $2^{n-1} (2^n - 1) - n 2^{n-1} - 2^{n-1} = 2^{n-1} (2^n - n - 2)$ andere snijpunten, *zoodat de dubbelkromme in het eindige van den graad $2^{n-1} (2^n - n - 2)$ is ²⁾*; dit geldt ook nog als de gegeven lijnen niet in één vlak liggen.

20. De dubbelkromme bestaat uit $2^n - n - 2$ krommen.

Ook zonder de gegeven lijnen alle in hetzelfde vlak te kiezen laat zich het bestaan der dubbelkromme gemakkelijk aantonen. Een in het eindige gelegen punt is een punt van een dubbelkromme van het oppervlak als met twee verschillende teekencombinaties aan de vergelijking

$$\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n} = C$$

¹⁾ Uit de fig. ziet men, dat de doorsnede van den raakkegel in een kegelpunt met een vlak loodrecht op de door het kegelpunt gaande gegeven lijn zoowel een ellips als een hyperbool zijn kan. In de fig. leveren twee der op l_2 gelegen kegelpunten een elliptische, de beide andere een hyperbolische doorsnede.

²⁾ Deze dubbelkromme treedt dus eerst op als $n \geq 3$ is.

voldaan is en beide teekencombinaties in meer dan één teeken verschillen; immers dan is bij het passeeren van het punt op een zelfde blad geen overgang van de eene teekencombinatie tot de andere mogelijk, zoodat door het punt twee bij verschillende teekencombinaties behorende bladen moeten gaan.

Zijn v_1, v_2, \dots, v_i de radicalen der in teeken verschillende wortelvormen, terwijl de overige teekens overeenstemmen, dan voldoet het punt der dubbelkromme aan de vergelijkingen

$$\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_i} = 0 \quad (i = 2, 3, \dots, n-2 \text{ of } n-1),$$

$$\sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_{i+2}} + \dots + \sqrt{v_n} = C,$$

waarvan de eerste een oppervlak van den graad 2^{i-1} , de tweede een oppervlak van den graad 2^{n-i} voorstelt. De snijkromme dier oppervlakken, die dus van den graad 2^{n-1} is, is een dubbelkromme van het oppervlak. De graad dier dubbelkromme is onafhankelijk van de wijze waarop men de som der wortelvormen in tweeën breekt.

Voor het aantal der dubbelkrommen vindt men:

$$(n)_2 + (n)_3 + (n)_4 + \dots + (n)_{n-1} = 2^n - n - 2,$$

zoodat het resultaat is:

De in het eindige gelegen dubbelkromme van het oppervlak bestaat uit $2^n - n - 2$ krommen van den graad 2^{n-1} .

¹⁾ Is $n=3$, dan heeft het oppervlak drie dubbelkrommen van den vierden graad. Ieder dier dubbelkrommen is de doorsnede van een omwentelingscylinder, die een der gegeven lijnen als as en een straal C heeft, met de hyperbolische paraboloiden, die de m. pl. is der punten, waarvan de afstanden tot de beide andere gegeven lijnen gelijk zijn.

In het geval van fig. 1, waar de drie gegeven lijnen in één vlak V liggen, degenerceert de hyperbolische paraboloiden der lijnen l_2 en l_3 in de beide vlakken door de deel-lijnen van den hoek (l_2, l_3) loodrecht op V aangebracht, zoodat ieder der krommen van den vierden graad in twee elkaar tweemaal snijdende ellipsen ontaardt, waarvan de vlakken loodrecht op elkaar staan; de snijpunten der ellipsen op den cylinder l_1 liggen op de loodlijn in het punt (l_2, l_3) op V opgericht. Men ziet onmiddellijk, dat een loodlijn in het middelpunt van een in- of aangeschreven cirkel van driehoek $l_1 l_2 l_3$ op V opgericht de drie cylinders in dezelfde twee punten snijdt, waaruit blijkt, dat op vier manieren drie op verschillende cylinders gelegen dubbelellipsen zijn aan te wijzen, die twee gemeenschappelijke punten hebben. In het geheel zijn er dus acht punten waar drie dubbelkrommen door heen gaan, hetgeen (zoals in de volgende paragraaf blijken zal) ook nog het geval is als de drie gegeven lijnen niet in één vlak liggen.

Deze eigenschappen kunnen met voordeel benut worden om de rechten der doorsnede alleen door constructie (dus zonder de vergelijkingen dier rechten op te maken) te vinden. Daartoe trekt men de 6 lijnen op een afstand C evenwijdig aan de gegeven lijnen en de 6 binnen- en buitenbisectricen van den driehoek $l_1 l_2 l_3$. De snijpunten dier lijnen wijzen dan de 12 snijpunten van het vlak V met de 6 dubbelellipsen aan. Deze snijpunten behooren tot een $(12)_2 (8)_3$ configuratie, waarvan de 8 lijnen de gezochte rechten der doorsnede zijn.

21. Nulligging der singuliere krommen.

Een dubbelkromme van het oppervlak is daardoor gekenmerkt, dat voor ieder harer punten de som der met bepaalde teekens genomen afstanden tot i der gegeven lijnen ($i = 2, 3, \dots, n-1$) nul is; we zeggen dan, dat die kromme *nulligging* ten opzichte van die i gegeven lijnen vertoont, en stellen de kromme voor door het symbool $C(i)$. De vergelijkingen van een der $(n)_i$ krommen $C(i)$ zijn:

$$\begin{aligned} \sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_i} &= 0, \\ \sqrt{v_{i+1}} + \sqrt{v_{i+2}} + \dots + \sqrt{v_n} &= C. \end{aligned}$$

Is hierin $i=1$, dan krijgt men geen dubbelkromme, maar het geheel der beide krommen van aanraking met twee toegevoegd onbestaanbare singuliere raakvlakken, dus een *volledige kromme van aanraking*.

Voor $i=n$ stellen de vergelijkingen weer een dubbelkromme voor, nl. de dubbelkromme in het oneindige.

Een kromme van het oppervlak, die nulligging ten opzichte van i gegeven lijnen vertoont ($i=1, 2, \dots, n$), noemen we een singuliere kromme $C(i)$. Een singuliere kromme $C(1)$ is een volledige kromme van aanraking en van den graad 2^n ; de overige singuliere krommen zijn dubbelkrommen en van den graad 2^{n-1} , voor $i=n$ in het oneindige, voor $i < n$ in het eindige gelegen. Het aantal krommen $C(i)$ bedraagt $(n)_i$.

22. Rang van het oppervlak.

Een willekeurig vlak V snijdt het oppervlak volgens een kromme van den graad 2^n , die tot vergelijking heeft:

$$\sqrt{s_1 s_1'} + \sqrt{s_2 s_2'} + \dots + \sqrt{s_n s_n'} = C,$$

waarin $s_i = 0$ en $s_i' = 0$ de vergelijkingen zijn der snijlijnen van het vlak V met de beide door de gegeven lijn l_i gaande isotrope vlakken. Deze kromme wordt door ieder der $2n$ lijnen $s_1 = 0$, $s_1' = 0$, $s_2 = 0$, enz. in 2^{n-1} punten aangeraakt. *Verder heeft de kromme 2^{n-1} dubbelpunten in het oneindige (snijpunten met de dubbelkromme in het oneindige) en $(2^n - n - 2)2^{n-1}$ in het eindige gelegen dubbelpunten (snijpunten met de in het eindige verlopende dubbelkrommen). Hieruit volgt, dat de doorsnede van het oppervlak met een willekeurig vlak een kromme van het geslacht $(n-2)2^{n-1} + 1$ en de klasse $n2^n$ is, waaruit blijkt, dat het oppervlak van den rang $n2^n$ is.*

23. Doorsneden met vlakken door gegeven lijnen.

Er kunnen zich bijzonderheden voordoen als het vlak V een bijzonderen stand aanneemt. Gaat V door een der gegeven lijnen, b.v. l_1 , dan vallen de lijnen $s_1 = 0$ en $s_1' = 0$ in de lijn l_1 samen en wordt de vergelijking der doorsnede

$$\sqrt{s_2 s_2'} + \sqrt{s_3 s_3'} + \dots + \sqrt{s_n s_n'} = C \pm s_1,$$

waaruit men onmiddellijk ziet, dat de doorsnede in twee krommen van den graad 2^{n-1} ontgaat.

De 2^{2n-2} snijpunten der krommen zijn gemakkelijk aan te wijzen. Deze zijn: 1°. de 2^{n-1} op l_1 gelegen kegelpunten, 2°. de 2^{n-1} punten in het oneindige, 3°. de snijpunten van V met de $(n-1)_1 + (n-1)_2 + \dots + (n-1)_{n-2} = 2^{n-1} - 2$ in het eindige gelegen dubbelkrommen, die nulligging vertoonen ten opzichte van gegeven lijnen, waaronder l_1 voorkomt. Te zamen geeft dit

$$2^{n-1} + 2^{n-1} + (2^{n-1} - 2) 2^{n-1} = 2^{2n-2}$$

snijpunten.

Ieder der beide snijkrommen heeft dubbelpunten in de snijpunten met de dubbelkrommen, die nulligging hebben ten opzichte van gegeven lijnen, waaronder l_1 niet voorkomt. Het vlak V snijdt zulk een dubbelkromme in 2^{n-1} punten, waarvan er 2^{n-2} op de eene, 2^{n-2} op de andere kromme liggen, waarin de doorsnede van het oppervlak met V ontgaat. Ieder dier krommen is dus in het bezit van

$\frac{1}{2}[(n-1)_2 + (n-1)_3 + \dots + (n-1)_{n-1}] 2^{n-2} = 2^{n-2}(2^{n-1} - n)$ dubbelpunten, die alle in het eindige liggen.

We vinden dus:

De doorsnede van het oppervlak met een vlak door een gegeven lijn degenerereert in twee krommen van den graad 2^{n-1} . Ieder dier krommen heeft $2^{n-2}(2^{n-1} - n)$ dubbelpunten en is dus van het geslacht $(n-3)2^{n-2} + 1$ en van de klasse $(n-1)2^{n-1}$.

Liggen i gegeven lijnen in één vlak, dan zal natuurlijk de doorsnede met dat vlak in 2^i krommen van den graad 2^{n-i} degenereren. Voor $i = n$ krijgt men het in n°. 19 beschouwde geval.

24. Bijzonder geval $C = 0$.

Is $C = 0$, dan worden de voorgaande resultaten eenigszins anders. Het oppervlak is dan van den graad 2^{n-1} zonder dubbelkromme in het oneindige. Een singuliere kromme $C(i)$ is nu tevens een kromme $C(n-i)$, terwijl $i = n$ geen zin heeft, evenmin als in het algemeene

geval $i = 0$. Het aantal singuliere krommen $C(i)$ bedraagt $(n)_i$, behalve als n even en $i = \frac{1}{2}n$ is, in welk geval het aantal $\frac{1}{2}(n)_i$ wordt.

Het aantal volledige krommen van aanraking, die van den graad 2^{n-1} zijn, bedraagt n . Het aantal dubbelkrommen, die van den graad 2^{n-2} zijn, bedraagt

$$\frac{1}{2}!(n)_2 + (n)_3 + \dots + (n)_{n-2}! = 2^{n-1} - n - 1.$$

Verder heeft het oppervlak $n2^{n-2}$ kegelpunten, 2^{n-2} op ieder der n gegeven lijnen.

De doorsnede van het oppervlak met een willekeurig vlak is van den graad 2^{n-1} met $(2^{n-1} - n - 1)2^{n-2}$ dubbelpunten (die alle in het eindige liggen) en dus van het geslacht $(n-2)2^{n-2} + 1$ en van de klasse $n2^{n-1}$, zoodat het oppervlak van den rang $n2^{n-1}$ is.

De doorsnede met een vlak door een gegeven lijn degenereert in twee krommen van den graad 2^{n-2} , waarvan de snijpunten zijn: 1°. 2^{n-2} kegelpunten op de gegeven lijn, 2°. $(2^{n-2} - 1)2^{n-2}$ snijpunten met dubbelkrommen. Ieder der twee krommen heeft $(2^{n-2} - n)2^{n-3}$ dubbelpunten (snijpunten met andere dubbelkrommen) en is dus van het geslacht $(n-3)2^{n-3} + 1$ en van de klasse $(n-1)2^{n-2}$.

§ 6. DE SNIJPUNTEN VAN DRIE SINGULIERE KROMMEN.

25. Twee singuliere krommen snijden elkaar.

Men kan gemakkelijk aantoonen, dat ieder tweetal singuliere krommen elkaar eenige malen snijden.

Zijn de irrationale vergelijkingen der eene singuliere kromme

$$T + R = C, \quad Q = S$$

en van de andere singuliere kromme

$$T + S = C, \quad Q = R,$$

waarbij Q , R , S en T de som der met willekeurige teekens genomen afstanden tot q , r , s en t gegeven lijnen voorstellen ($q + r + s + t = n$). Q , R , S en T zijn dus de sommen van resp. q , r , s en t wortels uit producten van twee toegevoegd onbestaanbare lineaire functies der coördinaten. De getallen q , r , s en t kunnen nul zijn, maar natuurlijk kunnen niet twee der drie getallen q , r en s tegelijkertijd nul zijn.

Beide singuliere krommen snijden elkaar in die punten, waar met dezelfde teekencombinaties in Q en R voldaan is aan

$$T + R = C, \quad Q = S, \quad Q = R,$$

daar dan $T + S = C$ hiervan een gevolg is. Nu snijden de oppervlakken $T + R = C$, $Q = S$ en $Q = R$, die resp. van den graad 2^{t+r} , 2^{q+s-1} en 2^{q+r-1} zijn; elkaar in $2^{n+q+r-2}$ punten. De overeenstemming der teekencombinaties in Q en R zal echter slechts voor een deel van dit snijpuntensysteem bestaan. De punten van dit partieele systeem zullen dan ook aan $T + S = C$ voldoen, dus op beide singuliere krommen liggen.

26. Door de snijpunten van twee singuliere krommen gaat een derde.

Uit de gelijkheid der teekencombinaties in Q , R , S en T blijkt, dat de punten van het bovengenoemde partieele snijpuntensysteem ook voldoen aan de vergelijkingen

$$T + Q = C, \quad R = S$$

en dus liggen op een derde singuliere kromme, die door deze vergelijkingen wordt voorgesteld. We vinden dus:

De drie singuliere krommen

$$\begin{array}{ll} C(r+s): & T + Q = C, \quad R = S, \\ C(s+q): & T + R = C, \quad S = Q, \\ C(q+r): & T + S = C, \quad Q = R \end{array}$$

hebben eenige gemeenschappelijke punten. Ieder der drie krommen gaat door alle snijpunten der beide andere. Twee der drie krommen kan men willekeurig uit de singuliere krommen uitkiezen, waaruit dan de derde volgt.

Dit resultaat kan men ook als volgt formuleeren:

Twee singuliere krommen hebben eenige gemeenschappelijke punten, die alle op een derde singuliere kromme liggen, nl. op die, welke nulligging vertoont ten opzichte van die gegeven lijnen, die in slechts één der groepen van gegeven lijnen voorkomen, ten opzichte waarvan de beide eerste singuliere krommen nulligging vertoonen.

De snijpunten der drie singuliere krommen vertoonen nulligging ten opzichte van drie gedeeltelijk uit dezelfde lijnen bestaande groepen van $r+s$, $s+q$ en $q+r$ gegeven lijnen. Een dergelijk punt zullen we een *singulier punt* $P(r+s, s+q, q+r)$ noemen. Hierbij kunnen we steeds $q \leq r \leq s$ onderstellen.

27. Drievoudige punten; punten P_1 .

Het singuliere punt is een bestaanbaar of onbestaanbaar in het eindige gelegen snijpunt van drie dubbelkrommen als $r+s < n$ en

$q + r > 1$ is. In dat punt snijden drie bladen van het oppervlak elkaar, nl. de bladen behoorend bij de teekencombinaties:

$$\begin{aligned} -Q + R + S + T &= C, \\ Q - R + S + T &= C, \\ Q + R - S + T &= C; \end{aligned}$$

hierin moeten aan de wortelvormen van Q , R , S en T bepaalde teekens worden toegekend, die in de drie vergelijkingen dezelfde zijn.

28. Viervoudige punten; punten P_2 .

Het singuliere punt is een bestaanbaar of onbestaanbaar snijpunt van twee in het eindige gelegen dubbelkrommen en de dubbelkromme in het oneindige als $q = t = 0$ en $r > 1$ is; immers dan wordt $r + s = n$ ¹⁾. We vinden dus:

Twee in het eindige gelegen dubbelkrommen, die nulligging vertoonen ten opzichte van twee groepen van gegeven lijnen, waarvan de eene groep uit die gegeven lijnen bestaat, die niet voorkomen in de andere groep, hebben dezelfde punten in het oneindige.

Twee dergelijke dubbelkrommen zullen we complementair noemen; ze hebben tot vergelijkingen

$$\begin{aligned} C(s): \quad R &= C, & S &= 0, \\ C(r): \quad S &= C, & R &= 0. \end{aligned}$$

De derde dubbelkromme is:

$$C(n): \quad 0 = C, \quad R = S,$$

d. i. de dubbelkromme in het oneindige.

Het singuliere punt in het oneindige is dubbelpunt der drie dubbelkrommen. Immers het is een punt van een dubbelkromme der oppervlakken $R = C$, $S = C$ en $R = S$. Door dat punt gaan dus zes takken van dubbelkrommen²⁾, die de doorsneden twee aan twee van vier door het punt gaande bladen van het oppervlak zijn, behoorend bij de teekencombinaties:

$$\begin{aligned} R + S &= C, \\ -R - S &= C, \\ R - S &= C, \\ -R + S &= C. \end{aligned}$$

¹⁾ Dit geval kan eerst voorkomen als $n > 3$ is

²⁾ De teekencombinaties behoorend bij deze zes takken zijn voor de takken

van	$C(s):$	$R - C = S = 0,$	$R + C = S = 0;$
"	$C(r):$	$S - C = R = 0,$	$S + C = R = 0;$
"	$C(n):$	$C = R - S = 0,$	$C = R + S = 0.$

*De doorsnede van twee dier bladen en de doorsnede der beide andere bladen vormen telkens twee takken derzelfde dubbelkromme*¹⁾.

29. In het eindige gelegen uniplanaire tweebladige dubbelpunten; punten P_3 .

*Is $q=0$, $r=1$, dan is de singuliere kromme $C(q+r)$ een volledige kromme van aanraking (de beide krommen van aanraking met twee toegevoegd onbestaanbare singuliere raakvlakken). Is verder $1 < s < n-1$, dan zijn de beide andere singuliere krommen in het eindige gelegen dubbelkrommen*²⁾. De vergelijkingen der dubbelkrommen zijn

$$\begin{array}{lll} C(s+1): & T = C, & R_1 = S, \\ C(s): & T + R_1 = C, & S = 0, \end{array}$$

en die der volledige kromme van aanraking

$$C(1): \quad T + S = C, \quad R_1 = 0;$$

hierin is R_1 in plaats van R geschreven, om aan te geven, dat daarin slechts één wortelvorm voorkomt.

*Het in het eindige gelegen onbestaanbare singuliere punt is een enkelvoudig punt der beide dubbelkrommen, echter een dubbelpunt der kromme van aanraking*³⁾; immers het is een punt van een dubbelkromme van het oppervlak $T + S = C$. De beide dubbelkrommen raken aan het singuliere raakvlak der kromme van aanraking; immers de oppervlakken $R_1 = S$ en $T + R_1 = C$ raken aan dat singuliere raakvlak.

Door het singuliere punt gaan twee bladen van het oppervlak, nl.:

$$\begin{array}{l} \pm R_1 + S + T = C, \\ \pm R_1 - S + T = C^4), \end{array}$$

die hetzelfde singuliere raakvlak volgens verschillende takken der kromme van aanraking aanraken en elkaar volgens de beide dubbel-

¹⁾ De raakvlakken der bladen in het snijpunt vormen een volledige viervlakkenhoek, waarvan de drie paar overstaande ribben de dubbelpuntsraaklijnen der dubbelkrommen zijn.

²⁾ Ook hiervoor moet $n > 3$ zijn.

³⁾ De teekencombinaties zijn

$$\begin{array}{lll} \text{voor } C(s+1): & T - C = \pm R_1 + S = 0, \\ \text{" } C(s): & T \pm R_1 - C = S = 0, \\ \text{" de beide takken van } C(1): & T + S - C = R_1 = 0, \quad T - S - C = R_1 = 0. \end{array}$$

Een teekenomkeering van slechts één wortelvorm wijst niet op twee takken, maar op twee samenhangende stukken van denzelfden tak. De beide teekens van R_1 hebben dus op de beide helften van een aan een der vlakken $R_1 = 0$ rakenden tak betrekking.

⁴⁾ Zie het laatste gedeelte van de vorige noot.

krommen doorsnijden. Het singuliere punt is dus een uniplanair punt van het oppervlak.

30. In het oneindige gelegen uniplanaire tweebledige dubbelpunten; punten P_4 .

Is $q=0$, $r=1$, $s=n-1$, dus $t=0$ ¹⁾, dan gaat het voorgaande onveranderd door, alleen met dit verschil, dat nu de singuliere kromme $C(s+1)$ de dubbelkromme in het oneindige is²⁾ en dus ook het singuliere punt in het oneindige ligt; de in het voorgaande voorkomende grootheid T is nu identisch nul. De in het eindige gelegen dubbelkromme $C(n-1)$, die op den omwentelingscylander $R_1 = C$ ligt, en de volledige kromme van aanraking zijn complementair³⁾.

31. Uniplanaire eenbladige dubbelpunten; punten P_5 .

Is $q=0$, $r=s=1$, dan zijn twee der singuliere krommen volledige krommen van aanraking, de derde een op een hyperbolische parabolöide liggende dubbelkromme $C(2)$ ⁴⁾. De vergelijkingen der singuliere krommen zijn:

$$\begin{aligned} C(1): \quad T + R_1 &= C, & S_1 &= 0, \\ C(1): \quad T + S_1 &= C, & R_1 &= 0, \\ C(2): \quad T &= C, & R_1 &= S_1. \end{aligned}$$

Het onbestaanbare singuliere punt, dat op de snijlijn m van twee door verschillende gegeven lijnen gaande isotrope vlakken ligt, is enkelvoudig punt der drie singuliere krommen, terwijl de beide krommen van aanraking de lijn m aanraken, de dubbelkromme de lijn m snijdt. Daar de lijn m twee samenvallende punten met de kromme van aanraking, die in haar geheel als doorsnede van het oppervlak dubbel telt, gemeen heeft, zoo blijkt, dat een snijlijn m van twee niet-toegevoegd onbestaanbare singuliere raakvlakken het oppervlak telkens in vier samenvallende punten snijdt⁵⁾.

¹⁾ Hiervoor behoeft slechts $n > 2$ ondersteld te worden.

²⁾ De dubbelkromme in het oneindige raakt in het singuliere punt aan de lijn in het oneindige van het singuliere raakvlak.

³⁾ D. w. z. de eene singuliere kromme heeft nulligging ten opzichte van die gegeven lijnen, die niet voorkomen in de groep van gegeven lijnen ten opzichte waarvan de andere singuliere kromme nulligging vertoont.

⁴⁾ Is $n=2$, dus $t=0$, dan is de dubbelkromme $C(2)$ de in twee rechten gedegeneerde dubbelkromme in het oneindige. Overigens gelden de verkregen resultaten ook voor dat geval.

⁵⁾ Dit ziet men ook onmiddellijk daaruit, dat de snijpunten van m met het oppervlak dezelfde zijn als die met het bij de $n-2$ overige gegeven lijnen behorende oppervlak van den graad 2^{n-2} . De 2^{n-2} snijpunten moeten dus alle 4-maal tellen om het aantal 2^n op te leveren.

De doorsnede met een willekeurig vlak heeft in een snijpunt met de dubbelkromme een dubbelpunt. Neemt men voor dat vlak een der singuliere raakvlakken door m , dan vallen de beide takken door het dubbelpunt en dus ook de dubbelpuntsraaklijnen samen en wel langs m . Hieruit volgt, *dat de dubbelkromme in het beschouwde singuliere punt een uniplanair punt heeft, waarvan de beide samenvallende raakvlakken door m gaan.*

Het oppervlak heeft in het singuliere punt slechts één blad, dat aan de beide singuliere raakvlakken raakt en zich zelf doorsnijdt. Het blad vertoont dezelfde singulariteit, die men bij een bestaander blad een *klempunt* (pichpoint) noemt, een punt waar de dubbelkromme het oppervlak verlaat en geïsoleerd wordt¹⁾.

32. Singulariteiten der dubbelkromme in het oneindige.

Uit het voorgaande zijn onmiddellijk een aantal bijzonderheden der singuliere krommen af te leiden. Zoo volgt uit n°. 28 en 29:

De dubbelkromme in het oneindige heeft de lijnen in het oneindige der $2n$ singuliere raakvlakken (of de raaklijnen uit de punten in het oneindige der gegeven lijnen aan den bolcirkel getrokken) tot 2^{n-2} -voudige raaklijnen (ieder snijpunt met zulk een raaklijn is een raakpunt). De $n2^{n-1}$ raakpunten zijn uniplanaire twebladige punten van de dubbelkromme²⁾.

Een punt in het oneindige van een in het eindige gelegen dubbelkromme, wier complementaire kromme eveneens dubbelkromme

¹⁾ Afgezien van de onbestaanbaarheid vertoont het blad dezelfde singulariteit als die welke het oppervlak

$$x^2 - 2yz + z^2 = 0$$

in den oorsprong vertoont. De dubbelkromme is hier de y -as, de singuliere raakvlakken, die volgens parabolen aanraken, zijn de vlakken $y - x = 0$ en $y + x = 0$. De doorsnede met het yz -vlak is de dubbele y -as en een aan de z -as rakende parabool. De doorsneden met vlakken loodrecht op de y -as zijn voor negatieve y onbestaanbaar met alleen een geïsoleerd punt in de y -as, voor positieve y 8-vormig. Deze 8 wordt kleiner maar tevens gerekter als het snijvlak tot het xz -vlak nadert; is het snijvlak het xz -vlak, dan zijn beide dubbelpuntsraaklijnen in de z -as samengevallen, terwijl de doorsnede zich tot een punt heeft samengetrokken. Opgemerkt zij nog, dat de doorsneden met vlakken evenwijdig aan het xy -vlak parabolen zijn en dat de doorsneden met vlakken evenwijdig aan de singuliere raakvlakken onbestaanbaar zijn, als ze de neg. y -as snijden, en in twee elkaar alleen op de y -as snijdende parabolen degenereren, als de vlakken de pos. y -as snijden.

²⁾ Dit geldt alleen voor $n > 2$. Is $n = 2$, dan raakt de dubbelkromme in het oneindige de lijnen in het oneindige der vier singuliere raakvlakken niet aan. Doordat nu echter de uit twee rechten bestaande dubbelkromme door de snijpunten van telkens twee dier lijnen in het oneindige gaat, is het aantal uniplanaire punten der dubbelkromme in overeenstemming met de formule gelijk aan vier; deze punten zijn evenwel éénbladig, dus klempunten.

is, (dus van een kromme $C(i)$, waarin $1 < i < n-1$ is) is een dubbelpunt van $C(i)$, die dus 2^{n-2} punten in het oneindige heeft. Deze punten zijn tevens dubbelpunten der dubbelkromme in het oneindige. Daar de complementaire dubbelkromme dezelfde punten in het oneindige oplevert, zoo vindt men voor het aantal dubbelpunten der dubbelkromme in het oneindige:

$$\frac{1}{2} \{ (n)_2 + (n)_3 + \dots + (n)_{n-2} \} 2^{n-2} = 2^{n-2} (2^{n-1} - n - 1),$$

dus:

De dubbelkromme in het oneindige heeft $2^{n-2}(2^{n-1} - n - 1)$ dubbelpunten en is derhalve van het geslacht $(n-2)2^{n-2} + 1$ en van de klasse $n2^{n-1}$ ¹⁾.

33. Singulariteiten der krommen van aanraking.

Uit n°. 29, 30 en 31 volgt:

De kromme van aanraking met een isotroop vlak door een gegeven lijn heeft de $2(n-1)$ snijlijnen van dat vlak met de isotrope vlakken door de andere gegeven lijnen tot 2^{n-2} -voudige raaklijnen ²⁾.

De snijpunten van het vlak V der kromme van aanraking met een dubbelkromme, die nulligging vertoont ten opzichte van eenige gegeven lijnen, waaronder de in V gelegen gegeven lijn niet voorkomt, zijn dubbelpunten der kromme van aanraking. Daar de dubbelkromme het vlak V in ieder snijpunt aanraakt, levert die dubbelkromme 2^{n-2} dubbelpunten der kromme van aanraking. Het totale aantal dier dubbelpunten bedraagt dus:

$$\{ (n-1)_2 + (n-1)_3 + \dots + (n-1)_{n-1} \} 2^{n-2} = 2^{n-2} (2^{n-1} - n).$$

Hiervan zijn er 2^{n-2} in het oneindige gelegen; deze worden opgeleverd door voor de dubbelkromme de aan de kromme van aanraking complementaire dubbelkromme te nemen.

Een kromme van aanraking heeft $2^{n-2}(2^{n-1} - n)$ dubbelpunten, waarvan er 2^{n-2} in het oneindige gelegen zijn. De kromme is dus van het geslacht $(n-3)2^{n-2} + 1$ en van de klasse $(n-1)2^{n-1}$ ³⁾.

34. Singulariteiten der dubbelkrommen in het eindige.

Uit n°. 28, 29, 30 en 31 volgt:

¹⁾ Hier wordt $n > 2$ ondersteld. Is $n = 3$, dan levert de formule naar behooren voor het aantal dubbelpunten nul op; voor $n = 3$ zijn er nog geen complementaire dubbelkrommen.

²⁾ Dit geldt ook nog voor $n = 2$; alleen ligt dan het raakpunt voor ieder der beide genoemde raaklijnen in het oneindige.

³⁾ Voor $n = 2$ levert de formule voor het totale aantal dubbelpunten en dus ook die voor het geslacht en de klasse de juiste uitkomst. Alleen de formule voor het aantal dubbelpunten in het oneindige wordt onjuist.

Een in het eindige gelegen dubbelkromme $C(i)$ heeft voor $i > 2$ de $2n$ singuliere raakvlakken tot 2^{n-2} -voudige raakvlakken; voor $i = n - 1$ liggen de raakpunten met de beide singuliere raakvlakken der aan de dubbelkromme complementaire volledige kromme van aanraking in het oneindige. De $n2^{n-1}$ raakpunten zijn uniplanaire tweebladige punten der dubbelkromme¹⁾.

Een dubbelkromme $C(2)$ heeft de $2(n - 2)$ singuliere raakvlakken, behalve die door de gegeven lijnen ten opzichte waarvan de $C(2)$ nulligging vertoont, tot 2^{n-2} -voudige raakvlakken. De $(n - 2)2^{n-1}$ raakpunten zijn uniplanaire tweebladige punten der dubbelkromme. De 2^n snijpunten met de vier overige singuliere raakvlakken zijn uniplanaire eenbladige punten (klempunten) der dubbelkromme; van deze punten liggen er 2^{n-2} op ieder der vier snijlijnen van telkens twee niet-toegevoegd onbestaanbare der singuliere raakvlakken²⁾.

Alle dubbelkrommen, zoowel die in het eindige als die in het oneindige, hebben dus $n2^{n-1}$ uniplanaire punten³⁾.

Een dubbelkromme, waarvan de complementaire kromme eveneens dubbelkromme is (dus een $C(i)$ voor $1 < i < n - 1$, waarvoor natuurlijk $n > 3$ zijn moet), heeft 2^{n-2} dubbelpunten in het oneindige.

35. Aantal gemeenschappelijke punten van drie singuliere krommen.

We willen nu het aantal gemeenschappelijke punten $P(r + s, s + q, q + r)$ van drie singuliere krommen $C(r + s)$, $C(s + q)$ en $C(q + r)$ bepalen. Deze gemeenschappelijke punten zijn die snijpunten der oppervlakken

$$T + Q = C, \quad T + R = C, \quad T + S = C,$$

waarbij de wortelvormen van T in de drie vergelijkingen dezelfde teekens hebben, daar alleen dan uit deze vergelijkingen

$$R = S, \quad S = Q, \quad Q = R$$

volgt.

De drie oppervlakken, die resp. van den graad 2^{t+q} , 2^{t+r} en 2^{t+s} zijn, hebben 2^{n+2t} snijpunten, waarvan, als $q > 0$ is (en dus ook $r > 0$, $s > 0$ wanneer we zooals steeds $q \leq r \leq s$ onderstellen), slechts 2^n snijpunten overeenstemmende teekencombinaties opleveren.

Immers Q , R , S en T zijn van den vorm $\sqrt{u_1 u_1'} + \sqrt{u_2 u_2'} + \dots$. Neemt men nu steeds de beide lineaire functies onder hetzelfde

¹⁾ Hier is $n > 3$ ondersteld.

²⁾ Dit geldt ook nog voor $n = 2$; alleen is dan $C(2)$ de dubbelkromme in het oneindige.

³⁾ Hier kan ook $n = 2$ zijn.

wortelteeken identisch aan elkaar gelijk (hetgeen hierop neerkomt, dat men alle gegeven lijnen den bolcirkel laat snijden), dan vallen de drie vergelijkingen $T + Q = C$, $T + R = C$ en $T + S = C$ in resp. 2^{t+q} , 2^{t+r} en 2^{t+s} lineaire vergelijkingen uiteen. Van deze mag men slechts, om snijpunten der drie dubbelkrommen te krijgen, die drietallen combineeren, die in de teekens van T overeenstemmen, aan welken eisch door $2^{t+q+r+s} = 2^n$ drietallen voldaan wordt; deze drietallen leveren even zoovele snijpunten der drie dubbelkrommen op.

Is echter $q = 0$, dus Q identisch nul, dan vermindert het aantal gemeenschappelijke punten der drie krommen tot 2^{n-2} , daar men dan bij omkeering van alle teekens van R in de vergelijking $T + R = C$ hetzelfde snijpunt blijft behouden, evenals bij omkeering van alle teekens van S in $T + S = C$.

Ook zonder de lineaire functies u_1, u_1' , enz. gelijk te nemen kan men het aantal 2^{n-2} voor $q = 0$ gemakkelijk voor den dag brengen. De gezochte snijpunten zijn nl. de snijpunten der oppervlakten $T = C$, $S = 0$, $R = 0$, die van den graad 2^t , 2^{s-1} en 2^{r-1} zijn. Al de $2^{t+r+s-2} = 2^{n-2}$ snijpunten dier oppervlakken voldoen, zooals onmiddellijk te zien is, ook aan $R = S$, $T + R = C$ en $T + S = C$.

Is (behalve $q = 0$) $r = 1$, dan moet men, om voor $R = 0$ een oppervlak van den graad 2^{r-1} te krijgen, daaronder slechts een der beide singuliere raakvlakken verstaan. Neemt men echter, overeenkomstig de afspraak, voor de singuliere kromme $T + S = C$, $R = 0$ de volledige kromme van aanraking, dan wordt het aantal gemeenschappelijke punten 2^{n-1} ; voor $r = s = 1$ wordt dit aantal 2^n .

We komen dus tot het volgende resultaat:

Het aantal gemeenschappelijke punten $P(r + s, s + q, q + r)$ ($q \leq r < s$) van drie bij elkaar behoorende singuliere krommen $C(r + s)$, $C(s + q)$ en $C(q + r)$ bedraagt 2^n als $q > 0$ is, in welk geval de drie krommen in het eindige gelegen dubbelkrommen zijn.

Het aantal gemeenschappelijke punten $P(r + s, s, r)$ van drie singuliere krommen $C(r + s)$, $C(s)$ en $C(r)$ bedraagt 2^{n-2} als $r > 1$ is, in welk geval de krommen eveneens dubbelkrommen zijn, waarvan er nu echter een de kromme in het oneindige zijn kan.

Het aantal gemeenschappelijke punten $P(s + 1, s, 1)$ van drie singuliere krommen $C(s + 1)$, $C(s)$ en $C(1)$ bedraagt 2^{n-1} als $s > 1$ is; twee der singuliere krommen zijn dan dubbelkrommen, waarvan er een die in het oneindige zijn kan; van de 2^{n-1} snijpunten dier dubbelkrommen liggen er 2^{n-2} op de eene en 2^{n-2} op de andere kromme van aanraking, waaruit de volledige kromme van aanraking $C(1)$ bestaat.

Het aantal gemeenschappelijke punten $P(2, 1, 1)$ van drie singuliere krommen $C(2)$, $C(1)$ en $C'(1)$ bedraagt 2^n ; ieder der deelen van $C(1)$ snijdt ieder der deelen van $C'(1)$ in 2^{n-2} punten; deze 4 groepen van 2^{n-2} punten liggen alle op de dubbelkromme $C(2)^1$.

36. Aantal singuliere puntgroepen.

De punten $P(i, j, k)$, die snijpunten zijn van een zelfde drietal singuliere krommen²⁾, zullen we een *singuliere puntgroep* noemen. De vraag naar het aantal puntgroepen $P(r+s, s+q, q+r)$ is dezelfde als die naar het aantal manieren, waarop we uit n gegeven lijnen drie groepen van q , r en s lijnen kunnen aanwijzen. We vinden dus:

Het aantal singuliere puntgroepen $P(r+s, s+q, q+r)$ bedraagt:

$$\frac{n!}{q!r!s!t!} \text{ als } q, r \text{ en } s \text{ alle verschillen,}$$

$$\frac{1}{2} \frac{n!}{q!r!s!t!} \text{ als twee der drie getallen } q, r, s \text{ gelijk zijn en}$$

$$\frac{1}{6} \frac{n!}{q!r!s!t!} \text{ als } q=r=s \text{ is;}$$

hierin is $t=n-q-r-s$.

Het totale aantal singuliere puntgroepen is dus

$$\frac{1}{6} \sum \frac{n!}{q!r!s!t!},$$

waarbij men aan q , r , s en t alle mogelijke geheele, niet-negatieve waarden (ook die waarvoor $q > r$ is, enz.) moet toekennen, waarvoor $q+r+s+t=n$ is, terwijl geen twee der drie getallen q , r , s nul mogen zijn. Nu is:

$$\frac{1}{6} \sum \frac{n!}{q!r!s!t!} = \frac{1}{6} (1+1+1+1)^n - \frac{1}{2} (1+1)^n + \frac{1}{3} = \frac{1}{3} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1),$$

dus:

Het totale aantal singuliere puntgroepen bedraagt

$$\frac{1}{3} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1).$$

¹⁾ Dit geldt ook voor $n=2$; alleen is dan $C(2)$ de dubbelkromme in het oneindige.

²⁾ De beide krommen van aanraking met twee toegevoegd onbestaanbare singuliere raakvlakken als één kromme beschouwd.

37. Verschillende soorten van singuliere puntgroepen.

Puntgroepen, waardoor een volledige kromme van aanraking en twee dubbelkrommen gaan, krijgt men voor $q = 0$, $r = 1$ en $s > 1$. Het aantal dier puntgroepen bedraagt dus

$$\sum_{s=2}^{s=n-1} \frac{n!}{s! n-s-1!} = n \sum_{s=2}^{s=n-1} (n-1)_s = n(2^{n-1} - n),$$

waaronder n puntgroepen, waarvoor een der dubbelkrommen de dubbelkromme in het oneindige is.

Het aantal puntgroepen, waardoor twee krommen van aanraking gaan ($q = 0$, $r = s = 1$), bedraagt

$$\frac{1}{2} n(n-1);$$

de derde singuliere kromme is een dubbelkromme, die voor $n > 2$ in het eindige ligt.

Voor het aantal puntgroepen, waardoor drie dubbelkrommen gaan, blijft dus over

$$\begin{aligned} \frac{1}{3} (2^n - 1)(2^{n-1} - 1) - n(2^{n-1} - n) - \frac{1}{2} n(n-1) = \\ = \frac{1}{3} (2^{2n-1} + 1) - \frac{1}{2} (n+1)(2^n - n). \end{aligned}$$

Hieronder zijn

$$2^{n-1} - n - 1$$

puntgroepen, waarvoor een der dubbelkrommen in het oneindige ligt ($q = t = 0$), zoodat er

$$\frac{1}{3} (2^{2n-1} + 1) - \frac{1}{2} (n+2)(2^n - n - 1)$$

in het eindige gelegen puntgroepen, waardoor drie dubbelkrommen gaan, overblijven. Zulk een puntgroep bestaat uit 2^n punten, behalve als $q = 0$ is, in welk geval de puntgroep uit 2^{n-2} punten bestaat; voor het aantal groepen van 2^{n-2} punten vindt men

$$\frac{1}{2} (3^n + 3) - \frac{1}{2} (n+3)(2^n - n),$$

zoodat er voor het aantal groepen van 2^n punten overblijft:

$$\frac{1}{6} (2^{2n} - 1) - \frac{1}{2} (3^n - 2^n).$$

Het resultaat is dus:

De uit 2^n punten bestaande singuliere puntgroepen zijn:

$\frac{1}{6} (2^{2n} - 1) - \frac{1}{2} (3^n - 2^n)$ in het eindige gelegen puntgroepen, waardoor drie dubbelkrommen gaan ($q > 0$)^{1) 2)};

¹⁾ Als steeds is $q \leq r \leq s$ ondersteld.

²⁾ Voor $n = 2$ levert dit naar behooren nul.

$\frac{1}{2}n(n-1)$ in het eindige gelegen puntgroepen, waardoor twee volledige krommen van aanraking en een dubbelkromme gaan ($q=0$, $r=s=1$)¹⁾.

De uit 2^{n-1} punten bestaande singuliere puntgroepen zijn:

$n(2^{n-1}-n-1)$ in het eindige gelegen puntgroepen, waardoor een volledige kromme van aanraking en twee dubbelkrommen gaan ($q=0$, $r=1$, $1 < s < n-1$)²⁾;

n in het oneindige gelegen puntgroepen, waardoor (behalve de dubbelkromme in het oneindige) een volledige kromme van aanraking en een in het eindige gelegen dubbelkromme gaan ($q=0$, $r=1$, $s=n-1$)³⁾.

De uit 2^{n-2} punten bestaande singuliere puntgroepen zijn:

$\frac{1}{2}(3^n+3)-\frac{1}{2}(n+3)(2^n-n)$ in het eindige gelegen puntgroepen, waardoor drie dubbelkrommen gaan ($q=0$, $r>1$, $s<n-r$)⁴⁾;

$2^{n-1}-n-1$ in het oneindige gelegen puntgroepen, waardoor (behalve de dubbelkromme in het oneindige) twee in het eindige gelegen dubbelkrommen gaan ($q=0$, $r>1$, $s=n-r$)²⁾.

38. Aantallen punten P_1 , P_2 , P_3 , P_4 en P_5 .

Uit het voorgaande volgt:

Het oppervlak heeft de volgende snijpunten van drie singuliere krommen:

$2^{n-3}\left\{\frac{4}{3}(2^{2n}-1)-3^{n+1}-(n-1)2^n+n^2+3n+3\right\}$ in het eindige buiten de singuliere raakvlakken gelegen drievoudige punten P_1 (zie n°. 27);

$2^{n-2}(2^{n-1}-n-1)$ in het oneindige buiten de singuliere raakvlakken gelegen viervoudige punten P_2 (zie n°. 28);

$n2^{n-1}(2^{n-1}-n-1)$ in slechts één singulier raakvlak in het eindige gelegen uniplanaire tweebladige dubbelpunten P_3 (zie n°. 29);

$n2^{n-1}$ op de lijnen in het oneindige der singuliere raakvlakken gelegen uniplanaire tweebladige dubbelpunten P_4 (zie n°. 30);

$n(n-1)2^{n-1}$ op de snijlijnen van niet-toegevoegde singuliere raakvlakken gelegen uniplanaire eenbladige dubbelpunten P_5 (zie n°. 31)⁵⁾;

dus te zamen $2^{n-3}\left\{\frac{4}{3}(2^{2n}-1)-3^{n+1}+(n+2)2^n+n^2-3n+1\right\}$ snijpunten P van drie singuliere krommen.

Hierin is $n > 2$ ondersteld.

¹⁾ Voor $n=2$ ligt de puntgroep in het oneindige.

²⁾ Voor $n=3$ levert dit naar behooren nul.

³⁾ Hiervoor moet $n > 2$ zijn.

⁴⁾ Voor $n=3$ of $n=4$ levert dit naar behooren nul.

⁵⁾ Op ieder der $2n(n-1)$ snijlijnen van door verschillende gegeven lijnen gaande isotrope vlakken liggen 2^{n-2} punten P_5 ; in ieder singulier raakvlak liggen $(n-1)2^{n-1}$ punten P_5 .

39. Aantallen punten P gelegen op de singuliere krommen.

We willen nu nagaan hoeveel der 5 soorten van punten P op een singuliere kromme $C(i)$ gelegen zijn. *Het totale aantal op $C(i)$ gelegen singuliere puntgroepen bedraagt $2^{n-1} - 1$.* Immers er zijn $2^n - 1$ singuliere krommen; nu wordt $C(i)$ door ieder der $2^n - 2$ andere singuliere krommen volgens een singuliere puntgroep gesneden, waarbij echter telkens twee singuliere krommen dezelfde puntgroep opleveren. Gaat men nu verder na hoe deze puntgroepen over de verschillende soorten van singuliere punten verdeeld zijn, dan komt men tot het volgende resultaat:

Op een dubbelkromme $C(i)$ liggen als $2 < i < n - 1$ is:

$$2^n (2^{n-1} - 2^{n-i} - 2^{i-1} + 1) + 2^{n-2} (2^{i-1} + 2^{n-i} - n - 3) = \\ = 2^{n-2} (2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n-i} - 3 \cdot 2^{i-1} - n + 1) \text{ punten } P_1,$$

2^{n-2} punten P_2 ,

$n 2^{n-1}$ punten P_3 en

geen punten P_4 en P_5 ,

dus te zamen $2^{n-2} (2^{n+1} - 3 \cdot 2^{n-i} - 3 \cdot 2^{i-1} + n + 2)$ punten P .

Op een dubbelkromme $C(2)$ liggen als $n > 3$ is:

$$2^n (2^{n-2} - 1) + 2^{n-2} (2^{n-2} - n) = 2^{n-2} (5 \cdot 2^{n-2} - n - 4) \text{ punten } P_1,$$

2^{n-2} punten P_2 ,

$(n - 2) 2^{n-1}$ punten P_3 ,

2^n punten P_5 en

geen punten P_4 ,

dus te zamen $2^{n-2} (5 \cdot 2^{n-2} + n - 3)$ punten P .

Op een dubbelkromme $C(n-1)$ liggen als $n > 3$ is:

$$2^{n-2} (5 \cdot 2^{n-2} - n - 4) \text{ punten } P_1,$$

$(n - 1) 2^{n-1}$ punten P_3 ,

2^{n-1} punten P_4 en

geen punten P_2 en P_5 ,

dus te zamen $2^{n-2} (5 \cdot 2^{n-2} + n - 4)$ punten P .

Op de dubbelkromme in het oneindige liggen:

$$2^{n-2} (2^{n-1} - n - 1) \text{ punten } P_2,$$

$n 2^{n-1}$ punten P_4 en

geen punten P_1 , P_3 en P_5 ,

dus te zamen $2^{n-2} (2^{n-1} + n - 1)$ punten P .

Op een afzonderlijke kromme van aanraking liggen:

$$2^{n-2} (2^{n-1} - n - 1) \text{ punten } P_3,$$

2^{n-2} punten P_4 ,

$(n - 1) 2^{n-1}$ punten P_5 en

geen punten P_1 en P_2 ,

dus te zamen $2^{n-2} (2^{n-1} + n - 2)$ punten P .

Voor het geval, dat $n = 3$ is, worden de resultaten gewijzigd en aangegeven door het volgende diagram:

		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P
		8	0	0	12	24	44
$C(1)$	6	0	0	0	2	8	10
$C(2)$	3	8	0	0	4	8	20
$C(3)$	1	0	0	0	12	0	12

Hierin staat uitgedrukt, dat er op ieder der 6 afzonderlijke krommen van aanraking 2 der 12 punten P_4 , 8 der 24 punten P_5 en geen punten P_1 , P_2 en P_3 liggen, dus te zamen 10 der 44 punten P , enz.

Uit de algemeene resultaten vindt men voor $n = 4$ het diagram:

		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P
		160	12	96	32	96	396
$C(1)$	8	0	0	12	4	24	40
$C(2)$	6	48	4	16	0	16	84
$C(3)$	4	48	0	24	8	0	80
$C(4)$	1	0	12	0	32	0	44

en voor $n = 5$:

		P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P
		2200	80	800	80	320	3480
$C(1)$	10	0	0	80	8	64	152
$C(2)$	10	248	8	48	0	32	336
$C(3)$	10	288	8	80	0	0	376
$C(4)$	5	248	0	64	16	0	328
$C(5)$	1	0	80	0	80	0	160

40. Wijziging der voorgaande resultaten voor $C = 0$.

De voorgaande resultaten ondergaan een wijziging als $C = 0$ is. De singuliere krommen zijn in n°. 24 voor dat geval opgesomd. Drie singuliere krommen, die tot vergelijkingen hebben:

$$T + Q = 0, \quad R = S,$$

$$T + R = 0, \quad S = Q,$$

$$T + S = 0, \quad Q = R,$$

hebben een singuliere puntgroep gemeen. Hierbij kunnen we zonder beperking $t \leq q \leq r \leq s$ onderstellen. Daar geen twee dier getallen nul kunnen zijn, sluit dit in, dat q, r en $s > 0$ zijn.

Voor gegeven waarden van q, r, s en t bedraagt het aantal singuliere puntgroepen $\frac{n!}{q!r!s!t!}$ als q, r, s en t alle verschillen; zijn 2, 3, 4 of 2 paar dier getallen gelijk, dan moet dit aantal door 2!, 3!, 4! of 2! 2! gedeeld worden.

Is $t > 0$, dan zijn de drie singuliere krommen dubbelkrommen. Door een snijpunt dier drie krommen gaan drie bladen van het oppervlak behoorend bij de teekencombinaties:

$$-Q + R + S + T = 0,$$

$$Q - R + S + T = 0,$$

$$Q + R - S + T = 0.$$

De drie dubbelkrommen leveren een uit 2^{n-1} punten bestaande singuliere puntgroep. Het aantal dier singuliere puntgroepen (voor alle van nul verschillende waarden van q, r, s en t) bedraagt

$$\frac{1}{24}(4^n - 4 \cdot 3^n + 6 \cdot 2^n - 4).$$

Dit geeft $\frac{1}{3}(2^{2n-2} - 3^n + 3 \cdot 2^{n-1} - 1)2^{n-2}$ singuliere punten, waar zich dezelfde bijzonderheden voordoen als bij de in n°. 27 beschouwde punten en die we daarom ook nu punten P_1 zullen noemen.

Is $t = 0$ en $q > 1$ (dus ook r en $s > 1$), dan zijn de singuliere krommen eveneens dubbelkrommen, maar deze hebben dubbelpunten in de snijpunten. Door zulk een snijpunt gaan vier bladen van het oppervlak, nl.:

$$Q + R + S = 0,$$

$$Q - R + S = 0,$$

$$Q + R - S = 0,$$

$$Q - R - S = 0.$$

De drie dubbelkrommen hebben nu 2^{n-3} snijpunten. Het aantal van zulke singuliere puntgroepen bedraagt

$$\frac{1}{2}\{3^{n-1} - (n+2)2^{n-1} + n^2 + n + 1\}.$$

Dit geeft $\{3^{n-1} - (n+2)2^{n-1} + n^2 + n + 1\}2^{n-4}$ singuliere punten P_2 (vergelijk n°. 28)¹⁾.

Is $t=0$, $q=1$, $r>1$ (dus ook $s>1$), dan is een der singuliere krommen een volledige kromme van aanraking, de beide andere zijn dubbelkrommen. In de 2^{n-2} snijpunten vertoonen zich dezelfde bijzonderheden als de in n°. 29 beschrevene. Het aantal van zulke singuliere puntgroepen bedraagt:

$$n(2^{n-2} - n).$$

Dit geeft $n(2^{n-2} - n)2^{n-2}$ singuliere punten P_3 .

Is $t=0$, $q=r=1$, $s>1$, dan zijn twee der singuliere krommen volledige krommen van aanraking, de derde is een op een hyperbolische paraboloïde gelegen dubbelkromme. In de 2^{n-1} snijpunten vertoonen zich dezelfde bijzonderheden als in n°. 31. Het aantal dier singuliere puntgroepen bedraagt $\frac{1}{2}n(n-1)$, te zamen bevattende $n(n-1)2^{n-2}$ singuliere punten P_5 ²⁾.

Omtrent de singuliere krommen heeft men:

Een afzonderlijke kromme van aanraking heeft de $2(n-1)$ snijlijnen van haar vlak met de niet-toegevoegde singuliere raakvlakken tot 2^{n-3} -voudige raaklijnen. De kromme heeft $(2^{n-2} - n)2^{n-3}$ dubbelpunten (snijpunten met dubbelkrommen) en is dus van het geslacht $(n-3)2^{n-3} + 1$ en van de klasse $(n-1)2^{n-2}$.

Een dubbelkromme $C(i)$ heeft voor $2 < i < n-2$ de $2n$ singuliere raakvlakken tot 2^{n-3} -voudige raakvlakken en verder $(2^{i-1} + 2^{n-i-1} - n - 2)2^{n-3}$ dubbelpunten.

Een dubbelkromme $C(2)$ — of, wat op hetzelfde neerkomt, een dubbelkromme $C(n-2)$ — heeft $2(n-2)$ singuliere raakvlakken tot 2^{n-3} -voudige raakvlakken. De $(n-2)2^{n-2}$ raakpunten zijn uniplanaire twebladige punten der dubbelkromme. De 2^{n-1} snijpunten met de vier overige singuliere raakvlakken zijn uniplanaire eenbladige punten der dubbelkromme. Verder heeft de dubbelkromme $(2^{n-3} - n + 1)2^{n-3}$ dubbelpunten.

Omtrent de op de singuliere krommen liggende singuliere punten heeft men:

¹⁾ In tegenstelling met de punten P_2 van n°. 28 liggen deze singuliere punten in het eindige.

²⁾ Het geval $t=0$, $q=r=s=1$ kan zich natuurlijk alleen voordoen als $n=3$ is. Het oppervlak is dan van den 4den graad met zes kegelsneeraakvlakken en 14 kegelpunten. Van deze 14 kegelpunten liggen er 6 op de gegeven lijnen, terwijl de 8 overige telkens snijpunten van 3 niet-toegevoegde kegelsneden van aanraking zijn.

Op een afzonderlijk kromme van aanraking liggen:

$(2^{n-2} - n)2^{n-3}$ punten P_3 ,

$(n - 1)2^{n-2}$ punten P_5 ,

geen punten P_1 en P_2 .

Op een dubbelkromme $C(i)$ ($2 < i < n - 2$) liggen:

$(2^{i-1} - 1)(2^{n-i-1} - 1)2^{n-1}$ punten P_1 ,

$(2^{i-1} + 2^{n-i-1} - n - 2)2^{n-3}$ punten P_2 ,

$n2^{n-2}$ punten P_3 ,

geen punten P_5 .

Op een dubbelkromme $C(2)$ liggen:

$(2^{n-3} - 1)2^{n-1}$ punten P_1 ,

$(2^{n-3} - n + 1)2^{n-3}$ punten P_2 ,

$(n - 2)2^{n-2}$ punten P_3 ,

2^{n-1} punten P_5 .

§ 7. GRAADVERLAGING VAN HET OPPERVAK VOOR n GEGEVEN LIJNEN EN VAN DAT VOOR n GEGEVEN PUNTEN.

41. Voorwaarde voor graadverlaging.

Terwijl het oppervlak, waarmede we ons hebben beziggehouden, in het algemeen van den graad 2^n is, kan het door bijzondere ligging der gegeven lijnen van lagere graad worden doordat het vlak in het oneindige zich eens of meerdere malen van het oppervlak afsplitst.

De vergelijking van het oppervlak kan (zie n°. 13) in den volgende irrationalen vorm geschreven worden:

$$\sqrt{u_1 u_1'} + \sqrt{u_2 u_2'} + \dots + \sqrt{u_n u_n'} - C\tau = 0,$$

waar de vierde coördinaat τ (die voor in het eindige gelegen punten $= 1$ is) ingevoerd is om de vergelijking homogeen te maken, zoodat u_1, u_1', u_2 enz. homogene lineaire functies van x, y, z en τ zijn.

Graadverlaging of afsplitsing van het oneindig verre vlak $\tau = 0$ heeft alleen dan plaats als minstens een der 2^n irrationale factoren, die door vermenigvuldiging de rationale vergelijking opleveren, ideaal door τ deelbaar is ¹⁾.

¹⁾ In navolging van CAYLEY (l. c. art. 28—37) zeggen we dat een irrationale factor ideaal door τ^k deelbaar is, als de ontwikkeling naar opklimmende machten van τ met τ^k begint. Zijn de verschillende irrationale factoren ideaal deelbaar door τ^{k_1}, τ^{k_2} , enz. dan begint de ontwikkeling van het rationale product met $\tau^{k_1 + k_2 + \dots}$, zoodat het rationale product *werkelijk* door $\tau^{k_1 + k_2 + \dots}$ deelbaar is.

Stel nu

$$u_i = w_i + c_i \tau, \quad u_i' = w_i' + c_i' \tau,$$

waarin c_i en c_i' constanten en w_i en w_i' lineaire homogene functies van x , y en z zijn. Dan is:

$$\begin{aligned} \sqrt{u_i u_i'} &= \sqrt{\{w_i w_i' + \tau(w_i c_i' + w_i' c_i + c_i c_i' \tau)\}} = \\ &= \sqrt{w_i w_i'} \left\{ 1 + \frac{\tau(w_i c_i' + w_i' c_i + c_i c_i' \tau)}{2 w_i w_i'} - \frac{\tau^2(w_i c_i' + w_i' c_i + c_i c_i' \tau)^2}{8 (w_i w_i')^2} + \dots \right\} = \\ &= \sqrt{w_i w_i'} \left\{ 1 + \frac{w_i c_i' + w_i' c_i}{2 w_i w_i'} \tau - \frac{1}{8} \left(\frac{w_i c_i' - w_i' c_i}{w_i w_i'} \right)^2 \tau^2 + \right. \\ &\quad \left. + \frac{(w_i c_i' + w_i' c_i)(w_i c_i' - w_i' c_i)^2}{16 w_i^3 w_i'^3} \tau^3 - \dots \right\}. \end{aligned}$$

In den irrationalen factor is dus de term, die vrij van τ is:

$$\sqrt{w_1 w_1'} + \sqrt{w_2 w_2'} + \dots + \sqrt{w_n w_n'}.$$

Deze term moet identisch nul zijn, wil de irrationale factor door τ deelbaar zijn. Dit kan alleen als de termen $\sqrt{w_1 w_1'}$, $\sqrt{w_2 w_2'}$, enz. elkaar twee aan twee opheffen, zoodat *graadverlaging van het oppervlak alleen bij een even aantal gegeven lijnen voorkomen kan*. Voor dit opheffen is verder noodig, dat b.v. w_1 en w_1' identisch gelijk zijn aan w_2 en w_2' , verder w_3 en w_3' aan w_4 en w_4' , enz. Dit beteekent, dat de gegeven lijnen l_1 en l_2 evenwijdig zijn, evenzoo l_3 en l_4 , enz. Is dit het geval dan bestaat de deelbaarheid door τ voor die irrationale factoren, waarbij aan $\sqrt{w_1 w_1'}$ en $\sqrt{w_2 w_2'}$, aan $\sqrt{w_3 w_3'}$ en $\sqrt{w_4 w_4'}$, enz. tegengestelde teekens zijn toegekend. We vinden dus:

*Het oppervlak wordt dan en alleen dan van lagere dan den 2^n graad als de gegeven lijnen twee aan twee evenwijdig zijn*¹⁾.

Opgemerkt zij, dat als er *graadverlaging* intreedt de kromme in het oneindige van het oppervlak (dat overblijft na afsplitsing van het vlak in het oneindige) *geen dubbelkromme meer is en niet meer van de waarde van C onafhankelijk*. Wel vormen nu nog steeds de termen, die C niet bevatten, een zuiver vierkant, maar tengevolge van de *graadverlaging* worden de termen van den hoogsten graad niet uitsluitend door deze C niet bevattende termen opgeleverd.

¹⁾ Dit geldt ook voor $C=0$. We beschouwen het oppervlak dan nog steeds als van den graad 2^n , nl. als uit twee samenvallende stukken bestaande.

42. Bedrag der graadverlaging.

Voor het aantal teekencombinaties, waarbij de irrationale factor door τ deelbaar wordt, vindt men $2^{\frac{1}{2}n}$. Dit aantal wordt echter nog grooter wanneer verschillende paren evenwijdige lijnen ook onderling evenwijdig zijn. Onderstel nu dat de gegeven lijnen uit m groepen ieder van een even aantal evenwijdige lijnen bestaan en wel zoo dat die groepen $2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m$ lijnen bevatten (waarbij natuurlijk ondersteld kan worden, dat de lijnen van de eene groep niet evenwijdig zijn aan die van de andere), dan vindt men gemakkelijk voor het aantal teekencombinaties, waarbij de wortelvormen elkaar voor $\tau = 0$ twee aan twee opheffen:

$$(2p_1)_{p_1} (2p_2)_{p_2} \dots (2p_m)_{p_m},$$

zoodat de rationale vergelijking door even zoovele factoren τ deelbaar is.

Is $C \neq 0$, dan kan geen enkele irrationale factor door een hogere macht van τ deelbaar worden, daar de term $C\tau$ niet tegen de irrationale termen kan wegvallen. We vinden dus:

Vormen de gegeven lijnen m groepen van $2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m$ onderling evenwijdige lijnen, dan bedraagt de graadvermindering van het oppervlak

$$(2p_1)_{p_1} (2p_2)_{p_2} \dots (2p_m)_{p_m}.$$

Is $C > 0$, dan kan die graadvermindering niet meer bedragen.

43. Voorwaarde voor verdere graadverlaging als $C = 0$ is.

Is echter $C = 0$, dan kan een nog verdere graadverlaging intreden doordat een der irrationale factoren door τ^2 deelbaar wordt. Hiervoor is noodig, dat voor ieder der m groepen van gegeven lijnen met bepaalde teekencombinatie, waarbij echter even veel positieve als negatieve teekens gekozen moeten worden, identisch voldaan is aan de vergelijking

$$\Sigma \pm (w_i c'_i + w'_i c_i) = 0,$$

dus voldaan is aan

$$\Sigma \pm c_i = 0, \quad \Sigma \pm c'_i = 0.$$

Men moet dus b.v. hebben:

$$\begin{aligned} c_1 &+ c_2 &+ \dots &+ c_{p_1} &= c_{p_1+1} &+ c_{p_1+2} &+ \dots &+ c_{2p_1} &, \\ c'_1 &+ c'_2 &+ \dots &+ c'_{p_1} &= c'_{p_1+1} &+ c'_{p_1+2} &+ \dots &+ c'_{2p_1} &, \\ c_{2p_1+1} &+ c_{2p_1+2} &+ \dots &+ c_{2p_1+p_2} &= c_{2p_1+p_2+1} &+ c_{2p_1+p_2+2} &+ \dots &+ c_{2p_1+2p_2} &, \\ &&&&&&&&&\text{enz.} \end{aligned}$$

Deze voorwaarden drukken uit, dat de evenwijdige gegeven lijnen van een zelfde groep *evenwichtsligging* vertoonen, waarmee we bedoelen, *dat het mogelijk is langs die evenwijdige lijnen gelijke krachten* (in de eene of de andere richting) *zoo te leggen, dat ze evenwicht maken*. Natuurlijk kan het ook voorkomen, dat een groep van gegeven lijnen op meer dan één wijze evenwichtsligging vertoont, waarvoor dan noodig is dat de groep in twee deelen te splitsen is, zoodanig dat zich bij ieder deel afzonderlijk evenwichtsligging voordoet.

Voor $C=0$ treedt dan en alleen dan een nog verder graadverlaging dan de in n°. 42 opgegevene in, als ieder der m groepen van onderling evenwijdige lijnen evenwichtsligging vertoont.

44. Het analoge oppervlak voor n gegeven punten.

Terwijl graadverlaging bij het oppervlak, dat we in dit hoofdstuk bestudeerd hebben, een bijzonderheid is, is het voor n even regel bij het volgende vraagstuk:

De m. pl. te onderzoeken der punten, waarvan de som der afstanden tot n gegeven punten een standvastige waarde C heeft.

Voor dit oppervlak, waarmee we ons in het verdere gedeelte van deze paragraaf zullen bezighouden, krijgt men soortgelijke resultaten, waarom we daarop niet verder ingaan. Alleen zij het volgende opgemerkt:

Het oppervlak heeft eenige bij verschillende teekencombinaties behorende bladen, die elkaar doorsnijden kunnen, maar die in het algemeen geen bestaansbare singulariteiten vertoonen. Gaat het oppervlak door een gegeven punt, dan heeft het in dat punt een kegelpunt¹⁾, waar bij verschillende teekencombinaties behorende bladen samenhangen; de raakkegel in zulk een kegelpunt is van omwenteling²⁾.

¹⁾ Dit blijkt o. a. uit de vergelijking van het oppervlak. Deze is in irrationalen vorm

$$\sqrt{v_1} + \sqrt{v_2} + \dots + \sqrt{v_n} = C,$$

waarin $v_1=0$, $v_2=0$, enz. bolkegels zijn. In rationalen vorm luidt de vergelijking

$$v_1 f(v_1 v_2 \dots v_n C) + \{g(v_1 v_2 \dots v_n C)\}^2 = 0,$$

waaruit men onmiddellijk ziet, dat, als de top van den bolkegel $v_1=0$ op het oppervlak ligt, dit punt dubbelpunt van het oppervlak is.

²⁾ Dit blijkt weer gemakkelijk uit de vergelijking. Daaruit ziet men, dat de bolkegel $v_1=0$ het oppervlak volgens een kromme aanraakt, nl. de doorsnede van dien bolkegel met het oppervlak $g(v_1 v_2 \dots v_n C)=0$. Deze kromme van aanraking heeft in den top van den bolkegel een dubbelpunt, waaruit blijkt, dat de raakkegel in dien top den bolkegel volgens twee beschrijvende lijnen aanraakt en dus een omwentelingskegel is.

Tot hetzelfde resultaat komt men meer meetkundig aldus. Zijn P_1, P_2, \dots, P_n de gegeven punten, Q een willekeurig punt en $QP_i=r_i$. We verplaatsen Q naar een

Voor voldoende groote waarde van C heeft het oppervlak een convex gesloten blad, waar de som der absolute afstanden gelijk aan C is ¹⁾. Dit blad ontwikkelt zich voor een zekere waarde van C uit een punt, dat zoowel in een der gegeven punten als daarbuiten kan liggen ²⁾ ³⁾. Neemt C toe dan breidt dit blad zich uit om telkens bij het passeeren van een gegeven punt een kegelpunt te krijgen en weer te verliezen.

45. Aan de n punten worden coëfficiënten toegekend.

Voor n oneven is het in het vorige nummer beschouwde oppervlak, evenals dat voor n gegeven lijnen, van den graad 2^n . Is n even dan heeft er echter, ook in het algemeen, graadverlaging plaats. Voor n gegeven lijnen kan men zich van graadverlaging

naburig punt Q' en noemen de verplaatsing Δl , hare componenten Δx , Δy , Δz en de vermeerdering, die r_i daardoor ondergaat, Δr_i . Zijn x , y , z de coördinaten van Q , x_i , y_i , z_i die van P_i , dan is als Q van P_i verschilt bij eerste benadering:

$$\Delta r_i = \frac{\Delta x (x - x_i) + \Delta y (y - y_i) + \Delta z (z - z_i)}{r_i} = \frac{[\Delta x (x - x_i)]}{r_i},$$

terwijl als Q met b.v. P_1 samenvalt

$$\Delta r_1 = \Delta l = \sqrt{(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2}$$

is. Liggen Q en Q' beide op het oppervlak, dan is

$$\pm \Delta r_1 \pm \Delta r_2 \pm \dots \pm \Delta r_n = 0,$$

dus als Q in P_1 valt:

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = \left\{ \left[\frac{(x_2 - x_1) \Delta x}{r_2} \right] \pm \dots \pm \left[\frac{(x_n - x_1) \Delta x}{r_n} \right] \right\}^2.$$

Dit stelt met Δx , Δy en Δz als loopende coördinaten de vergelijking van den raakkegel in P_1 voor. Die verg. is van den vorm

$$(\Delta x)^2 + (\Delta y)^2 + (\Delta z)^2 = (L \Delta x + M \Delta y + N \Delta z)^2,$$

waaruit weer blijkt, dat de raakkegel den bolcirkel tweemaal aanraakt. Zijn L , M en N de componenten van een vector, die een grootte D heeft en een hoek α met de verplaatsing Δl maakt, dan gaat de vergelijking van den raakkegel over in

$$D \cos \alpha = 1.$$

Hieruit blijkt, dat de raakkegel onbestaanbaar is voor $D < 1$. Is $D > 1$, dan krijgt men een bestaanbaren kegel met den vector D als omwentelingsas en een halven tophoek

$$B\gamma \cos \frac{1}{D}.$$

¹⁾ Dit blijkt weer onmiddellijk door het verloop der functie S (som der absolute afstanden) op een willekeurige rechte lijn te beschouwen. S is in één punt van die lijn minimaal.

²⁾ Zie b.v. R. STURM, Ueber den Punkt kleinster Entfernungssumme von gegebenen Punkten, *Crelle's Journal Bd.* 97 (1884), S. 49—61.

³⁾ Uit het verloop der functie S op een willekeurige rechte blijkt onmiddellijk, dat S in slechts één punt een minimale waarde heeft en daar alleen dan een stationaire waarde heeft als dit minimum-punt buiten de gegeven punten valt.

steeds rekenschap geven door die lijnen van uit den algemeenen tot den bijzonderen stand te laten naderen, waarbij dan eenige bladen van het oppervlak naar het oneindige verschuiven.

Voor n gegeven punten P_1, \dots, P_n kan men de graadverlaging niet op die wijze zichtbaar maken, maar daartoe moet men de vraag uitbreiden door aan de gegeven punten coëfficiënten f_i toe te voegen om er de afstanden tot die punten mede te vermenigvuldigen. Daardoor wordt afsplitsing van het oneindig verre vlak tot een bijzonderheid, die zich alleen voor doet als er tusschen de coëfficiënten een bepaalde betrekking bestaat.

De irrationale vergelijking van het oppervlak luidt:

$$f_1 \sqrt{v_1} + f_2 \sqrt{v_2} + \dots + f_n \sqrt{v_n} = C\tau.$$

Daar de bolkegels $v_1 = 0$, $v_2 = 0$, enz. alle dezelfde doorsnede met het vlak in het oneindige ($\tau = 0$) hebben, bestaat de mogelijkheid, dat de coëfficiënten f_i zoodanige waarden hebben, dat een der irrationale factoren der rationale vergelijking voor $\tau = 0$ een identiteit wordt.

Om dit nader te onderzoeken ontwikkelen we $\sqrt{v_i}$ naar opklimmende machten van τ . Zijn x_i, y_i, z_i de coördinaten van P_i , dan is

$$v_i = [x^2] - 2[xx_i]\tau + [x_i^2]\tau^2,$$

dus;

$$\sqrt{v_i} = \sqrt{[x^2]} \left\{ 1 - \frac{[xx_i]}{[x^2]}\tau + \frac{[x^2](y_i^2 + z_i^2) - 2[yzy_i z_i]}{2[x^2]^2}\tau^2 - \dots \right\}.$$

Een der irrationale factoren wordt door τ deelbaar, als voor de een of andere teekencombinatie voldaan is aan:

$$\pm f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n = 0.$$

Is dit het geval, dan is aan die vergelijking nog voldaan als men alle teekens omkeert, waaruit blijkt dat het aantal ideaal door τ deelbare irrationale factoren steeds even is.

Voor den coëfficiënt van τ in de ontwikkeling van een irrationalen factor vindt men:

$$\frac{1}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \Sigma \pm f_i (xx_i + yy_i + zz_i) - C.$$

Deze coëfficiënt kan als $C \neq 0$ is niet identisch verdwijnen, zoodat dan geen der irrationale factoren ideaal door een hoogere dan de eerste macht van τ deelbaar zijn kan. Hieruit volgt:

De m. pl. der punten, waarvan de som der met f_i vermenigvuldigde afstanden tot n gegeven punten P_i ($i = 1, 2, \dots, n$) een standvastige waarde C heeft, is voor $C \neq 0$ in het algemeen een oppervlak van den graad 2^n . Voor bijzondere waarden der coëfficiënten splitst zich het vlak in het oneindige een even aantal malen van het oppervlak af (m. a. w. wordt de graad van het oppervlak met een even bedrag verlaagd), en wel zooveel maal als het aantal teekencombinaties bedraagt, waarbij aan de vergelijking

$$\pm f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n = 0$$

voldaan is.

46. Graadverlaging als de coëfficiënten de eenheid zijn.

Is, zooals we in het volgende weer onderstellen,

$$f_1 = f_2 = \dots = f_n = 1,$$

dan kan aan de vergelijking

$$\pm f_1 \pm f_2 \pm \dots \pm f_n = 0$$

alleen voldaan worden als n even is en wel door evenveel $+$ als $-$ teekens te kiezen, dus op $(n)_{\frac{1}{2}n}$ manieren. Hieruit volgt:

De m. pl. der punten, waarvan de som der afstanden tot n gegeven punten standvastig is, is voor n oneven een oppervlak van den graad 2^n met dubbelkromme in het oneindige, voor n even een oppervlak van den graad $2^n - (n)_{\frac{1}{2}n}$ zonder dubbelkromme in het oneindige. Een nog verdere graadverlaging kan als $C \neq 0$ is niet intreden.

47. Verdere graadverlaging voor $C = 0$.

Is $C = 0$, dan is het oppervlak voor n oneven van den graad 2^{n-1} en voor n even in het algemeen van den graad $2^{n-1} - \frac{1}{2}(n)_{\frac{1}{2}n}$. Voor het intreden van nog verdere graadverlaging is noodig, dat minstens een der irrationale factoren door τ^2 deelbaar is, hetgeen het geval is als voor evenveel $+$ als $-$ teekens identisch voldaan is aan

$$\Sigma \pm (xx_i + yy_i + zz_i) = 0.$$

Uit deze vergelijking volgt:

$$\Sigma \pm x_i = 0, \quad \Sigma \pm y_i = 0, \quad \Sigma \pm z_i = 0,$$

waarbij de teekencombinaties in de drie vergelijkingen dezelfde zijn. Deze vergelijkingen drukken uit, dat de gegeven punten *evenwichtsligging* vertoonen, d. w. z. dat door die punten getrokken

evenwijdige lijnen voor iedere richting dier lijnen evenwichtsligging bezitten (zie n°. 43) of dat men die punten zoo in twee even talrijke groepen kan verdeelen, dat beide groepen hetzelfde zwaartepunt hebben. We vinden dus:

De m. pl. der punten, waarvan de algebraische som der afstanden tot n gegeven punten (n even) nul is, is alleen dan van lageren dan van den graad

$$2^{n-1} - \frac{1}{2} (n)_{\frac{1}{2}n}$$

als de gegeven punten evenwichtsligging vertoonen.

Natuurlijk kan het ook voorkomen, dat de gegeven punten op meer dan een wijze evenwichtsligging bezitten.

48. Bijzonder geval $n = 4$.

Zijn (zooals steeds ondersteld wordt) de gegeven punten alle verschillend, dan kan evenwichtsligging dier punten eerst optreden als n minstens 4 is. Voor $n = 4$ is daarvoor noodig, dat de vier gegeven punten de hoekpunten van een parallelogram vormen. Is $C = 0$, dan zijn er van de acht irrationale factoren twee door τ en één door τ^2 deelbaar, zoodat het oppervlak van den graad $2^3 - 2 - 2 = 4$ wordt¹⁾.

Het oppervlak kan van geen lageren dan den 4^{den} graad worden. Immers daartoe zou noodig zijn, dat de door τ^2 deelbare irrationale factor door τ^3 deelbaar wordt. Nu is de coëfficiënt van τ^2 in de ontwikkeling van dien factor

$$\Sigma \pm \frac{[x^2(y_i^2 + z_i^2)] - 2[yz y_i z_i]}{2[x^2]^{3/2}}.$$

Deze coëfficiënt is alleen dan identisch (d. w. z. voor alle waarden van x , y en z) nul als men heeft

$$\Sigma \pm x_i^2 = 0, \text{ enz.}, \quad \Sigma \pm y_i z_i = 0, \text{ enz.},$$

waarbij de teekens (twee $+$ en twee $-$ teekens) dezelfde moeten zijn als in de vergelijkingen $\Sigma \pm x_i = 0$, enz. Nu kan men het assenstelsel zoo kiezen, dat men heeft

$$z_1 = z_2 = z_3 = z_4 = 0, \quad y_1 = y_2 = 0, \quad x_2 = -x_1, \quad x_4 = -x_3, \quad y_4 = -y_3.$$

Dan is

$$x_1 + x_2 - x_3 - x_4 = 0, \text{ enz.},$$

¹⁾ Is het parallelogram een rechthoek, dan bestaat dit oppervlak uit de beide vlakken, die de zijden van den rechthoek loodrecht halveeren, ieder vlak tweemaal geteld.

zoodat de vergelijkingen, die het nul zijn van den coëfficiënt van τ^2 uitdrukken, overgaan in:

$$x_1^2 - x_3^2 = 0, \quad y_3^2 = 0, \quad x_3 y_3 = 0,$$

waaraan als de vier gegeven punten verschillen niet kan worden voldaan. We vinden dus:

Is $n = 4$ en $C = 0$, dan is het oppervlak in het algemeen van den 5^{den} graad, echter van den 4^{den} graad als de vier gegeven punten de hoekpunten van een parallelogram zijn, terwijl het oppervlak niet van nog lageren graad worden kan.

§ 8. GRAADVERLAGING DER VLAKKE DOORSNEDEN VAN HET OPPERVLAK VOOR n GEGEVEN LIJNEN.

49. Voorwaarde voor afsplitsing van een plat vlak.

We keeren weer tot ons oppervlak voor n gegeven lijnen terug en onderstellen, dat de in de vorige paragraaf besproken bijzonderheid van graadverlaging zich niet voordoet, dus *dat de verschillend onderstelde gegeven lijnen niet twee aan twee evenwijdig zijn.*

In n°. 22 hebben we voor de irrationale vergelijking van een vlakke doorsnede van het oppervlak geschreven

$$\sqrt{s_1 s'_1} + \sqrt{s_2 s'_2} + \dots + \sqrt{s_n s'_n} = C.$$

Deze verg. kan alleen dan een identiteit worden als de rationale termen tegen elkaar wegvallen en de irrationale termen elkaar twee aan twee opheffen.

De rationale termen worden, behalve door C , opgeleverd door de gegeven lijnen, die in het vlak V der doorsnede liggen. Is het aantal dier lijnen i (waarin natuurlijk ook $i = 0$ zijn kan), dan wordt de vergelijking der doorsnede

$$\pm s_1 \pm s_2 \pm \dots \pm s_i + \sqrt{s_{i+1} s'_{i+1}} + \\ + \sqrt{s_{i+2} s'_{i+2}} + \dots + \sqrt{s_n s'_n} = C,$$

waarin s_{i+1} en s'_{i+1} niet identiek gelijk zijn, evenmin s_{i+2} en s'_{i+2} , enz. Natuurlijk kan het ook voorkomen, dat de rationale termen elkaar met verschillende teekencombinaties der eerste i termen opheffen.

De irrationale termen heffen elkaar twee aan twee op (b.v. de $i + 1^{\text{ste}}$ en de $i + 2^{\text{de}}$ term, de $i + 3^{\text{de}}$ en de $i + 4^{\text{de}}$ term, enz.) als de lijnen s_{i+1} en s'_{i+1} identisch zijn met de lijnen s_{i+2} en s'_{i+2} , de lijnen s_{i+3} en s'_{i+3} identisch met s_{i+4} en s'_{i+4} , enz.,

iets dat alleen het geval is als de $n - i$ ($n - i$ even) niet in V gelegen gegeven lijnen twee aan twee symmetrisch ten opzichte van V liggen. Het wegvallen der irrationale termen heeft dan voor $2^{\frac{1}{2}(n-i)}$ verschillende teekencombinaties dier termen plaats.

We vinden dus:

Het oppervlak kan alleen dan een plat vlak bevatten als de gegeven lijnen, die niet in dit vlak liggen, twee aan twee symmetrisch ten opzichte van dit vlak verlopen. Bovendien is dan echter noodig, dat voor ieder punt van het vlak voor minstens één teekencombinatie de algebraïsche som der afstanden tot de i in het vlak gelegen gegeven lijnen de waarde C heeft.

50. Voorwaarde voor graadverlaging eener vlakke doorsnede.

Zonder onbepaald te worden kan de doorsnede met het vlak V ook van lageren dan den 2^n den graad worden. Dan zal bij ieder aan V evenwijdig vlak graadverlaging voorkomen, zoodat we bij het opzoeken der voorwaarde voor die graadverlaging steeds het vlak V zoo kunnen aannemen, dat het niet door een gegeven lijn gaat en de vergelijking dus behalve C geen rationale termen bevat.

Maken we nu weer de vergelijking der doorsnede door invoering van τ homogeen, dan heeft er graadverlaging plaats als minstens een der 2^n irrationale factoren voor $\tau = 0$ een identiteit wordt. Wanneer het vlak V aan i gegeven lijnen evenwijdig loopt, worden i wortelvormen voor $\tau = 0$ rationaal. Onderstel nu weer, dat die rationale termen elkaar bij een bepaalde teekencombinatie opheffen. De overige termen heffen elkaar voor $\tau = 0$ op als de lijnen s_{i+1} en s'_{i+1} evenwijdig zijn aan de lijnen s_{i+2} en s'_{i+2} , enz.

Hieruit leidt men gemakkelijk af:

De doorsnede van het oppervlak met een vlak V ondergaat een graadverlaging, m. a. w. bevat een of meer malen de lijn in het oneindige van dit vlak, als langs de aan V evenwijdig loopende gegeven lijnen eenheidsvectoren gelegd kunnen worden, waarvan de som nul is, en de overige gegeven lijnen twee aan twee parallel zijn of antiparallel ten opzichte van V . Met antiparallel ten opzichte van V is bedoeld, dat de eene lijn evenwijdig is aan het spiegelbeeld van de andere in V .

51. Bijzonder geval $n = 2$.

Aan de bovengevonden voorwaarde is, behalve voor $n = 2$, alleen bij bijzondere ligging der gegeven lijnen voldaan.

Is echter $n = 2$, dan zijn er steeds twee onderling loodrechte vlakstellingen (evenwijdig aan den kortsten afstand der gegeven lijnen) aan te wijzen, waarvoor de voorwaarde vervuld is, *zoodat voor $n = 2$ de dubbelkegelsnede in het oneindige in twee rechten ontgaat, waarvan de bijbehorende vlakstellingen loodrecht op elkaar staan*¹⁾; deze dubbellijnen in het oneindige zijn diagonalen van de volledige vierzijde gevormd door de raaklijnen uit de punten in het oneindige der gegeven lijnen aan den bolcirkel getrokken.

Voor iedere waarde van n , die > 2 is, kan de dubbelkromme in het oneindige een of meer rechten bevatten, waarvoor echter steeds een bijzondere ligging der gegeven lijnen noodig is. In n°. 53 komen we daarop voor de gevallen $n = 3$ en $n = 4$ terug.

52. Bedrag der graadverlaging eener vlakke doorsnede.

We willen nu het bedrag der graadverlaging van de doorsnede met een vlak V opzoeken. Hierbij zullen we alleen het oog hebben op die graadverlaging, die voor *alle* aan V evenwijdige vlakken bestaat, m. a. w. *we bepalen de multipliciteit van de lijn in het oneindige van V als lijn van het oppervlak.*

We kunnen dus weer onderstellen, dat V niet door een gegeven lijn gaat, maar aan i gegeven lijnen evenwijdig loopt. De irrationale verg. der doorsnede wordt dan:

$$\sqrt{s_1 s'_1} + \sqrt{s_2 s'_2} + \dots + \sqrt{s_i s'_i} + \sqrt{s_{i+1} s'_{i+1}} + \\ + \sqrt{s_{i+2} s'_{i+2}} + \dots + \sqrt{s_n s'_n} = C\tau,$$

waarbij

$$\begin{array}{ccccccc} s_1 & \text{evenwijdig aan} & s'_1, & & & & \\ s_2 & & & & s'_2, & & \\ & \dots\dots\dots & & & & & \\ s_i & & & & s'_i, & & \\ s_{i+1} & \text{en} & s'_{i+1} & & s_{i+2} & \text{en} & s'_{i+2}, \\ s_{i+3} & \text{en} & s'_{i+3} & & s_{i+4} & \text{en} & s'_{i+4}, \\ & \dots\dots\dots & & & & & \\ s_{n-1} & \text{en} & s'_{n-1} & & s_n & \text{en} & s'_n. \end{array}$$

Stellen we nu evenals in n°. 41 $s_k = w_k + c_k \tau$ en $s'_k = w'_k + c'_k \tau$ (waarin w_k met w'_k identisch is voor $k = 1, 2, \dots, i$, terwijl w_{i+1} en w'_{i+1} identisch zijn met w_{i+2} en w'_{i+2} , enz.), dan blijkt,

¹⁾ Dit ziet men ook direct door op te merken, dat de kromme in het oneindige niet verandert als men de gegeven lijnen evenwijdig verschuift totdat ze elkaar snijden en $C = 0$ neemt.

dat een der irrationale factoren alleen dan ideaal door τ deelbaar is als met de een of andere teekencombinatie identisch voldaan is aan

$$\pm w_1 \pm w_2 \pm \dots \pm w_i = 0.$$

Stel dat dit voor j teekencombinaties het geval is (j even).

De $n - i$ niet aan V evenwijdige gegeven lijnen zijn, als er graadverlaging intreedt, twee aan twee parallel of antiparallel ten opzichte van V , of algemeener die $n - i$ lijnen vervallen in m groepen van $2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m$ lijnen, zoodanig dat de lijnen van een zelfde groep parallel of antiparallel zijn, de lijnen van verschillende groepen echter niet. In dat geval bestaat de deelbaarheid door τ voor

$$j(2p_1)_{p_1}(2p_2)_{p_2} \dots (2p_m)_{p_m}$$

irrationale factoren.

Wanneer nu de gegeven lijnen geen andere bijzonderheden in ligging vertoonen dan die welke op de richting dier lijnen betrekking hebben, dus geen bijzonderheden, waarbij de grootheden c_k en c'_k betrokken zijn, is geen der irrationale factoren door een hoogere dan de eerste macht van τ deelbaar, zoodat de rationale verg. door

$$\tau^j (2p_1)_{p_1} \dots (2p_m)_{p_m}$$

en door geen hoogere macht van τ deelbaar wordt. Ditzelfde geldt natuurlijk voor ieder vlak evenwijdig aan V , zoodat we vinden:

Kan men op j manieren langs de i aan een vlak V evenwijdige gegeven lijnen eenheidsvectoren zoo leggen, dat hun som nul is¹⁾, en vervallen de $n - i$ niet aan V evenwijdige gegeven lijnen in m groepen van $2p_1, 2p_2, \dots, 2p_m$ parallele of antiparallele lijnen, dan is de lijn in het oneindige van het vlak V een

$$j(2p_1)_{p_1}(2p_2)_{p_2} \dots (2p_m)_{p_m} \tau^j$$

voudige lijn van het oppervlak. Hierbij is ondersteld, dat de gegeven lijnen alleen wat hun richting aangaat een bijzondere ligging vertoonen.

53. Toepassing op de gevallen $n = 3$ en $n = 4$.

Uit het voorgaande volgt:

Voor $n = 3$ bevat de dubbelkromme in het oneindige een rechte als de gegeven lijnen evenwijdig aan een zelfde vlak loopen en zich

¹⁾ Is $i > 0$, dan is j steeds even. Is $i = 0$, dan moet men echter $j = 1$ stellen.

daarop als een gelijkzijdige driehoek projecteeren. De lijn in het oneindige van dit vlak is dan een *dubbellijn* van het oppervlak¹⁾.

Verder vindt men:

*Voor $n = 4$ bevat de dubbelkromme in het oneindige alleen dan een rechte, als òf twee der gegeven lijnen parallel zijn òf de gegeven lijnen twee aan twee antiparallel zijn ten opzichte van een zelfde vlak*²⁾.

In het eerste geval behooren tot de dubbelkromme in het oneindige de lijnen in het oneindige der beide onderling loodrechte vlakken ten opzichte waarvan de twee niet evenwijdige gegeven lijnen antiparallel zijn. Deze lijnen in het oneindige zijn *viervoudige lijnen* van het oppervlak.

Een bijzonder geval van het voorgaande heeft men als drie gegeven lijnen evenwijdig zijn. Er zijn dan twee vlakstellingen ten opzichte waarvan die lijnen antiparallel zijn aan de vierde gegeven lijn; de beide lijnen in het oneindige dier vlakstellingen zijn *zesvoudige lijnen* van het oppervlak.

In het tweede geval is de lijn in het oneindige van het vlak, ten opzichte waarvan de gegeven lijnen twee aan twee antiparallel zijn, een *viervoudige lijn* van het oppervlak. Maken de beide paren gegeven lijnen gelijke hoeken met dat vlak, dan vertoonen ze nog ten opzichte van een ander vlak (loodrecht op het eerste) antiparallele ligging en is ook de lijn in het oneindige van dat vlak een *viervoudige lijn* van het oppervlak.

54. Voorwaarde voor verdere graadverlaging der doorsnede.

Het kan gebeuren, dat de gegeven lijnen in hunne onderlinge ligging nog andere bijzonderheden vertoonen, dan die welke alleen op de richtingen dier lijnen betrekking hebben, waardoor een of meer irrationale factoren door een hoogere dan de eerste macht van τ deelbaar worden en dus de doorsnede een nog verdere graadverlaging ondergaat. Daarvoor is noodig, dat behalve aan

¹⁾ Hieruit volgt echter niet, dat de lijn in het oneindige van het vlak V , waaraan de gegeven lijnen evenwijdig loopen, slechts éénmaal tot de dubbelkromme in het oneindige behoort. Integendeel bestaat deze dubbelkromme uit den bolcirkel en de dubbel-tellende lijn in het oneindige van V (zooals zich gemakkelijk uit de rationale verg. van het oppervlak laat aantoonen); de beide bladen door de lijn in het oneindige van V raken het oneindig verre vlak aan.

²⁾ Een derde geval is nog dat de gegeven lijnen twee aan twee evenwijdig loopen. Dan wordt echter de graad van het geheele oppervlak verlaagd, iets dat we in deze § hebben uitgesloten.

$$\pm w_1 \pm w_2 \pm \dots \pm w_i = 0$$

voldaan is aan

$$\begin{aligned} & \pm \frac{1}{2}(c_1 + c'_1) \pm \frac{1}{2}(c_2 + c'_2) \pm \dots \pm \frac{1}{2}(c_i + c'_i) = C^1), \\ & c_{i+1} + c_{i+2} + \dots + c_{i+p_i} - c_{i+p_i+1} - c_{i+p_i+2} - \dots - c_{i+2p_i} = 0^2), \\ & c'_{i+1} + c'_{i+2} + \dots + c'_{i+p_i} - c'_{i+p_i+1} - c'_{i+p_i+2} - \dots - c'_{i+2p_i} = 0^2), \\ & \text{enz.} \end{aligned}$$

De eerste van deze vergelijkingen drukt in verband met $\pm w_1 \pm \dots \pm w_i = 0$ uit, dat de som der met bepaalde teekens genomen afstanden tot de projecties op het vlak V der aan V evenwijdige gegeven lijnen voor ieder punt van V de gegeven waarde C heeft; is deze voorwaarde voor een vlak V vervuld, dan is ze ook vervuld voor ieder vlak evenwijdig aan V .

De beide laatste vergelijkingen drukken uit, dat de evenwijdige lijnen $s_{i+1}, s_{i+2}, \dots, s_{i+2p_i}$ en evenzoo de evenwijdige lijnen $s'_{i+1}, s'_{i+2}, \dots, s'_{i+2p_i}$ *evenwichtsligging* hebben (zie n°. 43), terwijl hetzelfde gelden moet voor iedere groep van parallelle of antiparallele gegeven lijnen, wil er een ideaal door τ^2 deelbare irrationale factor zijn.

We willen nu nagaan wanneer de deelbaarheid door τ^2 bij evenwijdige verschuiving van het vlak V blijft bestaan, dus wanneer de multipliciteit der lijn in het oneindige van V als lijn van het oppervlak een verhooging ondergaat. Daartoe merken we op, dat de evenwijdige lijnen $s_{i+1}, \dots, s_{i+2p_i}$ de doorsneden zijn van V met isotrope vlakken door een groep van parallelle en antiparallele gegeven lijnen en dus in twee groepen A en B verdeeld kunnen worden, zoodanig dat de lijnen s van de groep A uit parallelle gegeven lijnen ontstaan en evenzoo de lijnen s van de groep B , terwijl de gegeven lijnen van de groep A antiparallel zijn aan die van de groep B .

Bij evenwijdige verschuiving van het vlak V blijft nu de onderlinge ligging van de lijnen s van de groep A dezelfde en evenzoo de onderlinge ligging van de lijnen s van de groep B , zoodat alleen de eene groep van lijnen s verschoven wordt ten opzichte van de andere groep. Bij die verschuiving blijft de evenwichtsligging der lijnen $s_{i+1}, \dots, s_{i+2p_i}$ alleen dan bestaan als de groepen A en B ieder afzonderlijk evenwichtsligging vertoonen. Daar ditzelfde

¹⁾ De teekens moeten hier dezelfde genomen worden als in de vergelijking

$$\pm w_1 \pm w_2 \pm \dots \pm w_i = 0.$$

²⁾ In deze vergelijkingen kunnen de $+$ en $-$ teekens ook anders verdeeld zijn, maar natuurlijk zoo, dat er evenveel $+$ als $-$ teekens voorkomen.

ook geldt voor de beide groepen, waarin de lijnen $s'_{i+1}, \dots, s'_{i+2p_i}$ vervallen, moeten de gegeven lijnen van de groep A evenwichts-
ligging vertoonen en evenzoo die van de groep B .

We vinden dus:

*Is aan de in n°. 52 genoemde voorwaarde voldaan, dan is de
lijn in het oneindige van het vlak V dan en alleen dan een meer dan*

$$j(2p_1)_{p_1}(2p_2)_{p_2} \dots (2p_m)_{p_m} -$$

*vondige lijn van het oppervlak als voor minstens één teekencombinatie de
algebraïsche som der afstanden tot de projecties op V der aan V even-
wijdige gegeven lijnen voor ieder punt van V de waarde C heeft en
ieder der m groepen, waarin de overige gegeven lijnen vervallen, uit twee
stelsels van onderling everwijdige lijnen in evenwichtsligging bestaat ¹⁾.*

55. Toepassingen.

Wanneer we, zooals we in deze paragraaf steeds gedaan hebben, de gevallen uitsluiten, waarin de graad van het geheele oppervlak verlaagd wordt, kan de in het vorige nummer beschouwde bijzonderheid zich niet voordoen als $n = 2$ is.

Is $n = 3$, dan doet zich die bijzonderheid voor als de drie gegeven lijnen evenwijdig aan een zelfde vlak V loopen en zich daarop als een gelijkzijdige driehoek met een hoogte C projecteeren. Terwijl bij willekeurige hoogte van dien gelijkzijdigen driehoek de lijn in het oneindige van V dubbellijn is, wordt ze voor een hoogte C een *drievoudige* lijn van het oppervlak.

Daar voor evenwichtsligging minstens vier evenwijdige lijnen noodig zijn, kan zich de verdere graadverlaging der doorsnede van n°. 54 niet voordoen als $n = 4$ is. Voor grootere waarden van n doet die graadverlaging zich o. a. voor als alle gegeven lijnen evenwijdig aan een zelfde vlak V loopen en de algebraïsche som der afstanden tot de projecties der gegeven lijnen op V voor ieder punt van V de waarde C heeft ²⁾. Voor $n = 5, 6$ of 8 is dit het eenige geval van verdere graadverlaging. Voor $n = 7$ heeft men verdere graadverlaging ook als drie gegeven lijnen evenwijdig aan een vlak V loopen en zich daarop als een gelijkzijdige driehoek met een hoogte C projecteeren en de vier andere gegeven lijnen de opstaande ribben van een parallelopipedum vormen; in dat geval is de lijn in het oneindige van V een *14-voudige* lijn van het oppervlak (voor willekeurige hoogte van den gelijkzijdigen driehoek een $2(4)_2 = 12$ -voudige lijn).

¹⁾ Hier moet men natuurlijk ook het geval inbegrijpen, dat een groep slechts uit één stelsel van evenwijdige lijnen in evenwichtsligging bestaat.

²⁾ Voor $n = 4$ wordt dan de graad van het geheele oppervlak verlaagd.

§ 9. HET OPPERVLAK VOOR TWEE GEGEVEN LIJNEN.

56. Algemeene beschouwingen.

Bij het oppervlak, dat de m. pl. is der punten, waarvan de som der afstanden tot n gegeven lijnen standvastig is, vormt het geval $n = 2$ in sommige opzichten een uitzondering, waarom we dit geval nog eens afzonderlijk en wat uitvoeriger willen behandelen.

Zij $2k$ de kortste afstand der niet evenwijdig onderstelde gegeven lijnen l_1 en l_2 en zijn K_1 en K_2 de eindpunten van den kortsten afstand. Dien kortsten afstand nemen we als z -as van een recht-hoekig assenstelsel, terwijl we de x - en y -as door het midden O van den kortsten afstand nemen gelijke hoeken makend met de gegeven lijnen. Is 2α de hoek tusschen de gegeven lijnen, dan hebben die tot vergelijkingen

$$l_1 \begin{cases} z = k, \\ y = x \operatorname{tg} \alpha, \end{cases} \quad l_2 \begin{cases} z = -k, \\ y = -x \operatorname{tg} \alpha. \end{cases}$$

De vergelijking van het oppervlak is dan

$$\sqrt{(x \sin \alpha - y \cos \alpha)^2 + (z - k)^2} + \sqrt{(x \sin \alpha + y \cos \alpha)^2 + (z + k)^2} = C,$$

of in rationalen vorm

$$4(xy \sin 2\alpha + 2zk)^2 - 4C^2(x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha + z^2 + k^2) + C^4 = 0.$$

Het oppervlak is van den 4^{den} graad met de lijnen in het oneindige van yz - en xz -vlak als dubbellijnen. Het heeft op ieder der gegeven lijnen twee kegelpunten, D_1 en D'_1 op l_1 , D_2 en D'_2 op l_2 . De coördinaten van D_1 zijn

$$x = \frac{\sqrt{C^2 - 4k^2}}{2 \sin \alpha}, \quad y = \frac{\sqrt{C^2 - 4k^2}}{2 \cos \alpha}, \quad z = k,$$

enz. De kegelpunten op l_1 en l_2 zijn op afstanden $\frac{\sqrt{C^2 - 4k^2}}{\sin 2\alpha}$ van K_1 resp. K_2 verwijderd. Zij zijn bestaanbaar als $C > 2k$, onbestaanbaar als $C < 2k$ is. Dit alles is ook meetkundig gemakkelijk in te zien.

Door l_1 gaan twee isotrope kegelsneeraakvlakken u_1 en u'_1 , die het oppervlak volgens door D_1 en D'_1 gaande kegelsneden aanraken; evenzoo door l_2 de kegelsneeraakvlakken u_2 en u'_2 . De aan den bolcirkel rakende lijnen in het oneindige dier vlakken noemen we m_1 , m'_1 , m_2 en m'_2 . De dubbellijnen in het oneindige van het oppervlak zijn de bestaanbare verbindingslijnen der onbe-

staanbare punten $(m_1 m_2)$ en $(m'_1 m'_2)$ en der punten $(m_1 m'_2)$ en $(m'_1 m_2)$. Deze vier punten zijn klempunten der dubbellijnen. Door ieder dier klempunten, b.v. door $(m_1 m_2)$, gaan twee kegelsneden van aanraking, die in het klempunt dezelfde raaklijn hebben, nl. de snijlijn der vlakken u_1 en u_2 ; in het klempunt zijn de twee raakvlakken tot het vlak door de lijn $(u_1 u_2)$ en de dubbellijn samengevallen.

57. Het oppervlak is een bijzonder KUMMER'sch oppervlak.

De vergelijking van een oppervlak van KUMMER met 16 kegelpunten en 16 kegelsneeraakvlakken kan in den volgenden vorm gebracht worden:

$$\{X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 + X_4^2 + 2a(X_2 X_3 + X_1 X_4) + 2b(X_3 X_1 + X_2 X_4) + 2c(X_1 X_2 + X_3 X_4)\}^2 = 16(a^2 + b^2 + c^2 - 2abc - 1)X_1 X_2 X_3 X_4,$$

waarin X_1, X_2, X_3 en X_4 lineaire functies der coördinaten zijn. De vier vlakken $X_i = 0$, enz. vormen een GÖPEL'sch tetraeder van kegelsneeraakvlakken, d. w. z. een tetraeder, waarvan de hoekpunten *geen* kegelpunten zijn.

Bij ons oppervlak vormen de kegelsneeraakvlakken u_1, u'_1, u_2 en u'_2 zulk een tetraeder van GÖPEL, zooals uit het volgende blijkt. De irrationale verg. van het oppervlak luidt

$$\sqrt{u_1 u'_1} + \sqrt{u_2 u'_2} = C,$$

waarin:

$$\begin{aligned} u_1 &= x \sin \alpha - y \cos \alpha + i(z - k), \\ u'_1 &= x \sin \alpha - y \cos \alpha - i(z - k), \\ u_2 &= x \sin \alpha + y \cos \alpha + i(z + k), \\ u'_2 &= x \sin \alpha + y \cos \alpha - i(z + k). \end{aligned}$$

In rationalen vorm wordt die verg.:

$$(u_1 u'_1 + u_2 u'_2 - C^2)^2 = 4 u_1 u'_1 u_2 u'_2.$$

Daar

$$u_1 - u'_1 - u_2 + u'_2 = -4ik,$$

dus

$$C^2 = -\frac{C^2}{16k^2}(u_1 - u'_1 - u_2 + u'_2)^2$$

¹⁾ Zie b.v. PASCAL-SCHEPP, Repertorium der höh. Math. II, S. 300.

is, kan voor de vergelijking van het oppervlak ook geschreven worden

$$\{u_1 u'_1 + u_2 u'_2 + \frac{C^2}{16 k^2} (u_1 - u'_1 - u_2 + u'_2)^2\}^2 = 4 u_1 u'_1 u_2 u'_2,$$

of

$$\{u_1^2 + u'_1{}^2 + u_2^2 + u'_2{}^2 + 2 \frac{8 k^2 - C^2}{C^2} (u_1 u'_1 + u_2 u'_2) - \\ - 2(u_1 u_2 + u'_1 u'_2) + 2(u_1 u'_2 + u'_1 u_2)\}^2 = 16 \cdot \frac{64 k^4}{C^4} u_1 u'_1 u_2 u'_2,$$

welke vergelijking den vorm heeft van die van een KUMMER'sch oppervlak op een GÖPEL'sch viervlak van kegelsneeraakvlakken.

Men kan de rationale verg. van het oppervlak ook aldus schrijven:

$$(2 x^2 \sin^2 \alpha + 2 y^2 \cos^2 \alpha + 2 z^2 + 2 k^2 - C^2)^2 = 4 u_1 u'_1 u_2 u'_2,$$

waaruit blijkt, dat de kegelsneden van aanraking met de vier isotrope kegelsneeraakvlakken op de ellipsoïde

$$2 x^2 \sin^2 \alpha + 2 y^2 \cos^2 \alpha + 2 z^2 = C^2 - 2 k^2$$

gelegen zijn.

58. De 16 kegelsneeraakvlakken van het oppervlak.

Ons oppervlak is een *bijzonder* geval van het oppervlak van KUMMER, daar het in het bezit is van *twee snijdende dubbelrechten*. Dientengevolge zijn de 16 kegelpunten en de 16 kegelsneeraakvlakken niet alle verschillend.

De 16 kegelsneeraakvlakken zijn gemakkelijk aan te wijzen. Vier daarvan zijn enkelvoudig, nl. de isotrope vlakken u_1 , u'_1 , u_2 en u'_2 door de gegeven lijnen.

Vier andere kegelsneeraakvlakken zijn dubbel, nl. de vlakken evenwijdig aan de z -as (dus door het snijpunt E der beide dubbellijnen in het oneindige) gaande door twee op verschillende gegeven lijnen gelegen kegelpunten. Door ieder der dubbellijnen gaan twee zulke vlakken. Zij $D_1 D_2 E$ een vlak gaande door de kegelpunten D_1 en D_2 en de lijn in het oneindige van het yz -vlak. De doorsnede met dit vlak bestaat vooreerst uit de dubbeltellende lijn in het oneindige en verder uit een kegelsnede, die in D_1 en D_2 dubbelpunten moet hebben en dus niets anders zijn kan dan de dubbeltellende lijn $D_1 D_2$ ¹⁾. We vinden dus:

¹⁾ Dit is gemakkelijk algebraïsch te verifieeren met behulp van de in n°. 56 neergeschreven rationale verg. van het oppervlak. De verg. van het vlak $D_1 D_2 E$ is

$$x = \frac{\sqrt{C^2 - 4 k^2}}{2 \sin \alpha}$$

en die der doorsnede

$$(2 k y \cos \alpha - z \sqrt{C^2 - 4 k^2})^2 = 0.$$

De vier verbindingslijnen van op verschillende gegeven lijnen gelegen kegelpunten liggen op ons oppervlak, dat langs die lijnen door vlakken evenwijdig aan den kortsten afstand der gegeven lijnen wordt aangeraakt; de vier lijnen vormen een scheeven vierhoek, die zich op een vlak loodrecht op den kortsten afstand als een rechthoek projecteert, die voor $C > 2k$ bestaanbaar, voor $C < 2k$ onbestaanbaar is.

De doorsnede met het vlak $D_1 D_2 E$ degenereert in twee samenvallende kegelsneden, zoodat dit vlak kegelsneeraakvlak is. De kegelsnede van aanraking degenereert in $D_1 D_2$ en de lijn in het oneindige. Alleen langs eerstgenoemde lijn heeft eigenlijke aanraking plaats, terwijl de tweede lijn dubbellijn is. Dientengevolge telt het vlak $D_1 D_2 E$ voor twee kegelsneeraakvlakken¹⁾.

Ten slotte is nog het vlak in het oneindige een viermaal tellend kegelsneeraakvlak. Immers daar de kegelsnede van aanraking uit twee dubbellijnen bestaat en de aanraking dus overal oneigenlijk is telt het vlak $2 \cdot 2 = 4$ -maal²⁾.

Op deze wijze vindt men naar behooren $4 \cdot 1 + 4 \cdot 2 + 1 \cdot 4 = 16$ kegelsneeraakvlakken.

59. De 16 kegelpunten van het oppervlak.

Het oppervlak heeft vier gewone kegelpunten, nl. de punten D_1, D'_1, D_2 en D'_2 der gegeven lijnen.

De overige kegelpunten zijn te zoeken op de dubbellijnen in het oneindige. Om een eindig aantal kegelpunten te verkrijgen moet men een kegelpunt niet definieeren als een punt, waarin iedere er door heen gaande lijn twee snijpunten werpt (aan welke definitie ieder punt van een dubbellijn voldoet), maar als reciprook staande tegenover een vlak, waarvan de doorsnede met het oppervlak in twee samenvallende kegelsneden ontaardt³⁾, dus als een punt, waarvoor de omhullende van door dat punt gaande raakvlakken aan het oppervlak (een kegel van de 4^{de} klasse) in twee samenvallende kegels van de 2^{de} klasse ontaardt.

Een willekeurig punt van een dubbelrechte, als reciprook tegen-

¹⁾ Immers iedere lijn van een kegelsneeraakvlak is een dubbelraaklijn van het oppervlak. Bij een lijn van het vlak $D_1 D_2 E$ wordt een der beide aanrakingen oneigenlijk uitgevoerd, waarom die lijn voor twee samenvallende dubbelraaklijnen telt.

²⁾ Iedere lijn van het vlak in het oneindige voert twee oneigenlijke aanrakingen aan het oppervlak uit en telt dus voor vier samenvallende dubbelraaklijnen.

³⁾ Zulke vlakken kunnen, als het oppervlak niet uit twee samenvallende gedeelten bestaat, slechts in eindig aantal aanwezig zijn. Ditzelfde geldt natuurlijk voor de punten, die er reciprook tegenover staan.

over een willekeurig vlak door een dubbelrechte staande, voldoet aan die definitie niet. Wel echter een klem punt van een dubbellijn, als reciprook staande tegenover een kegelsneeraakvlak door een dubbellijn, waaruit tevens blijkt, dat ieder der vier klem punten voor twee kegelpunten te tellen is¹⁾; de omhullende der raakvlakken door een klem punt van een dubbellijn degenereert in de dubbeltellende dubbellijn en de dubbeltellende snijlijn van niet-toegevoegde isotrope kegelsneeraakvlakken, die door het klem punt gaat. Laatstgenoemde snijlijn staat reciprook tegenover een op het oppervlak gelegen verbindingslijn van twee kegelpunten. Evenals die vier verbindingslijnen vormen ook de vier snijlijnen van niet-toegevoegde isotrope kegelsneeraakvlakken een scheeven vierhoek.

Het snijpunt E der beide dubbellijnen is een uniplanair twee-bladig punt van het oppervlak. De beide bladen door dit punt raken aan het oneindig verre vlak en doorsnijden elkaar volgens de beide dubbellijnen. Het punt is dus zoowel voor de eene als voor de andere dubbellijn een uniplanair punt en dus als twee samenvallende klem punten en bijgevolg als *vier* samenvallende kegelpunten te beschouwen; dit laatste is daarmede in overeenstemming, dat het snijpunt der dubbellijnen reciprook tegenover het vlak door de twee dubbellijnen staat. De omhullende der raakvlakken door E degenereert in de beide dubbeltellende dubbellijnen.

Naar behooren vinden we dus voor het aantal kegelpunten $4.1 + 4.2 + 1.4 = 16$.

60. De configuratie der singuliere punten en vlakken.

Bij een algemeen KUMMER'sch oppervlak vormen de 16 singuliere punten en de 16 singuliere vlakken een 16_6 configuratie. Door ieder punt gaan 6 vlakken, in ieder vlak liggen 6 punten; de 6 singuliere punten in een singulier vlak liggen op de kegelsnede van aanraking; de 6 singuliere vlakken door een singulier punt raken aan den kwadratischen raakkegel in dat punt.

Bij ons oppervlak is de configuratie blijkens het voorgaande aldus gewijzigd:

Van de 16 kegelpunten liggen er 2 op ieder der gegeven lijnen, terwijl er in ieder der 4 klem punten van de dubbellijnen 2 kegelpunten en in het snijpunt der dubbellijnen 4 kegelpunten samenvallen. Van de 16 kegelsneeraakvlakken gaan er 2 door ieder

¹⁾ In n°. 63 en 65 kan men zien hoe twee kegelpunten zich tot een klem punt vereenigen.

der gegeven lijnen, nl. de door die lijnen gaande isotrope vlakken, die de dubbellijnen in de klempunten snijden en wel zoo, dat door ieder klempunt 2 van die vlakken gaan; door ieder der dubbellijnen gaan 2 dubbeltellende kegelsneeraakvlakken, die de gegeven lijnen in kegelpunten snijden en weer zoo, dat door ieder kegelpunt 2 van die vlakken gaan; de 4 overige kegelsneeraakvlakken vallen in het vlak in het oneindige samen.

Hieruit blijkt, dat ons oppervlak een met zich zelf reciproke specialiseering van het oppervlak van KUMMER en dus van de vierde klasse is.

61. Rechte lijnen van het oppervlak.

In n°. 58 is gebleken, dat de vier verbindingslijnen van op verschillende gegeven lijnen gelegen kegelpunten geheel op het oppervlak liggen. Men bewijst gemakkelijk, dat als $C \neq 0$ is deze vier lijnen en de dubbellijnen in het oneindige de eenige rechte lijnen van het oppervlak zijn.

Immers op een willekeurige rechte lijn l voldoen de op het oppervlak gelegen punten aan de vergelijking:

$$\sqrt{s_1 s'_1} + \sqrt{s_2 s'_2} = C,$$

waarin s_1 , s'_1 , s_2 en s'_2 de met bepaalde coëfficiënten vermenigvuldigde afstanden tot de snijpunten van l met de door l_1 en l_2 gaande isotrope vlakken zijn. Wil l op het oppervlak liggen, dan moet bovenstaande verg. op l een identiteit zijn, waarvoor noodig is dat de beide wortelvormen rationaal zijn. Nu is $s_1 s'_1$ alleen dan een zuiver vierkant als de punten $s_1 = 0$ en $s'_1 = 0$ samenvallen, dus als l de gegeven lijn l_1 snijdt. Evenzoo moet l de lijn l_2 snijden.

Maakt nu l met l_1 een hoek α_1 en met l_2 een hoek α_2 en zijn b_1 en b_2 de afstanden van een willekeurige punt van l tot de snijpunten van l met l_1 en l_2 , dan moet, wil l geheel op het oppervlak liggen, identisch voldaan zijn aan

$$\pm b_1 \sin \alpha_1 \pm b_2 \sin \alpha_2 = C.$$

Hiervoor is in de eerste plaats noodig, dat $\alpha_1 = \alpha_2$ is, hetgeen alleen het geval is als het snijpunt van l met l_1 even ver van K_1 verwijderd is als het snijpunt van l met l_2 van K_2 , waarin K_1 en K_2 de uiteinden van den kortsten afstand van l_1 en l_2 voorstellen. Bovendien moet het snijpunt van l met l_1 (l_2) op een afstand C van l_2 (l_1) verwijderd zijn, dus in een kegelpunt van

l_1 (l_2) vallen, waaruit blijkt dat l de verbindingslijn van twee kegelpunten zijn moet.

62. Raakkegels der kegelpunten.

In n°. 18 is gebleken, dat de raakkegel in een op een gegeven lijn liggend kegelpunt door een vlak loodrecht op die gegeven lijn gesneden wordt volgens een kegelsnede, die een harer brandpunten op de gegeven lijn heeft.

Voor het oppervlak voor $n = 2$ bewijst men gemakkelijk, dat als de kegelpunten bestaanbaar zijn de doorsnede van den raakkegel met een vlak loodrecht op de gegeven lijn door het kegelpunt een ellips is. Immers is D_1 het beschouwde kegelpunt, dan liggen de lijnen $D_1 D_2$ en $D_1 D'_2$ geheel op het oppervlak, dus ook op den raakkegel. Langs de lijnen $D_1 D_2$ en $D_1 D'_2$ heeft het oppervlak en dus ook de raakkegel een raakvlak, dat loodrecht op het xy -vlak staat. Een vlak V loodrecht op de gegeven lijn $D_1 D'_1$ snijdt $D_1 D_2$ in een punt F , $D_1 D'_2$ in een punt F' en den raakkegel volgens een kegelsnede door F en F' , waarvan de raaklijnen in F en F' loodrecht op het xy -vlak staan en dus evenwijdig loopen, m. a. w. FF' is middellijn dier kegelsnede. Nu ligt het snijpunt van V met $D_1 D'_1$, d. i. een der brandpunten van de kegelsnede, tusschen de beide evenwijdige raaklijnen in, hetgeen niet bij een hyperbool, maar alleen bij een ellips voorkomt ¹⁾.

63. STEINER'sch oppervlak voor $C = 2k$.

Is $C = 2k$, dan vallen op ieder der gegeven lijnen de beide kegelpunten in het voetpunt van den kortsten afstand samen. De

¹⁾ Dat de doorsnede een ellips is laat zich ook gemakkelijk uit de verg. van het oppervlak aantoonen. Neemt men l_1 als x -as, den kortsten afstand van l_1 en l_2 als z -as, dan wordt de verg. van het oppervlak:

$$(x^2 - y^2) \sin^2 2\alpha - xy \sin 4\alpha - 4zk + 4k^2 - C^2 z^2 - 4C^2(y^2 + z^2) = 0.$$

De coördinaten van een der kegelpunten op l_1 zijn:

$$x = \frac{\sqrt{C^2 - 4k^2}}{\sin 2\alpha}, \quad y = z = 0$$

en de verg. van den raakkegel in het kegelpunt:

$$(x \sin 2\alpha - y \cos 2\alpha) \sqrt{C^2 - 4k^2} - 2zk + 4k^2 - C^2 z^2 - C^2(y^2 + z^2) = 0.$$

De doorsnede van dien kegel met een vlak door den top loodrecht op de x -as heeft tot vergelijking

$$y^2(C^2 \sin^2 2\alpha + 4k^2 \cos^2 2\alpha) + z^2(C^2 - 4k^2) - 4yzk \cos 2\alpha + \sqrt{C^2 - 4k^2} = 0,$$

welke verg. twee onbestaanbare rechten voorstelt. Hieruit volgt, dat voor $C > 2k$ de raakkegel door vlakken loodrecht op de x -as volgens ellipsen gesneden wordt. Verder volgt uit de verg. van den raakkegel, dat de raakkegel niet degenerceert als C van 0 en $2k$ verschilt.

vier op het oppervlak gelegen lijnen $D_1 D_2$, enz. zijn nu alle langs den kortsten afstand $K_1 K_2$ der gegeven lijnen samengevallen. *Deze kortste afstand is een dubbellijn van het oppervlak geworden*, die tusschen K_1 en K_2 geïsoleerd verloopt en daar buiten de doorsnede van twee bestaanbare bladen is; *de punten K_1 en K_2 , waarin 2 kegelpunten zijn samengevallen, zijn klempunten van de dubbellijn $K_1 K_2$.*

Het oppervlak heeft nu dus drie door één punt E gaande dubbellijnen, ieder met twee klempunten. Door het punt E gaan drie bladen van het oppervlak, die elkaar volgens de dubbellijnen doorsnijden. We hebben nu dus een STEINER'sch oppervlak van den 4^{den} graad en de 3^{de} klasse¹⁾ voor ons, een niet met zich zelf reciproke specialiseering van het oppervlak van KUMMER. De klasseverlaging ontstaat doordat het snijpunt der drie dubbellijnen zich van de omhullende der raakvlakken heeft afgesplitst.

Van de 16 kegelpunten vallen er 2 in ieder der 6 klempunten der dubbellijnen, 4 in het snijpunt der dubbellijnen. Van de 16 kegelsneceraakvlakken zijn er 4 enkelvoudig, de isotope vlakken door de gegeven lijnen, terwijl er in ieder der drie vlakken door twee dubbellijnen 4 kegelsneceraakvlakken zijn samengevallen.

64. Hyperbolische parabolöide voor $C=0$.

Is $C=0$, dan degenereert de m. pl. in het dubbeltellende oppervlak

$$xy \sin 2\alpha + 2zk = 0.$$

Hieruit blijkt, dat de m. pl. der punten, waarvan de afstanden tot twee gegeven lijnen gelijk zijn, een gelijkzijdige hyperbolische parabolöide is, waarvan de as langs den kortsten afstand en de top in het midden van den kortsten afstand der gegeven lijnen valt.

¹⁾ Dat we een oppervlak van STEINER hebben blijkt ook uit de vergelijking. Zijn $X_1=0$, $X_2=0$, $X_3=0$ en $X_4=0$ de vergelijkingen van de vier eigenlijke kegelsneceraakvlakken van het STEINER'sche oppervlak, dan luidt haar verg. in irrationalen vorm

$$\sqrt{X_1} + \sqrt{X_2} + \sqrt{X_3} + \sqrt{X_4} = 0.$$

De verg. van ons oppervlak is voor $C=2k$:

$$x^2 y^2 \sin^2 2\alpha + 4xyzk \sin 2\alpha - 4k^2 (x^2 \sin^2 \alpha + y^2 \cos^2 \alpha) = 0,$$

hetgeen in den volgende irrationalen vorm gebracht kan worden:

$$\begin{aligned} & \sqrt{|x \sin \alpha - y \cos \alpha + i(z-k)|} + \sqrt{|-x \sin \alpha + y \cos \alpha + i(z-k)|} + \\ & + \sqrt{|x \sin \alpha + y \cos \alpha + i(z+k)|} + \sqrt{|-x \sin \alpha - y \cos \alpha + i(z+k)|} = 0. \end{aligned}$$

Verder ziet men uit de verg., *dat er nog oneindig vele andere paren van lijnen* (echter met dezelfde lijn en hetzelfde midden van den kortsten afstand) *zijn aan te wijzen, waarvoor de afstanden tot ieder punt van de paraboloïde gelijk zijn.*

65. Vorm van het oppervlak.

In hoofdzaak hangt de gedaante van het oppervlak daarvan af of $C > 2k$ is, en dus de kegelpunten op de gegeven lijnen bestaanbaar zijn, dan wel $C < 2k$ is, in welk geval die kegelpunten onbestaanbaar zijn.

Zij eerst $C > 2k$. Het oppervlak heeft een convex gesloten blad, waarvoor de *som* der afstanden tot de gegeven lijnen $= C$ is. Dit blad lijkt eenigszins op den door de vier kegelpunten gevormden tetraeder, waarvan de hoekpunten niet, maar de ribben wel zijn afgerond en wel zoodanig dat twee overstaande ribben (de gegeven lijnen) binnen het blad komen en de vier andere daarop blijven.

Het tetraedervormige blad zet zich door ieder der kegelpunten heen voort in een naar het oneindige verloopend blad. Voor de bladen, die in de kegelpunten D_1 en D'_1 met het tetraederblad samenhangen, is $a_2 - a_1 = C$, voor de beide andere bladen $a_1 - a_2 = C$, waarin a_1 en a_2 de absolute afstanden tot l_1 en l_2 voorstellen. De beide bladen, waarvoor $a_2 - a_1 = C$ is, snijden elkaar volgens de dubbellijnen in het oneindige, maar hangen daar analytisch niet samen. Wel bestaat die samenhang in het oneindige tusschen een blad $a_2 - a_1 = C$ en een blad $a_1 - a_2 = C$.

De naar het oneindige verlopende bladen hebben aanvankelijk eenigszins de gedaante van de drievlakshoeken, die de voortzettin-gen van den tetraeder zijn. De ribben van zulk een drievlakshoek zijn afgerond, waarbij twee ribben op het blad blijven, maar de derde (een gegeven lijn) daarbinnen komt. Op grooten afstand gaan die bladen echter zeer aanzienlijk van de drievlakshoeken afwijken. Van de juiste gedaante dier bladen kan men zich door de in de volgende nummers te bespreken doorsneden en de daarop betrekking hebbende figuren gemakkelijk een duidelijke voorstelling vormen.

Laat men C afnemen en tot $2k$ naderen, dan trekt zich het tetraedervormige blad tot den kortsten afstand der gegeven lijnen samen, waarbij zich de kegelpunten twee aan twee tot klem-punten vereenigen. De naar het oneindige verlopende bladen krijgen een scherpen kant en naderen daarmee tot den scherpen

kant van het andere bij dezelfde teekencombinatie behoorende blad. Voor $C = 2k$ vereenigen zich beide bladen en hangen in de nieuw ontstane dubbellijn samen. Van deze dubbellijn is dus het gedeelte tusschen de eindpunten van den kortsten afstand geïsoleerd, terwijl door ieder der daar buiten gelegen gedeelten twee bij dezelfde teekencombinatie behoorende bladen gaan.

Is $C < 2k$ geworden, dan is het tetraedervormige blad geheel verdwenen. De samenhang der bladen, die voor $C = 2k$ door de dubbellijn in het eindige gaan, is juist anders geworden dan ze was voor waarden van $C > 2k$, waardoor nu bij iedere der beide nog mogelijke teekencombinaties (in tegenstelling met de beide vorige gevallen) slechts één naar het oneindige verlopend blad behoort. Beide bladen, die in het oneindige samenhangen, naderen tot elkaar als C kleiner wordt, om voor $C = 0$ tot een hyperbolische paraboloïde samen te vallen.

66. Doorsneden evenwijdig aan het xz -vlak.

Vlakken evenwijdig aan het xz - of aan het yz -vlak zullen, daar ze door een dubbellijn gaan, het oppervlak volgens kegelsneden snijden. We willen de doorsneden evenwijdig aan het xz -vlak, die we daartoe op het xz -vlak projecteeren, wat nader beschouwen; met een kleine wijziging gelden dezelfde resultaten dan natuurlijk ook voor doorsneden evenwijdig aan het yz -vlak.

Op het xz -vlak projecteeren zich de gegeven lijnen als de twee evenwijdige lijnen $z = k$ en $z = -k'$, terwijl de scheeve vierhoek zich als twee overstaande zijden en de diagonalen van een recht-hoek projecteert.

Blijkens de in n°. 56 gegeven verg. van het oppervlak is de projectie der doorsnede met een vlak $y = y_1$:

$$4x^2 \sin^2 \alpha (C^2 - 4y_1^2 \cos^2 \alpha) + \\ + 4z^2 (C^2 - 4k^2) - 16xzy_1 k \sin 2\alpha - C^2 (C^2 - 4k^2 - 4y_1^2 \cos^2 \alpha) = 0.$$

De doorsneden zijn dus kegelsneden, die alle hun middelpunt op de y -as hebben. In de snijpunten van zulk een kegelsnede met de evenwijdig aan het yz -vlak loopende lijnen $D_1 D_2$ en $D'_1 D'_2$ van het oppervlak loopt de raaklijn evenwijdig aan de z -as, daar de raakvlakken langs $D_1 D_2$ en $D'_1 D'_2$ evenwijdig aan het yz -vlak loopen.

Hieruit volgt, dat de projecties der kegelsneden alle aan de projecties van $D_1 D_2$ en $D'_1 D'_2$ raken en dat dus de projecties dier lijnen tot den schijnbaren omtrek van het oppervlak behooren.

De volledige omhullende van de projecties der kegelsneden heeft tot vergelijking

$$(4x^2 \sin^2 \alpha + 4k^2 - C^2)(4x^2 \sin^2 \alpha + 4z^2 - C^2) = 0,$$

zoodat die omhullende behalve uit de projecties van $D_1 D_2$ en $D'_1 D'_2$ nog uit de ellips

$$4x^2 \sin^2 \alpha + 4z^2 = C^2$$

bestaat. De vorm der ellips, die door de projecties der kegelpunten gaat, hangt alleen van den hoek der gegeven lijnen af; de kleine as der ellips is gelijk aan de contante C . Terwijl de rechten van den schijnbaren omtrek alleen bestaanbaar zijn voor $C > 2k$, is de ellips steeds bestaanbaar.

Is $C > 2k$, dan is de doorsnede met het vlak $y = 0$ een ellips, waarvan de assen langs de x - en de z -as vallen. Verschuift met het vlak der doorsnede, dan wordt de ellips gerekter, terwijl hare assen draaien. Is het vlak der doorsnede $y = \frac{\sqrt{C^2 - 4k^2}}{2 \cos \alpha}$, dan

is de ellips in de dubbele lijn $D_1 D'_2$ overgegaan om bij nog verdere verschuiving in een hyperbool te veranderen, waarvan de asymptoten meer en meer in verschillende richting uiteen gaan. Voor grooter wordende waarden van y_1 begint de projectie der

hyperbool meer en meer op de twee evenwijdige lijnen $x = \pm \frac{C}{2 \sin \alpha}$, dit zijn de raaklijnen van den schijnbaren omtrek in de uiteinden van de groote as, te gelijken (zie fig. 2).

Is $C < 2k$, dan zijn alle doorsneden hyperbolen. Voor $y_1 = 0$ raakt die hyperbool den schijnbaren omtrek in de uiteinden van de kleine as. Neemt y_1 toe, dan draaien de asymptoten in dezelfde richting, echter zoo dat de asymptotenhoek voortdurend grooter wordt (zie fig. 4).

Is $C = 2k$, dan is steeds een der asymptoten van de hyperbool de z -as. De asymptotenhoek is nul voor $y_1 = 0$ en neemt toe als y_1 toeneemt (zie fig. 3).

67. Andere stelsels van kegelsneden op het oppervlak.

Behalve de doorsneden met vlakken evenwijdig aan het xz - of yz -vlak heeft het oppervlak nog andere stelsels van kegelsneden, nl. de doorsneden met vlakken door een gegeven lijn. Zulk een doorsnede, b.v. met een vlak door l_1 , heeft dubbelpunten in de beide kegelpunten van l_1 en in twee punten in het oneindige (de

snijpunten van het vlak der doorsnede met de dubbellijnen in het oneindige) en *bestaat dus uit twee hyperbolen met evenwijdige asymptoten*¹⁾. Is $C > 2k$ en zijn dus de snijpunten in het eindige der hyperbolen bestaanbaar, dan zijn de stukken der hyperbolen tusschen die snijpunten (welke stukken te zamen een lens-vormige figuur vormen) de doorsnede met het tetraedervormige blad.

Gaat in het bijzonder het vlak door den kortsten afstand der gegeven lijnen, m. a. w. gaat het door het snijpunt der dubbellijnen in het oneindige, dan gaan de hyperbolen in parabolen over. Deze parabolen hebben den kortsten afstand der gegeven lijnen als gemeenschappelijke as. Voor $C > 2k$ hebben ze bestaanbare snijpunten en hunne openingen naar verschillenden kant gekeerd, voor $C < 2k$ onbestaanbare snijpunten en hunne openingen naar denzelfden kant gekeerd²⁾.

68. Doorsneden evenwijdig aan het xy -vlak.

Om een nog duidelijker voorstelling van het oppervlak te vormen hebben we ook eenige doorsneden met vlakken evenwijdig aan de gegeven lijnen geprojecteerd op het xy -vlak in teekening gebracht³⁾. De verg. van de projectie der doorsnede met het vlak $z = z_1$ luidt:

$$4x^2y^2\sin^2 2\alpha - 4C^2(x^2\sin^2\alpha + y^2\cos^2\alpha) + \\ + 16xyz_1k\sin 2\alpha + (C^2 - 4z_1^2)(C^2 - 4k^2) = 0.$$

Alle doorsneden raken aan de vlakken evenwijdig aan de z -as en gaande door de zijden van den op het oppervlak gelegen scheeven vierhoek, zoodat de projecties dier doorsneden omhuld worden door de zijden van den rechthoek, die de projectie van dien scheeven vierhoek op het xy -vlak is; men vindt gemakkelijk, dat deze vier lijnen de volledige omhullende, dus den geheelen schijnbaren omtrek van het oppervlak vormen. Alleen als $C > 2k$ is, is die schijnbare omtrek bestaanbaar (fig. 5); voor $C < 2k$ vullen de projecties der doorsneden het geheele xy -vlak (fig. 7).

De projecties hebben alle den oorsprong als middelpunt. Verder

¹⁾ Is $C = 2k$ en dus de m. pl. een oppervlak van STEINER, dan bestaat ook de doorsnede met een willekeurig raakvlak uit twee hyperbolen met evenwijdige asymptoten.

²⁾ De vergelijkingen van de projecties dier parabolen op het xz -vlak luiden:

$$4x^3\sin^2\alpha + (2k + C)(2z - C) = 0, \\ 4x^3\sin^2\alpha + (2k - C)(2z + C) = 0.$$

³⁾ Men kan van deze projecties zooveel punten construeeren als men wil door een stelsel van lijnen evenwijdig aan de eene gegeven lijn te snijden door een stelsel van lijnen evenwijdig aan de andere gegeven lijn.

hebben ze dubbelpunten in de punten in het oneindige van x - en y -as met gemeenschappelijke asymptoten, wier vergelijkingen zijn

$$y = \pm \frac{C}{2 \cos \alpha}, \quad x = \pm \frac{C}{2 \sin \alpha}.$$

De doorsnede met een vlak door een der gegeven lijnen, b.v. l_1 , bestaat uit twee gelijkzijdige hyperbolen, waarvan de vergelijkingen zijn

$$\begin{aligned} (2x \sin \alpha - C)(2y \cos \alpha + C) + 4k^2 &= 0, \\ (2x \sin \alpha + C)(2y \cos \alpha - C) + 4k^2 &= 0. \end{aligned}$$

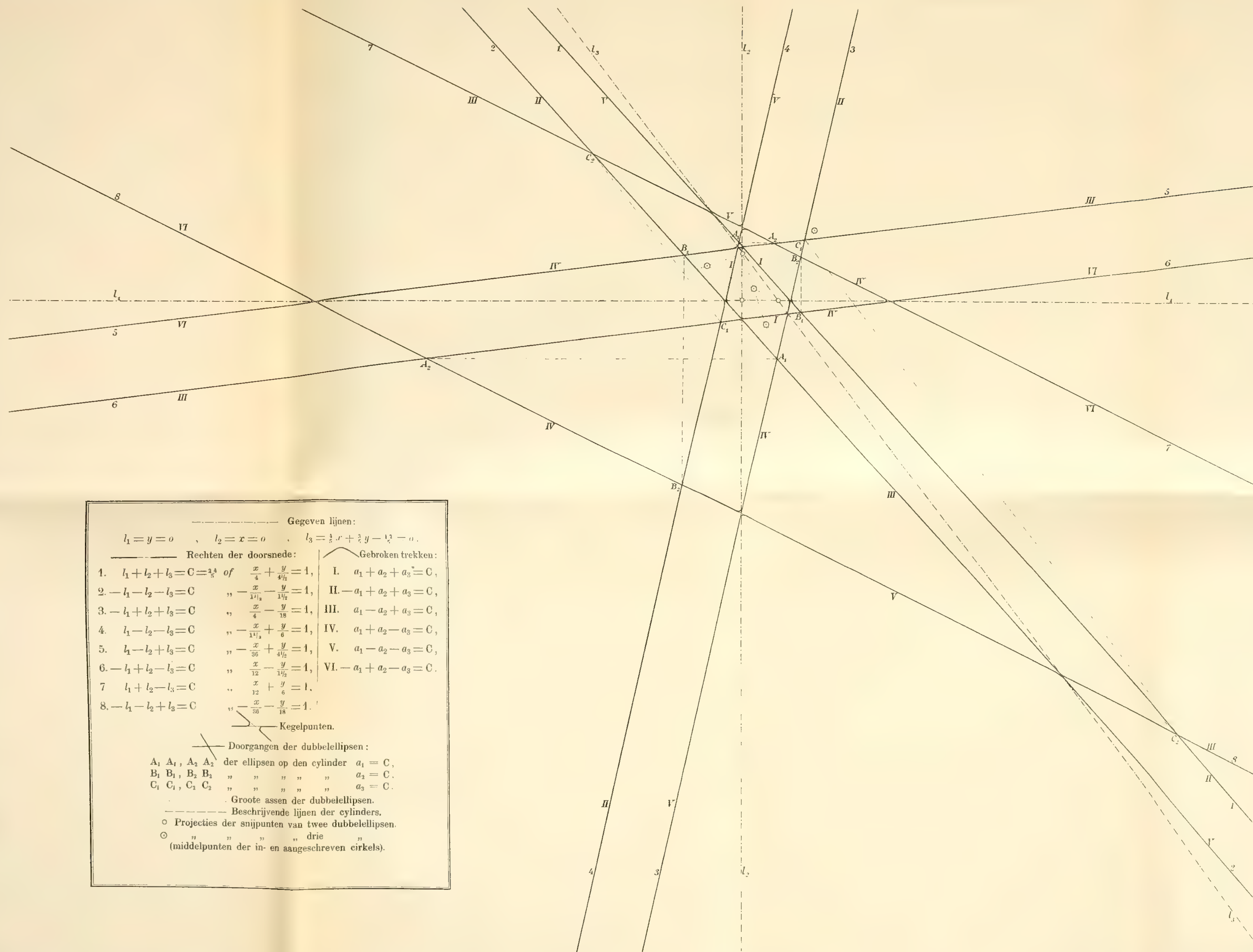
Evenzoo is de doorsnede met een vlak door l_2

$$\begin{aligned} \{ (2x \sin \alpha - C)(2y \cos \alpha - C) - 4k^2 \} \\ \{ (2x \sin \alpha + C)(2y \cos \alpha + C) - 4k^2 \} = 0. \end{aligned}$$

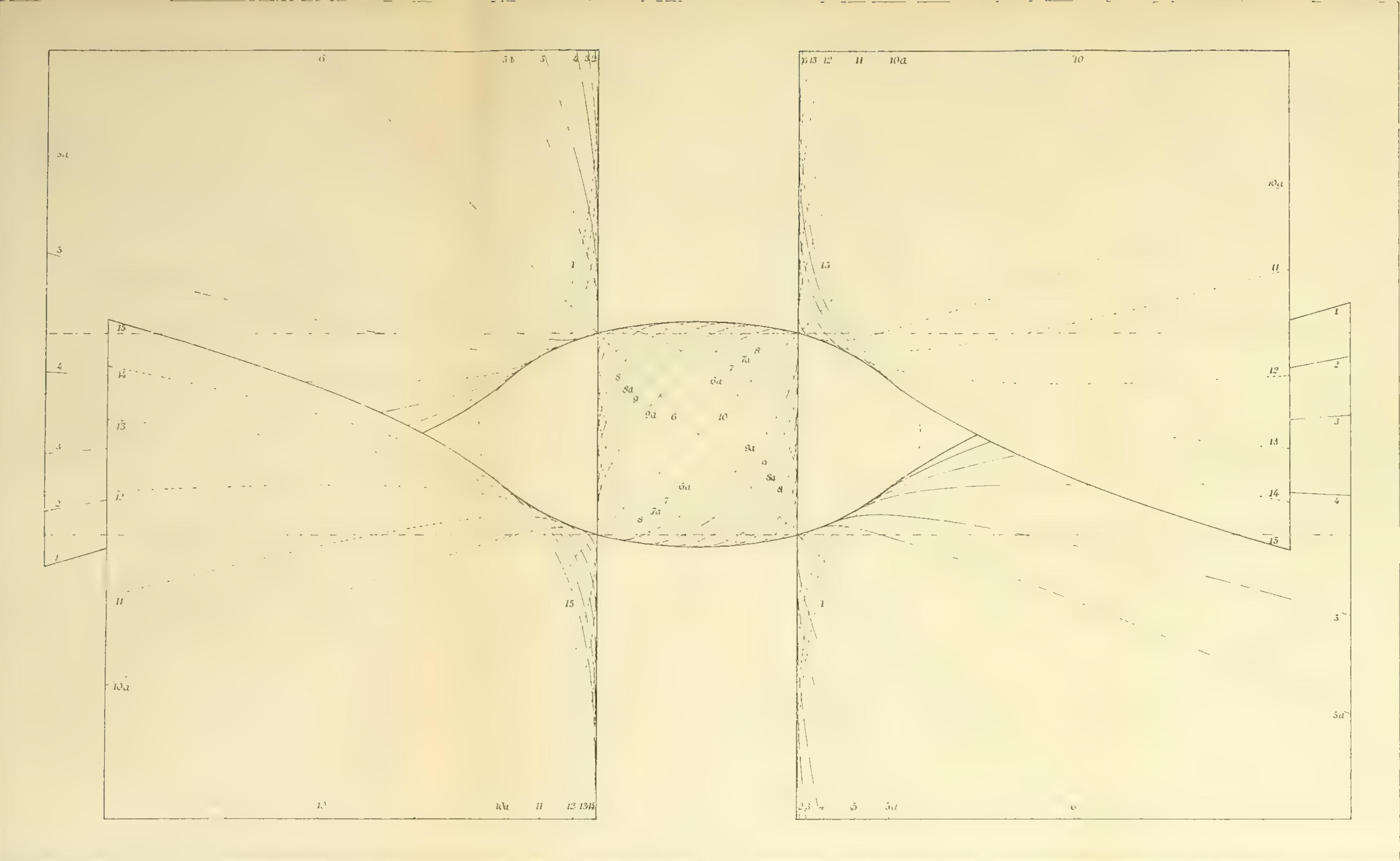
De beide hyperbolen van zulk een doorsnede snijden elkaar in het eindige alleen dan in twee bestaانبare punten als $C > 2k$ is (fig. 5); voor $C = 2k$ raken ze elkaar aan (fig. 6).

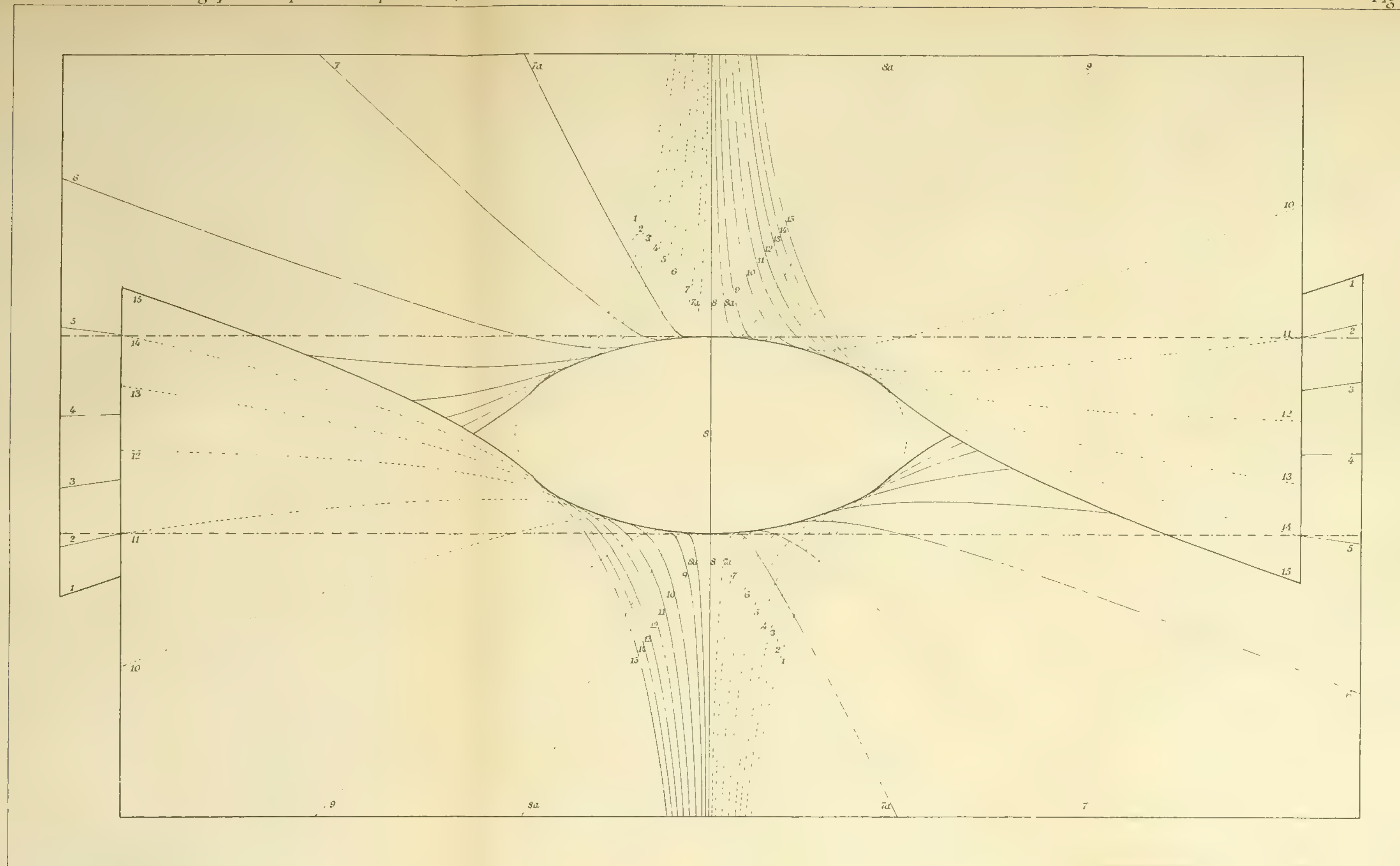
Is $C > 2k$, dan bezit de doorsnede een eindigen gesloten trek (doorsnede met het tetraedervormige blad) als z_1 tusschen $+\frac{1}{2}C$ en $-\frac{1}{2}C$ ligt. Is $-k < z_1 < k$, dan is die trek in den rechtehoek van den schijnbaren omtrek beschreven; is $-\frac{1}{2}C < z_1 < -k$ of $k < z_1 < \frac{1}{2}C$, dan raakt die trek (die zich voor $z_1 = \pm \frac{1}{2}C$ tot een geïsoleerd punt heeft samengetrokken) den schijnbaren omtrek niet.

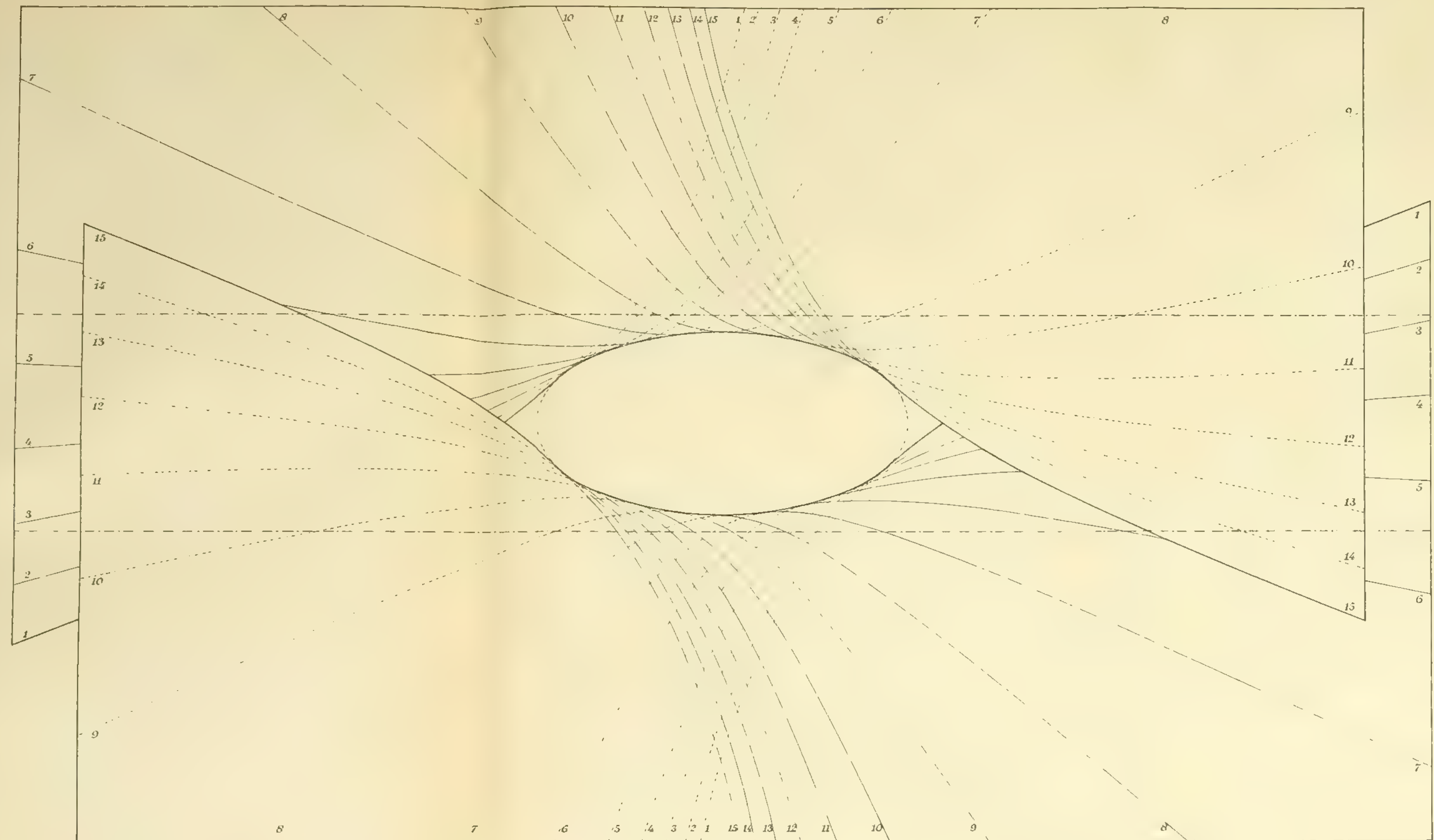
Sneek, 17 Maart 1907.

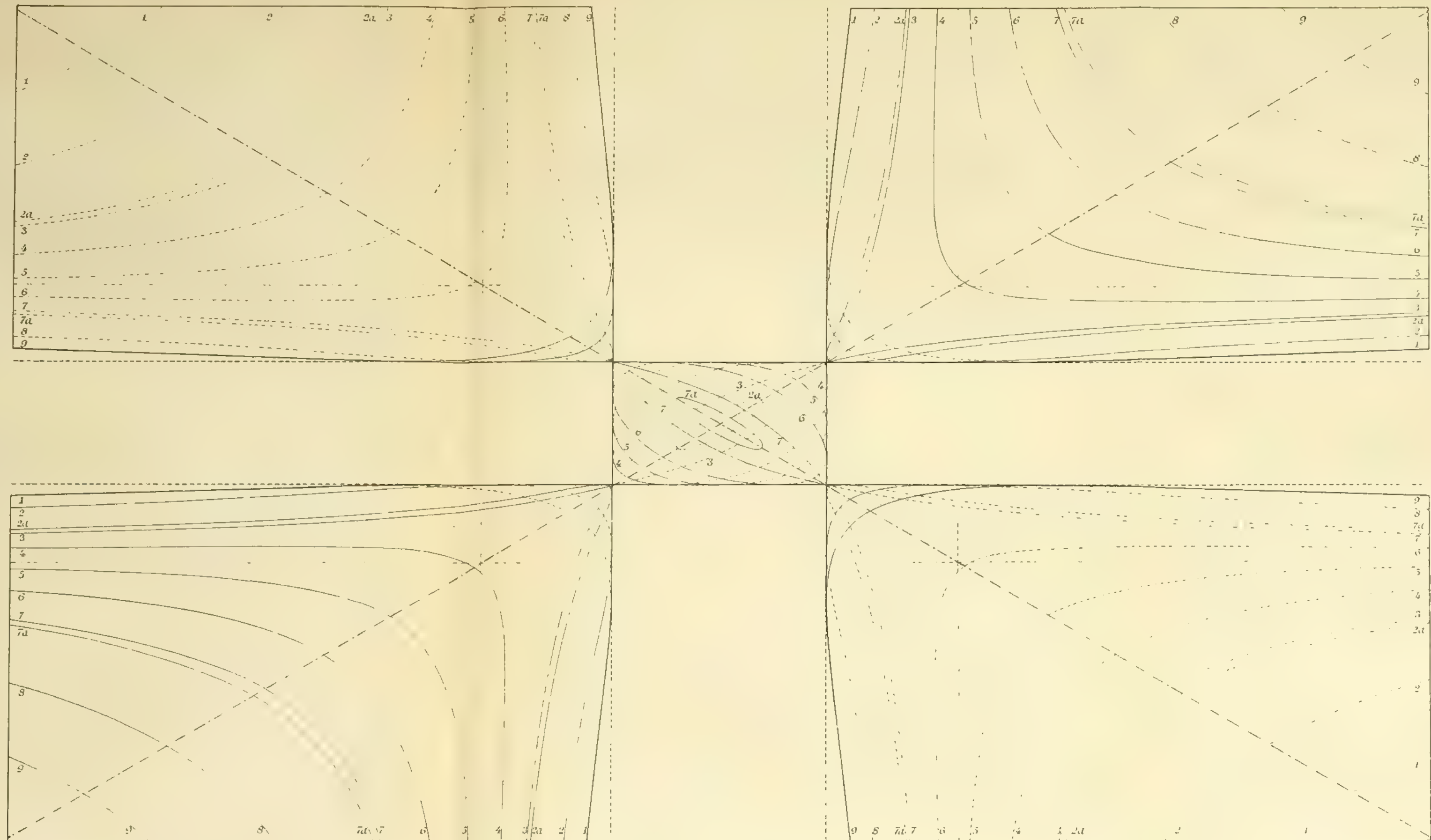


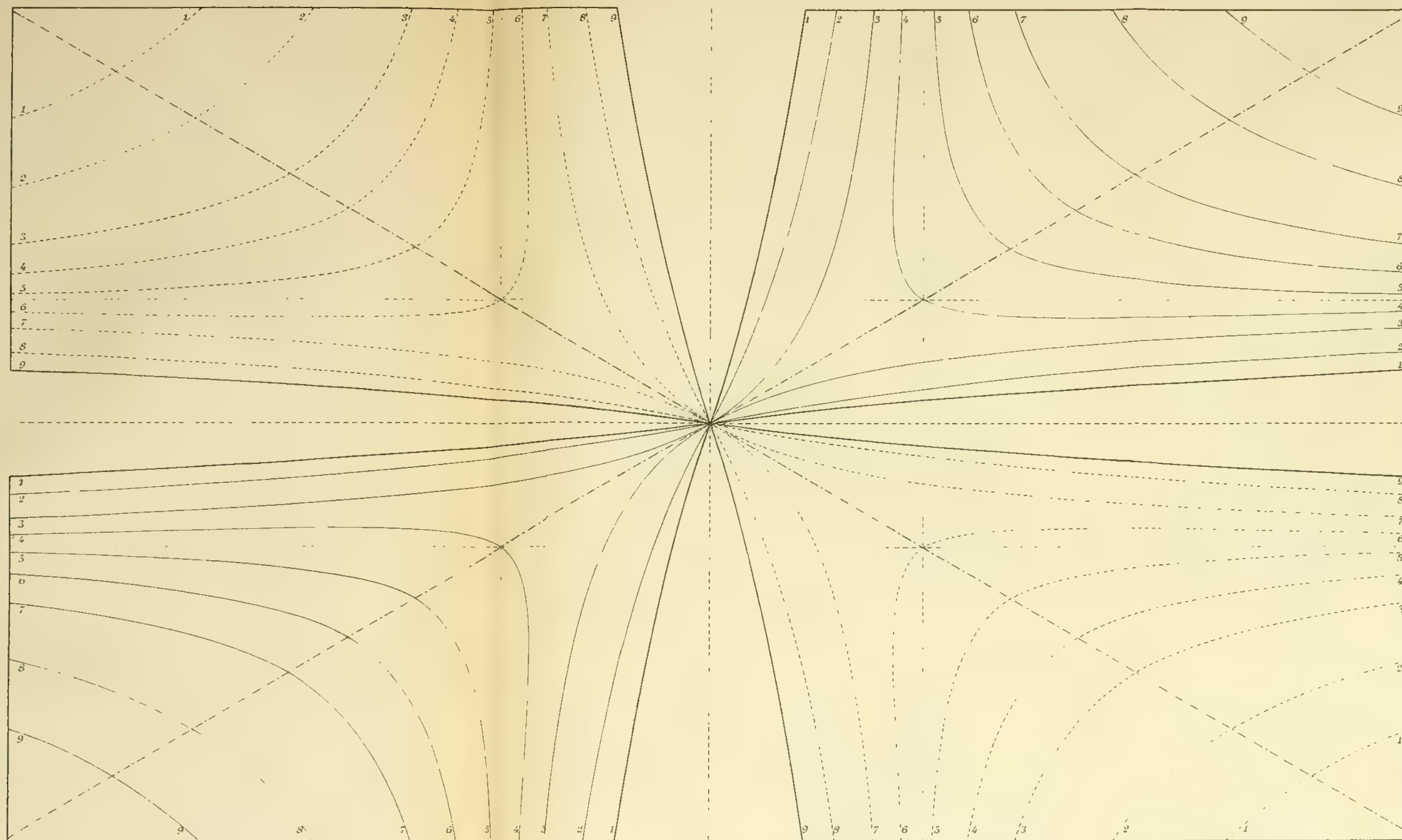
Gegeven lijnen:		
$l_1 = y = 0$	$l_2 = x = 0$	$l_3 = \frac{1}{2}x + \frac{1}{2}y - \frac{1}{2} = 0$
Rechten der doorsnede:		Gebroken trekken:
1. $l_1 + l_2 + l_3 = C = \frac{1}{2}$ of $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$	I.	$a_1 + a_2 + a_3 = C$
2. $-l_1 - l_2 - l_3 = C$ " $-\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$	II.	$-a_1 - a_2 - a_3 = C$
3. $-l_1 + l_2 + l_3 = C$ " $-\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$	III.	$a_1 - a_2 + a_3 = C$
4. $l_1 - l_2 - l_3 = C$ " $\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$	IV.	$a_1 + a_2 - a_3 = C$
5. $l_1 - l_2 + l_3 = C$ " $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$	V.	$a_1 - a_2 - a_3 = C$
6. $-l_1 + l_2 - l_3 = C$ " $-\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$	VI.	$-a_1 + a_2 - a_3 = C$
7. $l_1 + l_2 - l_3 = C$ " $\frac{x}{4} + \frac{y}{4} = 1$		
8. $-l_1 - l_2 + l_3 = C$ " $-\frac{x}{4} - \frac{y}{4} = 1$		
Kegelpunten.		
Doorgangen der dubbelellipsen:		
A_1, A_2, A_3, A_4	der ellipsen op den cylinder	$a_1 = C$
B_1, B_2, B_3, B_4	" " " "	$a_2 = C$
C_1, C_2, C_3, C_4	" " " "	$a_3 = C$
Groote assen der dubbelellipsen.		
Beschrijvende lijnen der cylinders.		
o Projecties der snijpunten van twee dubbelellipsen.		
o " " " drie " "		
(middelpunten der in- en aangeschreven cirkels).		

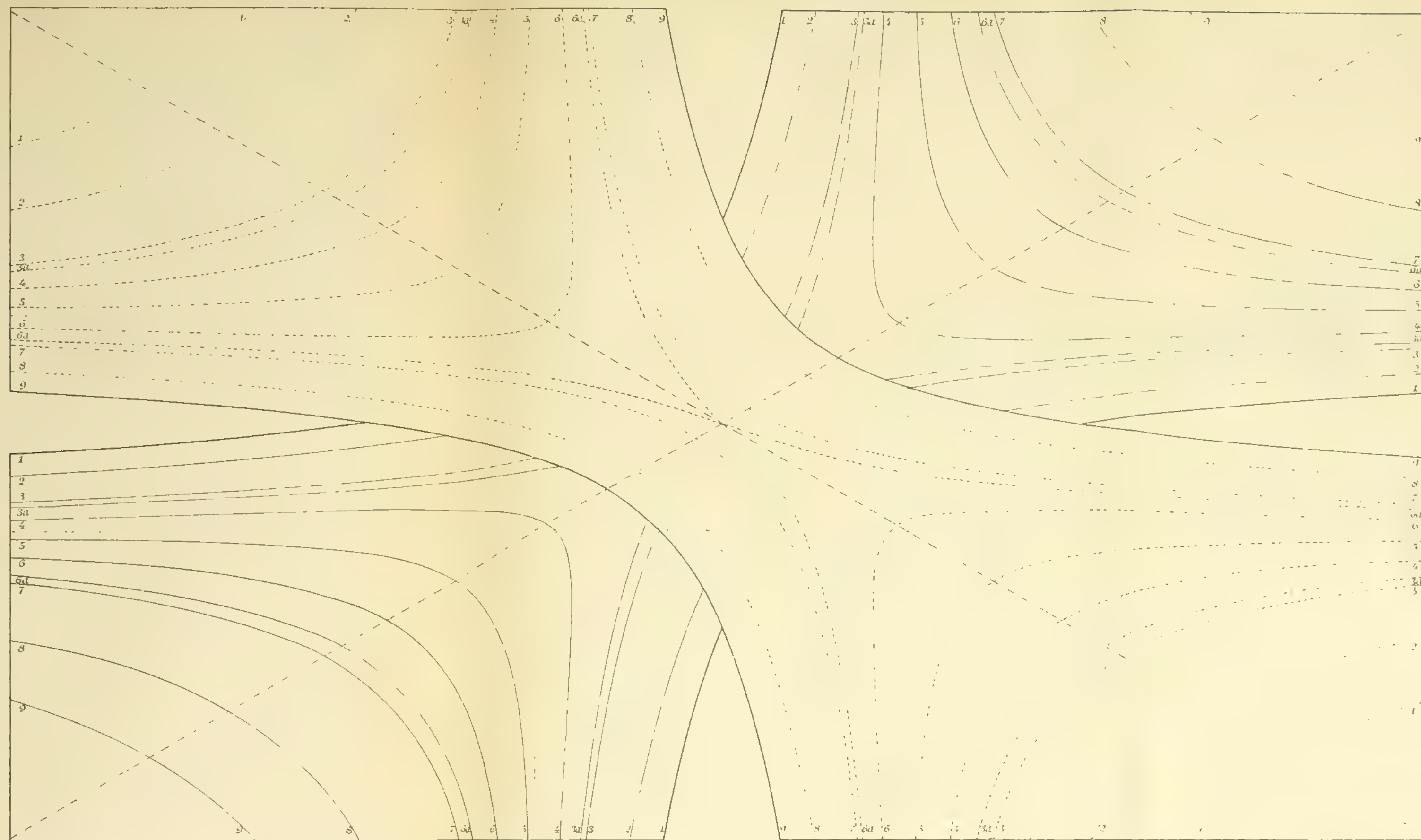


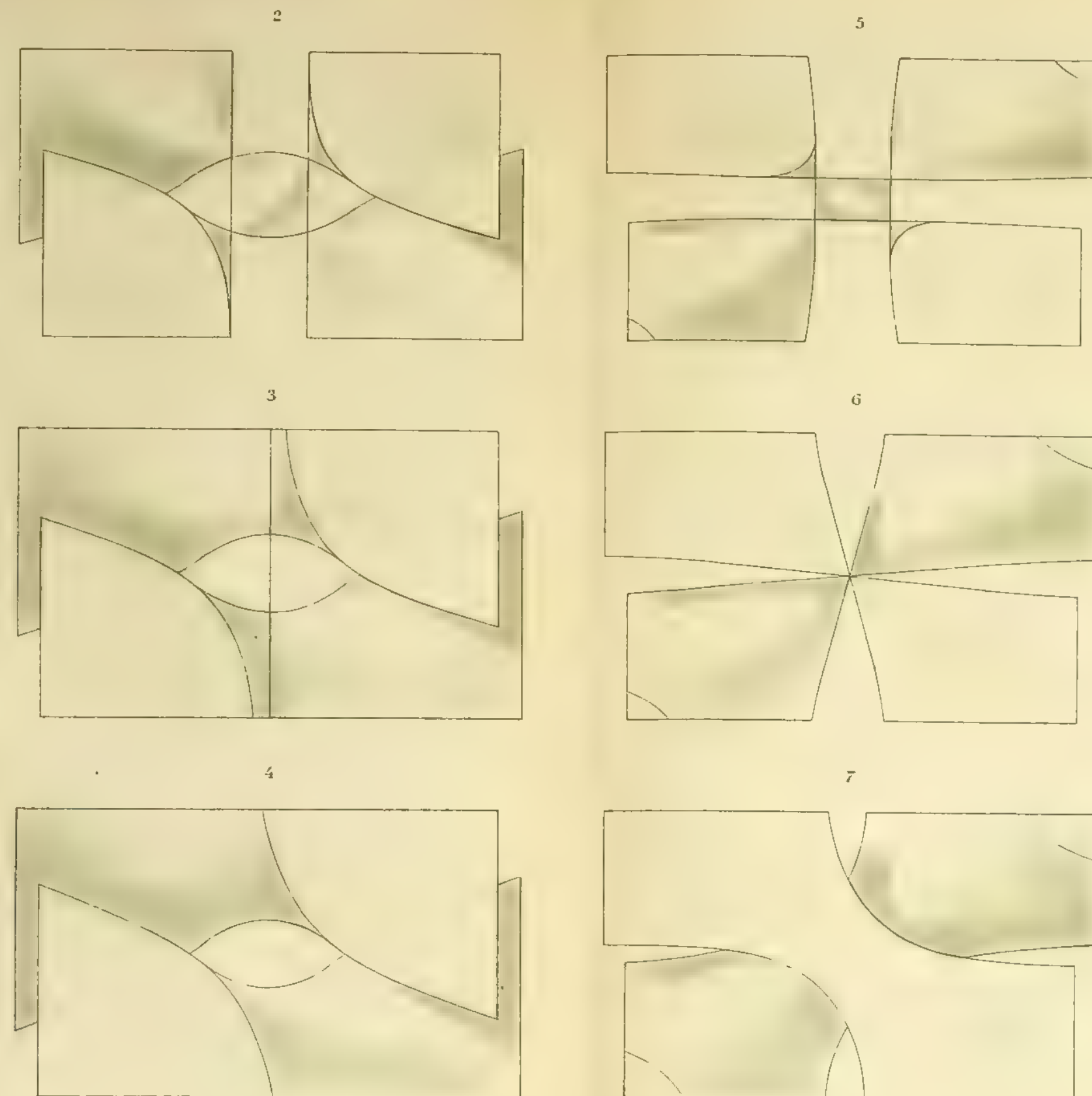












VERKLARING DER FIGUREN 2-7.

— Gegeven lijnen.

Doorsneden der figuren 2, 3, 4, ($C = k \vee 5, 2k, k \vee 3$):

1.	$y \vee 3 = -3\frac{1}{2}k,$	9.	$y \vee 3 = \frac{1}{2}k,$
2.	$" = -3k,$	10.	$" = k,$
3.	$" = -2\frac{1}{2}k,$	11.	$" = 1\frac{1}{2}k,$
4.	$" = -2k,$	12.	$" = 2k,$
5.	$" = -1\frac{1}{2}k,$	13.	$" = 2\frac{1}{2}k,$
6.	$" = -k,$	14.	$" = 3k,$
7.	$" = -\frac{1}{2}k,$	15.	$" = 3\frac{1}{2}k,$
8.	$" = 0,$		

bovendien in fig. 2:

5a.	$y \vee 3 = -1\frac{1}{4}k,$	9a.	$y \vee 3 = \frac{3}{4}k,$
6a.	$" = -\frac{1}{4}k,$	10a.	$" = 1\frac{1}{4}k,$

in fig. 2 en 3:

7a.	$y \vee 3 = -\frac{1}{4}k,$	8a.	$y \vee 3 = \frac{1}{4}k,$
-----	-----------------------------	-----	----------------------------

Doorsneden der figuren 5, 6, 7 ($C = k \vee 5, 2k, k \vee 3$):

1.	$z = -3k,$	6.	$z = \frac{1}{2}k,$
2.	$z = -2k,$	7.	$z = k,$
3.	$z = -k,$	8.	$z = 2k,$
4.	$z = -\frac{1}{2}k,$	9.	$z = 3k,$
5.	$z = 0,$		

bovendien in fig. 5:

2a.	$z = -1,1k,$	7a.	$z = 1,1k,$
-----	--------------	-----	-------------

in fig. 7:

3a.	$z = -\frac{1}{2}k \vee 3,$	6a.	$z = \frac{1}{2}k \vee 3,$
-----	-----------------------------	-----	----------------------------

----- Gemeenschappelijke asymptoten
der doorsneden.

Essai d'une Explication du Mécanisme
de la Périodicité dans le Soleil et les Étoiles
rouges variables.

PAR

A. BRESTER Jz.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE).

Deel IX. N° 6.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Januari 1908.

Essai d'une Explication du Mécanisme
de la Périodicité dans le Soleil et les Étoiles
rouges variables.

PAR

A. BRESTER Jz.

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(**EERSTE SECTIE**).

Deel IX. N° 6.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1908.

INTRODUCTION.

§ 1. *Tranquillité intérieure du Soleil.*

En poursuivant mon étude du Soleil et des Etoiles rouges variables *a)* je crois avoir découvert le mécanisme, qui cause dans le soleil la périodicité de ses taches et dans les étoiles rouges variables la périodicité de leur éclat. C'est la description de ce mécanisme qui sera l'objet principal de ce Mémoire.

Ma théorie demande en premier lieu que le soleil soit à l'intérieur relativement tranquille, que du moins il ne soit pas continuellement bouleversé par toutes ces éruptions, ces explosions et ces tempêtes, qui d'après l'interprétation courante du déplacement des raies spectrales y séviraient sans relâche. Outre tous les autres arguments, que j'ai déjà développés depuis 1888 et ceux que beaucoup plus tard M. JULIUS a aussi allégués à propos de son explication du déplacement des raies par dispersion anormale *b)*, il y en a surtout trois, qui doivent nous convaincre de l'impossibilité de tous ces bouleversements solaires.

a) Verklaring van de veranderlijkheid der roode sterren (Mei 1888). Essai d'une explication chimique des principaux phénomènes lumineux stellaires (Juillet 1888). Essai d'une Théorie du Soleil et des Etoiles variables (Dec. 1888). Théorie du Soleil, Verhandelingen van de K. Akademie van Wetenschappen te Amsterdam (1892). Astronomy and Astroph. Dec. 1893, March 1894 and Dec. 1894. Aanteekeningen van het verhandelde in de Sectieverg. van het Prov. Utrechtsch Genootschap 1894. Knowledge Nov. and Dec. 1895, May 1896. Nature Jan. 16 1896. Maatschappij Diligentia, Natuurkundige voordrachten (1888, 1891, 1896, 1897, 1902, 1906) beschreven door P. A. HAAXMAN JR. De Nederlandsche Revue, Juni 1906.

b) W. H. JULIUS: Verslagen v. d. K. Ak. van Wetensch. te Amsterdam. Afd. Natuurkunde, 24 Febr. 1900 p. 520, 28 Juni 1902 p. 126. Astroph. Journ. XII p. 185.

1° nous avons le spectre des protubérances, où les raies de l'hydrogène et de l'hélium sont souvent fortement déplacées, mais où la raie du pseudo-coronium ne bouge jamais *c*). Et cependant dans ces protubérances l'hydrogène, l'hélium et le coronium sont uniformément répartis, comme il résulte de la ressemblance des trois images, qu'on obtient au moyen des rayons émis par ces trois gaz différents *d*). Or voilà un cas, où le principe d'ailleurs si beau et si fertile de DÖPPLER *e*) ne saurait être appliqué. Car son application nous mènerait ici à la conclusion absurde, que dans un mélange de 3 gaz il y en aurait 2, qui souffleraient avec violence tandis que le 3^{me} resterait en repos. La tranquillité du coronium serait ici tout aussi impossible que le serait la tranquillité de l'azote dans notre propre atmosphère si l'oxygène s'y mit à souffler. Mais si le principe de DÖPPLER appliqué aux protubérances nous conduit inévitablement ainsi à une conclusion absurde, ce principe est donc un mauvais guide dans l'étude du Soleil. Le spectre considéré, bien loin de démontrer dans les protubérances un mouvement violent prouve sûrement au contraire qu'un tel mouvement y est impossible. Et ce n'est pas seulement dans les protubérances, que l'application du principe de DÖPPLER suscite des tempêtes impossibles, elle les fait naître aussi constamment en beaucoup d'autres régions du soleil et notamment dans les taches, où rien n'est plus fréquent, selon M^{lle} CLERKE, qu'une tempête d'hydrogène dans un calme de calcium etc. etc. *f*)

2° nous avons la stratification du gaz solaire, qui serait impossible si ce gaz était continuellement bouleversé et si ces bouleversements duraient déjà depuis des milliers de siècles. Cette stratification, d'après laquelle les vapeurs, indépendamment de leur volatilité, s'élèvent d'autant plus haut, qu'elles sont plus légères et d'après laquelle le titane réfractaire mais léger se montre à de grandes hauteurs *g*) tandis que le mercure l'antimoine et le thallium

c) C. A. YOUNG: The Sun (1895) p. 259 „in the midst of the most violent disturbances... when the lines of H, Mg and other metals are contorted and shattered by the swiftness of the rush of the contending elements, this line usually remains undisturbed fine sharp and straight; a little brightened, but not otherwise affected. For the present it stands as an unexplained mystery”. CLERKE: Problems in Astrophysics p. 117 „the line 1474 K is singularly exempt from displacement effects through motion. It remains erect and undeviated in the midst of solar storms”.

d) FENYI: Astr. and Astroph. XI p. 430. CLERKE: Problems in Astrophysics p. 117.

e) C. DÖPPLER: Abh. Kgl. Böhm. Ges. d. Wissensch. Bd. II. 1841—42 p. 467. FIZEAU: Société philomatique de Paris 23 Dec. 1848.

f) CLERKE: Probl. p. 96 „Nothing is commoner than the raging of hydrogen storms amid profound calcium calms” (Voir aussi la fig. 2 de la Pl. VI).

g) EVERSLED: the Indian eclipse p. 70. JEWELL: Astroph. Journ. XI p. 243. THALEN:

très volatils demeurent, comme tous les autres éléments pesants, invisibles dans la profondeur; cette stratification, d'après laquelle les métaux, qui sont visibles au dessus de la photosphère, n'ont qu'un poids atomique moyen de 72, tandis que ce poids moyen est de 159 pour les métaux, qui y sont invisibles; cette stratification, qu'on reconnaît toujours aisément dans les couches superposées de l'atmosphère solaire *h*), et dans les protubérances elles mêmes *i*) et que non seulement les „flash spectra” au moment des éclipses *j*) mais aussi les recherches de M. M. JEWELL, MOHLER et HUMPHREYS ont révélée dans les couches renversantes *k*); cette stratification est pour moi une preuve convaincante de la tranquillité intérieure du soleil et je ne comprend pas, qu'elle ne le soit pas pour tout le monde.

Croit-on peut-être que dans les bouleversements, qu'on suppose, la gravitation puisse empêcher les éléments les plus lourds à être soulevés? Mais alors on oublie 1° que si dans le soleil la gravitation est 28 fois plus énergique que chez nous, ces éléments les plus lourds n'y sont pas, là où nous les observons, à l'état de corps solides vraiment lourds mais tous à l'état de vapeurs légères. Le fer par exemple donne dans le four électrique une vapeur qui est moins dense que le chlore ou la vapeur d'éther. Et les vapeurs du magnésium, de l'aluminium, du silicium et du sodium sont dans nos laboratoires toutes plus légères que l'air que nous respirons. Alors on oublie 2° que si nos tempêtes terrestres ne sont qu'un jeu d'enfant en comparaison des tempêtes supposées solaires, elles sont néanmoins déjà si puissantes qu'elles transportent au loin des masses énormes d'eau, de sable et de cendre volcanique et qu'on les a vues soulever le fer lui-même, non pas à l'état solaire d'une vapeur légère, mais à l'état terrestre de rails et de canons.

Nova Acta Upsalen 1868. YOUNG: Nature Vol. 3 p. 111. FROST: Astroph. Journ. XII p. 307. Quant au nombre des raies que le Titane produit dans le spectre solaire, il n'y a que le fer et le nickel qui en produisent encore plus. Quant à l'intensité de ces raies le titane y occupe la dixième place. Dans les étoiles le titane est aussi un des éléments les plus importants. (LOCKYER: Spectr. Comparison of Metals... with special Reference to Vanadium and Titanium). Et sur notre terre le titane est parmi les dix éléments les plus abondants. Il y excède en quantité le soufre, le chlore et même le carbone. (A. F. HOLLEMAN: Lehrbuch der anorg. chemie 1903 p. 9).

h) LOCKYER: The Chemistry of the Sun p. 304. SECCHI: le Soleil I p. 275—293 II p. 292, 482. EVERSLED: Phil. Trans. CXCVII A p. 402. LOCKYER: Solar Physics Comm. Spectrosc. comparison of Metals 1907 p. 12.

i) SECCHI: le Soleil II p. 97, 148, 149. YOUNG: le Soleil p. 166. FENYI: Comptes Rendus 1889 p. 889.

j) MITCHELL: Astroph. Journ. XV p. 97. HUMPHREYS: Astroph. Journ. XV p. 327.

k) Astroph. Journ. III p. 138.

Si l'on tient compte de ces vérités, et si l'on se rappelle en outre que dans notre propre atmosphère, nos tempêtes avec leur vitesse de 60 Mètres tout au plus suffisent cependant complètement à y empêcher la moindre trace de stratification, alors il devient tout à fait impossible de nous imaginer que dans le soleil une stratification durable pût subsister, si là dans un mélange gazeux tout à fait analogue, où la gravitation est, il est vrai, 28 fois plus énergique, il y avait constamment des tempêtes soufflant avec une vitesse, non pas de quelques Mètres mais de plusieurs centaines de Kilomètres par seconde. La stratification durable du gaz solaire nous prouve par conséquent que toutes ces tempêtes n'existent pas.

3° nous avons encore l'invariabilité du spectre solaire, qui nous démontre la grande tranquillité de l'intérieur du soleil. Si dans le niveau photosphérique et dans les couches renversantes des éruptions, telles qu'on les y suppose, avaient lieu à tout moment, toutes les 20 000 raies du spectre solaire devraient nous les divulguer chaque fois par des déplacements soudains et simultanés. Alors les cas où l'on a vu une seule de ces raies distinctement déplacée ne seraient pas considérés comme des événements remarquables dignes d'être enregistrés ^{l)}; alors un spectre anormal, tel que M. HALE l'a photographié en 1894 (où d'ailleurs les raies étaient plutôt anormales en intensité qu'en longueur d'onde ^{m)}) ne serait pas encore toujours

^{l)} FENYI: Publ. d. Haynaldschen Obs. VI p. 15 (1892) fig. 14, 15, 16. CLERKE: Problems p. 50. Les couches renversantes sont en effet si tranquilles, que M. H. F. NEWALL, qui vient de les étudier expressément pour tâcher d'y découvrir quelque signe de mouvement, n'en a pu trouver le moindre indice. (NEWALL: Monthly Not. Jan. 1907 p. 171. Search for Evidence of Local Convection Currents on the Sun's Surface). La conclusion de M. NEWALL la voici (loc. cit. p. 172): „Belopolsky has called attention to this point in his note published in vol. i. of the Transactions of the Union for Solar Research. If this observation is further corroborated, it would tend to show that the violent convection currents, which we believe are needed to keep up the supply of radiation from the Sun's surface, and which are so well brought to mind by Prof. SCHUSTER in his Glasgow lecture on solar evolution (Astroph. Journ. 17 p. 173) must be confined to strata below the reversing layer. This is a result which it seems difficult to reconcile with other considerations." Si ces recherches récentes, qui relèguent toutes ces éruptions fameuses dans le domaine de l'invisible, sont d'après M. NEWALL lui-même difficiles à concilier avec les idées courantes, elles n'en répondent que d'autant mieux à ma théorie du soleil tranquille. Je ne les ai apprises qu'après avoir achevé ce Mémoire.

^{m)} HALE: Astroph. Journ. XVI p. 220. Un autre unicum a été observé par M. W. MITCHELL, qui vit le 24 Février 1905 un déplacement simultané de toutes les raies spectrales présentes près d'une facule, qui se soulevait et qu'il vit le lendemain transformée en tache. (Astroph. Journ. XXII p. 38). Mais M. MITCHELL ajoute expressément qu'à l'exception des raies de l'hydrogène les raies dans les taches ne bougent que très rarement et le phénomène du 24 Février est considéré par lui comme un événement unique „In only one instance has a distinct shifting been noticed, which could favour the spot theories (of up-rushes or down-rushes)". Dans leurs recherches actuelles sur le

un unicum embarrassant, mais serait au contraire un phénomène ordinaire toujours normalement à l'ordre du jour; alors ce ne seraient pas seulement quelques raies très larges, comme les raies *H* et *K* du calcium, qu'on observe d'ailleurs aussi très haut dans l'atmosphère solaire, qui nous montreraient, lorsqu'on étudie leurs détails, comme l'ont fait JEWELL, JULIUS, DESLANDRES et ADAMS, quelques déplacements très petits, que ces quatre observateurs ont d'ailleurs interprétés de quatre différentes manières *n*), mais toutes les raies devraient nous montrer des déplacements pareils. Or nous savons que l'immense majorité des raies solaires ne bougent jamais. Si l'on n'en était généralement convaincu on ne continuerait guère à se donner une peine infinie pour corriger les tables de ROWLAND d'erreurs. Car tout ce travail ne serait alors que peine perdue. Mais si le spectre solaire est à ce point invariable, il démontre la tranquillité intérieure du soleil. Car il ne saurait être un étalon de longueurs d'onde invariables si les couches photosphériques et renversantes, qui l'engendrent, étaient éternellement bouleversées.

Mais si la théorie du soleil tranquille s'appuie sur un grand nombre d'arguments puissants, la théorie courante d'un soleil bouleversé *o*) ne repose au contraire que sur un seul argument tout à

spectre des taches M. M. HALE et ADAMS sont arrivés, après mûr examen de 80 clichés, à la conclusion que voici: The general conclusion, then, seems to be justified that the vapors forming the umbra of a well developed spot are normally nearly at rest, with perhaps some presumption of a slow downward drift" (Astroph. Journ. March 1907 p. 87).

n) JEWELL: Astroph. Journ. III p. 89 (1896), XI p. 234 (1900). JULIUS: Verslag v. d. gew. verg. v. d. K. Akad. v. W. te Amsterdam 11 Maart 1903. DESLANDRES: C. R. 141 7 p. 377 (1905). WALTER S. ADAMS: Astroph. Journ. XXIII p. 45 (1906).

o) Cette théorie est en effet encore bien courante. C'est ainsi par exemple, que dans le Compte Rendu de la séance du 3 Oct. 1905 de la Société astronomique de France nous trouvons la communication que voici: „M. QUÉNISSET a observé et dessiné à l'aide d'un spectroscopie à vision directe, un grand nombre de protubérances. L'une d'elles a présenté ce phénomène remarquable d'une disparition presque soudaine. Elle s'est affaissée sur elle-même si rapidement qu'il a été impossible de la dessiner. M. CASPARI, le Président, remercie M. QUÉNISSET de nous avoir mis au courant de l'activité solaire de ces derniers mois. L'imagination reste confondue quand on songe aux vitesses formidables de ces jets d'hydrogène, vitesses dépassant des milliers de fois celles de nos trains les plus rapides". (Bulletin de la Soc. Astr. de France Nov. 1906 p. 486). Voir aussi dans le même Bulletin d'Avril 1907 un discours de M. FLAMMARION p. 155: „Imaginons des Alpes, des Pyrénées, des Himalayas sautant en l'air, des Atlantiques et des Pacifiques venant remplacer les nuages, la Terre entière éclatant comme une bombe: ce n'est rien encore. Les flammes du Soleil s'élançant à cinquante mille, cent mille, deux cent mille kilomètres de hauteur et retombant en pluie de feu sur l'océan solaire qui toujours brûle". Une telle image est assurément bien faite pour frapper vivement l'imagination. Mais si nous la comparons avec ce que M. M. NEWALL et HALE nous ont raconté dans mes notes *l* et *m* précédentes de la quiétude, qu'après mûr examen ils ont dû constater dans les couches renversantes et les taches du soleil, nous ne verrons plus dans cette image frappante des bouleversements solaires qu'une fantasmagorie absolument trompeuse.

fait incertain. Ce seul argument tout à fait incertain est l'interprétation ordinaire, mais nullement nécessaire du déplacement des raies spectrales *p*) En affirmant que cette interprétation ordinaire est l'argument unique de la théorie courante, je ne fais que répéter ce que les défenseurs les plus illustres de cette théorie ont souvent affirmé. A première vue les mouvements rapides, qui sont souvent visibles dans les protubérances, les taches et la surface photosphérique, semblent eux aussi un argument prouvant l'agitation violente du soleil. Mais ce semblant est trompeur. SECCHI, LIAIS, FENYI et YOUNG ont affirmé maintes fois, que tous ces mouvements visibles sont quant à leur origine, leur direction, leur durée, leur vitesse, leur discontinuité et leur discontinuation tellement extravagants *q*), que bien loin de susciter l'idée d'un transport réel de matière pondérable, ils suggèrent plutôt l'idée d'un déplacement de l'état lumineux. Si néanmoins tous ces observateurs éminents ont généralement persisté dans l'idée de mouvements réels, que leurs observations et leur jugement avaient condamnée, c'est leur interprétation ordinaire du déplacement des raies spectrales qui en a été la cause unique. Ils ont pris soin d'ailleurs de le déclarer eux mêmes, comme on le verra dans les citations que voici :

Je citerai en premier lieu le P. FENYI, qui, à propos de deux grandes protubérances observées à Kalocsa durant le mois de Septembre 1893 *r*), s'est exprimé ainsi: „En considérant ces phénomènes dans leur ensemble et en détail et en cherchant à nous les expliquer nous avons peine à n'y voir qu'un mouvement mécanique; nous opinerions plutôt pour un mouvement apparent, produit par la rapide propagation d'une opération de physique ou de chimie. La théorie de M. BRESTER, selon qui les protubérances ne sont autre chose qu'une inflammation de ces endroits où les éléments dissociés sont tellement refroidis qu'ils peuvent se réunir, cette théorie, dis-je, nous offre l'explication la plus simple de ces phénomènes. D'après

p) C'est Mr. LOCKYER, qui a le premier recommandé cette interprétation (Proc. Roy. Soc. Vol. XVII p. 415; Vol. XVIII p. 120).

q) Rappelons nous l'observation de M. YOUNG, qui vit le 3 Août 1872 à des intervalles de une ou deux minutes une tempête de 120 milles par seconde cesser chaque fois et puis recommencer de nouveau, et cela durant une heure entière. (YOUNG: the Sun (1895) p. 167). Voir aussi par exemple les observations du P. FENYI, citées dans la note *s* suivante. M. FENYI m'a écrit aussi en 1894, que la moitié de toutes les protubérances, qu'il a observées, n'avaient aucun lien avec la chromosphère éloignée: „dass aber etwa die Hälfte der Protuberanzen ganz oder theilweise an ihrem Fusse von der Chromosphaere getrennt zu sein pflegen, eine Erscheinung, die sehr eigenthümlich ist und sehr für ein Entflammen und gegen ein einfaches ausströmen spricht". Il est bien difficile en effet d'attribuer toutes ces protubérances en ce cas à des éruptions quelconques!

r) FENYI: Mem. d. Soc. d. Spettrosc. Italiani Vol XXIII (1894).

cette théorie point de difficultés non plus par rapport à la structure en forme de bandelettes. . . . Cette théorie a cependant elle aussi ses difficultés, que nous ne pouvons énumérer ici. Qu'il me soit toutefois permis de démontrer que les protubérances ne sauraient être expliquées par la propagation d'une opération de physique ou de chimie. Le déplacement des raies du spectre est une chose indubitable; or ce fait suppose des mouvements aussi considérables que ceux que l'ascension permet de mesurer immédiatement. A mon avis il est impossible qu'un déplacement des raies du spectre résulte du simple avancement d'une opération de physique ou de chimie. En adoptant cette explication nous quitterions le terrain ferme de l'expérience sans rencontrer dans la théorie aucun appui. . . . s)

Le raisonnement de SECCHI t) le voici: Après s'être demandé si „en considérant les vitesses énormes des protubérances” tous ces changements de forme étaient bien dus à des mouvements mécaniques, „ne seraient ce pas de simples apparences, dit-il encore, dues à des changements d'état physiques. . . . Les masses nébuleuses s'illuminent avec tant de rapidité, elles se dissolvent ensuite en si peu de temps que l'on est porté à voir là une transformation momentanée plutôt qu'un transport réel de matière pondérable.” Mais, dit-il, quelques pages plus loin (p. 112) „cette question, savoir si les mouvements de la matière incandescente qui constitue les protubérances sont réels ou apparents, sera singulièrement éclaircie,

s) Le P. FENYI mentionne aussi les protubérances tranquilles comme étant d'après lui très difficiles à expliquer au moyen de sa théorie. Pour qui veut étudier les protubérances les observations innombrables du Rév. Père sont riches en informations de toute sorte. Mais bien loin d'être toujours en accord avec l'hypothèse de mouvements réels, elles en font ressortir souvent, d'après le P. FENYI lui-même la grande invraisemblance. De telles observations sont mentionnées par exemple aux pages 19, 20, 23 des Publ. des Haynald Obs. Heft VI (1892) et aux pages 114 et 129 des Publ. VIII 1902. On les trouve aussi décrites dans les Mem. d. Soc. d. Spettrosc. Italiani Vol. XX (1891) (Protubérances extraordinaires observées à l'Observ. Haynald et Ascension rapide d'une Protubérance solaire) et dans l'Astroph. Journal du mois de Mars 1896 p. 194. Ces observations ont révélé des mouvements ascensionnels si capricieusement variables qu'il est impossible d'y voir l'effet d'une éruption, d'une explosion ou d'une répulsion électrique quelconques et elles ont démontré surtout que lorsqu'un mouvement déduit d'un déplacement spectral devait causer un déplacement matériel visible, ce déplacement cependant ne s'observa pas! Le P. FENYI a fait remarquer surtout (Publ. d. Hayn. Obs. VIII p. 114) que si l'on attribue les déplacements spectraux chromosphériques à des mouvements énormes dans le rayon visuel, qui en ce cas est toujours dans la direction des parallèles du soleil, il est inconcevable que des mouvements pareils ne se manifestent jamais dans la direction méridienne. De tels mouvements de 7° en 6 minutes devraient être directement visibles, mais on ne les voit jamais. Or si les protubérances sont dues à des éruptions ou des explosions, on ne voit pas pourquoi leur gaz serait toujours lancé dans la direction des parallèles et jamais dans la direction des méridiens.

t) SECCHI: le Soleil II p. 108.

nous croyons même qu'elle sera résolue par les faits, que nous allons exposer dans les paragraphes suivants." Or les faits, que SECCHI expose dans ces paragraphes (p. 112—124) ont uniquement rapport au déplacement des raies spectrales. C'est en étudiant sérieusement ce déplacement qu'on n'hésitera pas à conclure, dit-il, „que les éruptions solaires ne peuvent s'expliquer (comme il l'avait supposé un moment) par de simples illuminations dues à des décharges électriques; mais que ce sont de véritables mouvements mécaniques, des transports de matière pondérable lancée avec une vitesse dont nous n'avons d'ailleurs aucun exemple."

M. YOUNG a raisonné précisément comme les P. P. FENYI et SECCHI. Dans son *Traité du Soleil* ^{u)} j'ai trouvé les passages suivants: A la page 164 M. YOUNG s'exprime ainsi: „toute l'apparence des protubérances quiescentes indique qu'elles prennent naissance où nous les voyons. . . . (page 166) elles sont formées par un échauffement local ou par quelque agitation lumineuse de l'hydrogène déjà présent et non par un transport et une réunion de matières prises au loin." A la page 241 nous lisons: „Dans bien des cas, peut-être dans la plupart, les formes et la manière d'être des protubérances s'expliquent assez bien en supposant que l'hydrogène échauffé et les vapeurs qui s'y joignent sont simplement chassés dans des régions plus fraîches par la pression au dessous. . . . Mais évidemment ce n'est pas là tout ce qui a lieu. Nous sommes forcés d'avoir recours à des idées d'un ordre différent pour nous expliquer des cas assez rares, mais néanmoins bien prouvés où on a vu les sommets de protubérances monter en quelques minutes jusqu'à des élévations de 2 ou 300 000 milles, le mouvement ascensionnel étant presque visible aux yeux avec une vitesse de 100 milles ou davantage par seconde. Ce qui est aussi très embarrassant c'est le fait indubitable que des nuages de cette substance des protubérances s'assemblent quelquefois et se forment sans aucune liaison apparente avec la chromosphère située au dessous; apparemment juste comme des nuages se forment dans notre propre atmosphère par la condensation de vapeurs auparavant invisibles. A tout prendre on dirait que nous devons regarder les protubérances comme différant du milieu qui les entoure, principalement, sinon entièrement, par leur luminosité, comme simplement des portions surchauffées d'une immense photosphère." Ces observations que M. YOUNG a présentées longtemps avant moi, s'accordent complètement avec ma théorie du soleil tranquille. Et il n'est donc nullement étonnant qu'en citant

^{u)} C. A. YOUNG: *le Soleil*, trad. française (1883).

ma théorie dans une édition nouvelle de son *Traité du Soleil* il en parle en termes sympathiques. Ma théorie donnerait, selon lui, une explication parfaite des phénomènes, s'il n'y avait le déplacement des raies spectrales, qui nous démontre d'une manière certaine que nous avons affaire à des mouvements réels et non à un simple changement de place de la forme lumineuse *v*).

Ces trois citations, qui seront complétées plus loin par celles qui nous feront voir, comment SECCHI et LIAIS ont cru pouvoir interpréter les mouvements rapides que la surface photosphérique nous montre sans cesse, auront démontré j'espère que j'avais bien raison tantôt en affirmant que d'après l'opinion des plus illustres défenseurs des éruptions solaires, leur croyance à la réalité de ces éruptions n'est fondée que sur un seul argument, c'est à dire sur leur interprétation ordinaire du déplacement des raies spectrales.

Mais les arguments doivent être jugés d'après leur date *w*). Au temps que les P. P. SECCHI et FENYI et M. YOUNG, qui avaient adopté l'idée de M. LOCKYER, écrivaient les passages, que je viens de citer, on avait encore quelque raison de croire qu'un déplacement de raies ne pouvait être causé autrement que par un déplacement matériel et réel de la source lumineuse. Car toute autre cause était alors encore inconnue. Cette croyance toutefois n'avait

v) C. A. YOUNG: the Sun (1895) p. 228 „But to Brester's view the one conclusive objection, unless it can be evaded, is the fact that the lines in the spectrum testify to swift motions in the line of vision.... Brester maintains that the motion of a mere luminous form would produce the same effect.... There is however no evidence to support such a doctrine. No theoretical reason can be assigned, at least none has been so far as we know.... As for experimental evidence none exists as yet". Voir aussi E. I. WILCZYNSKI: *Astroph. Journ.* I p. 122, 1895; „The spectroscope says that these velocities are actually present and no theory, however ingenious, can ignore this fact. For the same reason such theories as that of Brester are at present unjustified".

w) Le P. FENYI par exemple ne croit plus maintenant que chaque déplacement spectral doive être attribué à un mouvement de la source lumineuse. C'est surtout l'immobilité des protubérances dans leur meridien (voir la note *s* précédente) qui a causé ce changement d'opinion „Man wird daher gedrängt zu vermuthen, dass nicht jede Linienverschiebung auf eine entsprechende Geschwindigkeit der Lichtquelle zurück zu führen ist (Publ. d. Haynald Observ. VIII Heft 1902, Notiz über besondere Bewegungen, p. 114). Mais si même dans l'explication des protubérances le Principe de Döppler est évidemment trompeur, on ne voit guère à quel phénomène dans l'intérieur du soleil, il serait donc bien applicable! — Le léger déplacement des raies de Fraunhofer vers le rouge, que M. J. HALM vient de découvrir dans le spectre du bord du soleil (*Astron. Nachr.* N°. 4146) est un autre exemple d'un déplacement, auquel le principe de Döppler n'est certainement pas applicable. M. HALM l'a démontré clairement (*loc. cit.* p. 281—283). Ce déplacement répond d'après lui, à l'épaisseur plus grande qu'ont pour nous au bord du disque les couches renversantes, qui causent d'ailleurs toujours un déplacement vers le rouge, que M. JEWELL a découvert, causeront ce déplacement d'autant plus fortement que ces couches seront pour nous plus épaisses.

rien de bien convaincant. Car on avait bien la certitude qu'un mouvement matériel suffisant causait toujours un déplacement des raies, mais cette certitude ne pouvait pas prouver qu'inversement chaque déplacement de raies dût être causé par un mouvement matériel et ne pût être l'effet de quelque autre cause, telle que par exemple le déplacement de l'état lumineux dans la matière tranquille. Pour pouvoir nier la possibilité d'un tel effet, il faudrait premièrement savoir avec précision, comment les atomes lumineux ou les électrons éventuels mettent en branle les ondes de l'éther. Or nous savons qu'en cette matière on n'a encore que des idées très vagues. Ces idées sont même tellement vagues que le déplacement lui-même des raies qu'on a indubitablement observé lorsque la source lumineuse se déplace n'a jamais été complètement expliqué x). Si, probablement moyennant quelque application du

x) W. MICHELSON: *Astroph. Journ.* XIII p. 192. „It is very likely that these displacements are actually due to those motions by which they are usually explained in astrophysics, but, from a strictly logical point of view, it cannot be asserted as yet that no other explanation is possible. Nor do I mean to remove from Döplers principle its hypothetical past, which probably belong to it by the very nature of the question. . . . A strictly scientific solution of the question is hardly possible at present, since it involves the difficult problems of the connection between the ether and ponderable matter”. SCHEINER: *Die Spectralanalyse der Gestirne* p. 154. Une tentative d'expliquer, comment les électrons pourraient causer des ondes lumineuses, a été faite par M. I. STARK à propos de ses recherches expérimentales sur les rayons-canaux de Goldstein. I. STARK: *Physik. Zeitschr.* 6 p. 892 (1905) 7 p. 249, 251, 353, 355, 564, 567 (1906); *Astroph. Journ.* XXIV Dec. 1906 p. 362. Les recherches de M. STARK ont prouvé surtout que les rayons-canaux produisent hormis leurs raies ordinaires des raies déplacées qui seraient dues d'après lui aux ions positifs se mouvant à grande vitesse. Si dans les couches extérieures du soleil, l'électricité (de la matière radioactive par exemple) pouvait produire des déplacements ioniques analogues, de tels déplacements ne seraient pas incompatibles avec la tranquillité générale du soleil. C'est ainsi aussi que dans les expériences de M. STARK on voit, dans le même tube, à côté des raies déplacées de l'hydrogène, les raies normales de l'hydrogène en repos. Cette impuissance des ions à entraîner le gaz qu'ils traversent doit résulter de la petitesse de leur masse, qui est si petite en effet, qu'un gramme de Radium en peut perdre cent milliards par seconde (10^{11} . RUTHERFORD: *Radio-Activity* p. 158) sans que de cette perte continuelle, même après plusieurs années, n'ait résulté jusqu'à présent la moindre diminution de poids. La supposition que des ions positifs puissent traverser jamais quelque couche considérable d'un gaz quelconque n'a d'ailleurs rien de plausible. Car les rayons Alpha du Radium démontrent que ces ions positifs en vertu probablement de leur grandeur ont un pouvoir pénétrant excessivement petit. (RUTHERFORD: loc. cit. p. 133). Remarquons en outre que d'après les expériences de Mr. G. F. HULL (*Astroph. Journ.* Janvier 1907 p. 14—17 et 21) ce sont surtout les raies de l'hydrogène que les rayons canaux déplacent, car les raies d'autres substances et de l'hélium par exemple ne montrent de cette manière aucun déplacement certain. (Voir cependant aussi *Astroph. Journ.* April 1907 p. 170—194 p. 230—235). Dans la séance du 6 Avril 1907 du Congrès physique et médical de Leiden M. STARK nous a fait voir d'ailleurs que dans les rayons canaux les raies du mercure se montrent aussi très distinctement déplacées.

principe de la résonnance, cette explication réussit un jour, cette explication suffira vraisemblablement aussi à expliquer le déplacement des raies lorsque c'est la propagation d'un procès chimique qui le produit. Car si les atomes, qui les premiers dans la matière tranquille deviennent lumineux, impriment tout de suite aux atomes qui ne deviendront lumineux que plus tard un commencement de mouvement vibratoire, qui doit correspondre à la longueur d'onde normale, cette vibration sera nécessairement modifiée à mesure que le procès chimique se propagera. Car là, où les atomes se combinent, leur rapprochement ne dépendra pas surtout de celui qui y était dû déjà aux ondes de l'éther. Et dans l'onde primitive la phase du plus grand rapprochement des atomes se présentera maintenant ou plus tôt ou plus tard, ce qui causera un changement dans la longueur de cette onde. S'il y a peut-être quelque vérité dans cette tentative d'une explication, il reste à savoir comment un tel déplacement des raies dépendra de la vitesse de la propagation du procès chimique. Cette dépendance ne sera apparemment pas aussi simple que celle qui, d'après DÖPPLER, relie chaque déplacement à une vitesse correspondante de la source lumineuse.

J'abuserais de la patience du lecteur si je tâchais de donner ici à l'idée, que je viens d'énoncer un plus long développement. Cette idée n'a peut-être pas la moindre valeur. Mais heureusement nous n'avons pas besoin d'hypothèses pour acquérir la certitude, que les avocats de l'infailibilité du principe de DÖPPLER se sont trompés autrefois, lorsqu'ils croyaient voir dans le déplacement des raies une preuve certaine du mouvement de la matière pondérable. Car dans les années, qui se sont écoulées depuis lors un grand nombre de recherches expérimentales et d'observations astronomiques ont renversé ce seul argument des éruptions solaires en démontrant avec évidence que très souvent il y aura un déplacement des raies sans le moindre déplacement de la source lumineuse. Un tel déplacement a été sûrement démontré dans les 10 cas suivants:

Citons 1° les recherches de M. M. HUMPHREYS et MOHLER, qui ont découvert que les raies se déplacent vers le rouge lorsque la pression du gaz lumineux augmente *y*). Citons 2° les recherches de HUFF, qui ont démontré que ce déplacement des raies par pression dépend aussi de la présence d'autres substances *z*). Citons 3° les recherches de HASCHEK et de KENT, qui ont prouvé que beaucoup

y) Astroph. Journ. III p. 114; IV p. 175, V p. 169. Voir l'application récente que M. HALM a faite de ces recherches dans la note *w* précédente et dans la deuxième note *s* du 10^{me} paragraphe. Voir aussi la note de M. HALE: Astroph. Journ. III p. 156—161.

z) Astroph. Journ. XIV p. 48.

de raies se déplacent lorsqu'on remplace l'arc par l'étincelle et lorsque l'étincelle est différemment produite *a*). Citons 4° les recherches de M. M. WILSING, LOHSE et HARTMAN, de M. M. HALE et KENT et de beaucoup d'autres, qui, en étudiant la vapeur d'électrodes métalliques dans une étincelle électrique au milieu d'un liquide ou d'un gaz comprimé, ont vu des raies, qui se déplaçaient fortement vers le rouge et qui se dédoublaient (comme on le voit souvent dans le spectre des Novae) en une raie brillante fortement déplacée et une raie obscure déplacée beaucoup moins *b*). Citons 5 les recherches de M. M. E. WIEDEMANN et G. C. SCHMIDT, qui ont découvert, que dans les corps luminescents les bandes brillantes d'émission montrent toujours une réfrangibilité moins grande que les bandes correspondantes d'absorption *c*). Citons 6° les recherches de M. JULIUS, qui ont fait voir, comment par dispersion anormale les raies peuvent paraître déplacées *d*). Citons 7° les recherches théoriques de M. W. MICHELSON, qui ont fait ressortir, qu'un déplacement des raies aura lieu lorsque dans le rayon visuel une masse autrement réfractive soudainement s'interpose *e*). Citons 8° le phé-

a) Astroph. Journ. XIV p. 181 (1901) XXII p. 182 (1905).

b) WILSING: Astroph. Journ. X p. 113. HALE: Astroph. Journ. XV p. 132. HALE and KENT: Astroph. Journ. XVII p. 154.

c) Wiedem. Ann. 37 p. 177, 56 p. 18.

d) Astroph. Journ. XII p. 185. W. H. JULIUS: Astroph. Journ. XXV March 1907, Plate VII p. 106. „We see from these photographs that the real absorption lines of the sodium vapor must have been excessively narrow; indeed it is dubious whether they can be distinguished at all and the distribution of the light seems to be wholly governed by anomalous dispersion”.

e) W. MICHELSON: Astroph. Journ. April 1901 p. 193. Si dans le spectre des protubérances et des taches il n'y avait jamais de raies ne bougeant jamais tandis que les autres raies se déplacent, les conclusions de M. MICHELSON seraient directement applicables à mon explication des protubérances. Car si les protubérances résultent d'un procès chimique, les combinaisons nouvelles subitement ainsi produites pourraient fonctionner comme la masse autrement réfractive, que demande M. MICHELSON dans le rayon visuel. Il paraît cependant que ces combinaisons nouvelles ne se forment pas assez vite ou assez abondamment pour produire l'effet que M. MICHELSON a expliqué. Car si cet effet existait dans le soleil tranquille, il devrait se manifester dans toutes les raies spectrales, et un déplacement simultané de toutes les raies, que M. MITCHELL a observé une fois (voir la note *m* précédente) serait alors incessamment à l'ordre du jour. M. MICHELSON est bien loin d'ailleurs de croire à la tranquillité intérieure du soleil; car donnant aux déplacements des raies l'interprétation qu'il critique, il admet que dans le soleil les gaz différents ne sont pas mélangés, mais isolément emportés par des mouvements disparates. Si une telle constitution chaotique était aussi concevable qu'elle est généralement admise, on ne saurait nier la possibilité que quelquefois le hasard pût engendrer quelque raie immobile au milieu d'autres distinctement déplacées, mais ce chaos ne saurait jamais expliquer pourquoi c'est précisément le coronium, qui ne bouge jamais et pourquoi dans le spectre des taches ce sont précisément l'hydrogène et quelques autres gaz dont les raies se déplacent, tandis que l'immense majorité des autres raies ne bouge jamais.

nomène de ZEEMAN lorsque la lumière est produite dans un champ magnétique *f*). Citons 9° les observations astronomiques du P. FÉNYI, qui ont convaincu cet observateur infatigable que dans l'explication des protubérances le principe de DÖPPLER, qu'il croyait autrefois infaillible, est cependant souvent trompeur *g*). Citons 10° (last not least) les observations astronomiques du spectre des Novae, où des déplacements énormes de raies, premièrement attribués à des mouvements réels, ont été prouvés plus tard être dus à quelque cause encore inconnue tout autre. On s'aperçut bien vite en effet, qu'en appliquant ici le principe de DÖPPLER, il n'en résultait que des impossibilités et des incongruités, que M.M. WILSING et VOGEL ont fait ressortir. Et c'est ainsi que d'un commun accord on a tout simplement décidé, qu'au déplacement des raies dans le spectre des Novae le principe de DÖPPLER n'était pas applicable *h*).

Si c'est donc en vertu des impossibilités, qu'il engendre, que le principe de DÖPPLER a dû être abandonné dans l'étude des Novae, c'est précisément pour la même raison, qu'on devra l'abandonner aussi dans l'étude du soleil. Ce n'est que le premier pas qui coûte. Faisons donc résolument le second *i*). Concédon, que toutes les

f) P. ZEEMAN: *Astroph. Journ.* V May 1897.

g) Voir les notes *s* et *w* précédentes. Quoique le P. FÉNYI attache beaucoup d'importance à l'explication de M. W. Michelson, il n'admet pas cependant que cette explication suffise pour rendre compte de tous les déplacements, qu'on observe et parmi lesquels il y en a plusieurs qui, d'après lui, demandent encore toujours l'explication de Döppler. (FÉNYI: *Astroph. Journ.* Jan. 1904 p. 70; MICHELSONS theory of the displacement of spectral lines) Voir aussi FÉNYI: *Meteorol. Zeitschrift* Aug. 1907 p. 359.

h) WILSING: *Astroph. Journ.* X p. 113. VOGEL: *Astron. Nachr.* Bd. 155 N°. 3701. WILSING: *Astron. Nachr.* N°. 3603. CLERKE: *Probl. in Astroph.* p. 375—398. M^{lle} CLERKE arrive par exemple, à propos des Novae, à la page 397 de son livre si beau et si captivant, que je viens de citer, à la conclusion que voici: „Yet it is no small advantage to clear the ways of thought by abolishing untenable hypotheses. It may then safely be stated that the remarkable spectral shiftings in temporary stars are not effects of translatory motion; they supply no argument for the duplicity of the light sources. Neither do they originate through pressure, which tends to damp down vibrations not to accelerate them”. N'est il pas remarquable de voir ici M^{lle} CLERKE sacrifier en toute sécurité le principe de Döppler, alors qu' à la page 109 du même livre, elle s'en arme avec non moins de sécurité pour combattre ma théorie? „These shiftings (dit-elle là) demand the strict application of Döplers principle, real velocities must correspond to them”. Outre les Novae il y a d'ailleurs encore beaucoup d'autres étoiles, dont les déplacements spectraux bien qu' inexploqués encore, ne sont plus jamais interprétés d'après le Principe de Döppler. C'est ce que nous verrons aussi plus loin en étudiant le spectre de Mira. (CAMPBELL: *Astroph. Journ.* IX p. 31—36) Voir ma note *p*, § 17.

i) Ce second pas, que M. JULIUS a fait vers 1900 a été pour moi, le premier pas en 1888. C'était dans ma première Publication astronomique: *Verklaring van de veranderingen der Roode Sterren* Delft 1888. Dans cet opuscule j'ai tâché de faire voir que ce n'est pas le hasard qui rend variables justement ces étoiles qui sont les plus refroidies. Entre ce refroidissement et la variabilité des étoiles il doit exister une relation de cause à effet. J'avais alors l'idée que voici: Les étoiles rouges variables sont couvertes d'une

recherches récentes, que je viens de citer, ont dépourvu l'argument unique des éruptions solaires du pouvoir persuasif, qu'il pouvait avoir autrefois et que ce n'est pas un argument aussi maltraité, qui nous convaincra jamais de la possibilité d'un globe solaire gazeux, qui en dépit d'un bouleversement éternel, ne perdrait jamais sa structure stratifiée, maintiendrait toujours une partie de ses gaz mélangés en repos et produirait là même où ce globe serait le plus violemment agité, un spectre étalon à longueurs d'onde invariables !

Or comme ces trois particularités capitales du soleil sont des faits indubitables nous prouvant sûrement l'impossibilité des bouleversements solaires, il ne nous reste donc plus qu'à admettre la tranquillité du soleil et de reconnaître par conséquent, que dans le soleil, comme dans les Novae, l'application du Principe de DÖPPLER doit être abandonnée.

En considérant désormais le soleil comme relativement tranquille, on cessera de n'y voir que des impossibilités et l'on sera ainsi sur la bonne voie pour arriver enfin à l'explication de tant de phénomènes, qui depuis les mémorables recherches de KIRCHHOFF vers 1860 sont encore toujours inexpliqués

C'est ce qu'on verra démontré, j'espère, lorsque j'aurai abordé l'objet principal de ce Mémoire.

nappe nuageuse obscurcissante, nous voilant plus ou moins l'intérieur toujours invariablement brillant de l'astre. Dans cette nappe il y a, mélangées aux molécules *R* de la vapeur nuageuse, des molécules *A* et *B* combinables, qui, lorsque la nappe refroidit, y causeront, comme je l'expliquerai tantôt dans le texte, des éruptions de chaleur périodiques. Or, chaque fois, qu'une telle éruption de chaleur se produit par la combinaison d'une partie des molécules *A* et *B*, elle causera un maximum de l'étoile par l'évaporation des molécules *R* dans les nuages obscurcissants. Et le minimum reviendra chaque fois lorsque ces molécules évaporées se condenseront de nouveau en nuages. Si cette idée était aussi plausible que je le croyais alors, il en découlait implicitement la tranquillité des couches extérieures de l'astre, sans laquelle le mécanisme des molécules $A + B + R$ n'aurait pu fonctionner. Je fis voir alors que dans les astres cette tranquillité, qui répondait à la théorie cinétique des gaz et à la stratification constatée dans l'atmosphère solaire n'avait rien d'inconcevable et ne saurait être jamais troublée comme celle de notre propre atmosphère. Car dans les astres le soleil ne luit pas unilatéralement et par conséquent inégalement comme chez nous, mais il luit là toujours invariablement au centre. C'est à propos de cette démonstration de la tranquillité des astres que j'ai ajouté dans une Note au bas de la page 9 : Ici le lecteur verra probablement surgir les protubérances du soleil, comme autant d'arguments énormes contre la quiétude des couches stellaires extérieures. Mais on se fait de ces protubérances, en se laissant tromper par les apparences, une idée évidemment exagérée. Si c'étaient vraiment des flammes ou des cyclones gigantesques à vitesses prodigieuses etc. etc. Dans cette même Note l'infailibilité du principe, alors encore tout puissant de DÖPPLER fut déjà énergiquement combattue.

§ 2. *Les sources de la chaleur solaire.*

Pour comprendre la cause de la tranquillité du gaz solaire, nous commencerons par nous rappeler, que l'unique cause de nos cyclones terrestres réside dans l'action perturbatrice du soleil. Une cause perturbatrice pareille ne pouvant exister à l'extérieur du soleil lui-même, le gaz solaire sera donc sous ce rapport tout aussi calme que le serait notre atmosphère si le soleil n'existait pas. Mais, dira-t-on, c'est le refroidissement inégal, qui cause ces bouleversements, qu'on suppose. J'y réponds que nous n'avons pas besoin d'admettre ce refroidissement inégal, parce qu'il est fort bien possible que dans la masse entière du soleil il ne puisse jamais être question quelque part d'un refroidissement soudain quelconque. Car cette masse entière se trouve dans un état disgrégé, c'est à dire dans un état dilaté, évaporé et dissocié, qui y empêchera toute diminution de la température. Ses molécules disgrégées seront toujours prêtes à s'agréger dès que leur perte continuelle de chaleur par rayonnement leur en fournit l'occasion et à empêcher de la sorte par la chaleur produite dans leur agrégation que la température baisse jamais d'une manière notable. Si d'ailleurs toutes ces molécules de la matière disgrégée ne suffisaient pas à cette tâche, il y en aurait encore beaucoup d'autres toujours prêtes à les seconder. Car d'après M. M. OSTWALD et ARRHENIUS, se fondant sur les principes de la thermodynamique, le soleil doit être riche en combinaisons endothermiques, qui en vertu du principe de l'équilibre mobile de VAN 'T HOFF combattront de même tout refroidissement par la chaleur, qui résultera de leur dissociation exothermique *j*). Ces combinaisons endothermiques se trouveront surtout dans les couches plus profondes où une haute température et une forte pression sont justement ce qui leur faut pour durer; et elles contiendront probablement tous ces métalloïdes, qui comme l'azote, le phosphore, le soufre, le sélénium etc., n'ont jamais été observés dans les couches extérieures du soleil.

Tous les procès, que je viens d'indiquer, comme résultant nécessairement de la perte de chaleur par rayonnement, tendront à

j) W. OSTWALD: Grundriss der Allgemeinen Chemie p. 312. Sv. A. ARRHENIUS: Lehrbuch der kosmischen Physik p. 162—163. J. H. VAN 'T HOFF: Etudes de Dynamique chimique, Amsterdam (1884). Mais voir aussi J. J. VAN LAAR: Zeitschrift für physik. Chemie LVII, 5, p. 633. Ueber endotherme und exotherme Dissociationsprozesse. D'après les calculs de M. VAN LAAR chaque dissociation exothermique doit devenir endothermique lorsque la température est très élevée et la dissociation par exemple du peroxyde d'azote (N_2O_2) du protoxyde (N_2O) et de l'ozone cesse d'être exothermique aux températures resp. de 4000, 9000 et 17000°.

empêcher que quelque part dans le soleil un changement de température se produise, capable d'y mettre la masse en mouvement. Ce seront donc ces procès, qui donneront à la tranquillité du soleil son explication. Mais cette explication ne pourra être complète, que lorsque la composition qualitative et surtout quantitative des couches solaires sera plus tard infiniment mieux connue qu'aujourd'hui; et elle deviendra en ce cas plus facile, si cette composition mieux connue nous aura révélé alors peut-être que, tout comme l'oxygène et le silicium forment à eux seuls les $\frac{3}{4}$ de notre croûte terrestre, il y aurait aussi dans les couches solaires un ou deux éléments tout aussi prépondérants. Comment la condensation d'un seul élément prépondérant peut rendre celle de tous les autres éléments impossible, se verra élucidé dans la note *g* de mon § 6.

Mais quels que puissent être d'ailleurs les résultats de recherches chimiques et astro-chimiques futures, la tranquillité du soleil est déjà maintenant certaine; car elle n'a pas été déduite des données de notre chimie terrestre; mais elle a été clairement établie par tous les arguments que nous avons étudiés dans mon premier paragraphe, comme le résultat immédiat des observations *k*).

La tranquillité du soleil ne sera troublée que lorsque les agrégations et les disgrégations isothermiques, que j'ai indiquées plus haut, auront produit un changement notable de volume.

A propos de toutes ces molécules disgrégées et agrégées s'opposant à toute diminution soudaine de la température du soleil, je

k) M. JULIUS, qui voit dans les déplacements spectraux dans l'atmosphère solaire un effet de dispersion anormale, a beaucoup contribué sans doute à faire ressortir l'in vraisemblance des éruptions terribles, que généralement encore on suppose. Mais sa théorie n'en demande pas moins, elle aussi, des courants et des tourbillons considérables, qui incompatibles selon moi avec la stratification du gaz solaire et attribués par lui à des changements de température que selon moi la masse refroidissante, mais disgrégée solaire ne doit pas nécessairement engendrer, me paraissent inadmissibles. Si HELMHOLTZ a démontré, comment de tels courants naissent dans notre propre atmosphère, qui en refroidissant doit bien nécessairement diminuer en température, et comment ces courants y forment alors des surfaces de discontinuité et des tourbillons; c'est à tort que M. M. EMDEN et JULIUS ont appliqué cette démonstration à l'étude de la masse solaire, qui peut très bien refroidir, comme je viens de le supposer dans le texte et comme la vapeur d'eau à 100° le nous prouve sans qu'il en résulte la moindre diminution de température. (Voir la note *g* de mon 6^{me} paragraphe). Il est vrai que ces tourbillons supposés solaires, avec leur densité diminuante vers leur axe, seraient éminemment propres à être vus comme des protubérances par dispersion anormale. Mais l'application qu'en fait M. EMDEN pour expliquer la formation des taches est beaucoup moins heureuse. Car cette application demande que les taches soient concaves, mais elles sont convexes le plus souvent (Voir la note *x* dans mon 6^{me} paragraphe). H. v. HELMHOLTZ: *Gesamm. Abh.* I p. 146, III p. 287—355. R. EMDEN: *Beiträge zur Sonnentheorie* Ann. d. Phys. [4] 7 p. 176—197. W. H. JULIUS: *Versl. v. d. K. Ak. v. W. te Amsterdam*, Verg. v. 28 Juni 1902. Een hypothese over den oorsprong der zonneprotuberanties.

me permettrai de rappeler ici l'idée principale de ma théorie de 1888 et d'anticiper un peu sur l'explication, que je tâcherai de donner plus loin de la périodicité des taches, en expliquant déjà maintenant, quelles sont les 5 ou 6 sources de la chaleur solaire.

Ces sources sont 1° une source abondante de chaleur actuelle et 2° quatre sources de chaleur potentielle, qui ne fonctionnent qu'en vertu de la chaleur, que le soleil perd sans relâche et empêchent que de cette perte résulte jamais quelque diminution soudaine de la température. Ces quatre sources sont les sources mécanique, physique, chimique et endo-chimique, qui sont respectivement alimentées par la contraction de la matière dilatée, par la condensation de la matière évaporée, par la combinaison chimique de la matière dissociée et par la décomposition de la matière endothermique associée.

Outre ces cinq sources de la chaleur solaire, il y en a probablement encore une sixième: la source de chaleur radiochimique. Cette source demande la présence d'une substance radioactive. Si de telles substances n'avaient été trouvées sur notre terre que dans les quelques minerais assez rares, qui servent à les préparer, on n'aurait que peu de raison de leur attribuer un rôle important dans la production de la chaleur solaire. Mais M. M. ELSTER et GEITEL, et après eux beaucoup d'autres observateurs, ont fait voir, que ces substances, bien loin d'être rares, manifestent ici tout partout leur présence dans le sol, dans l'eau et dans l'air *l*). Il n'est donc nullement improbable, que des substances aussi généralement répandues sur notre terre se trouvent aussi dans le soleil. Si l'hélium, qui comme produit de leur désintégration les accompagne toujours dans leurs minerais *m*) et notamment aussi dans la cleveïte, d'où M. RAMSAY l'a séparé *n*), est un élément de l'atmosphère solaire *o*) il est là peut-être aussi le produit de cette même désintégration. Il est vrai toutefois, qu'aucuns des rayons caractéristiques des substances radioactives ne parviennent du soleil jusqu'à nous. Mais M. M. STRUTT et JOLY ont démontré, comment ces rayons doivent pouvoir être complètement absorbés dans les couches extérieures de notre atmosphère *p*); et quant aux rayons ordinaires de leur vapeur

l) RUTHERFORD: Radioactivity (1904) p. 345. ELSTER u. GEITEL: Phys. Zeitschr. 3 p. 574 (1902), 4 p. 522 (1903).

m) RUTHERFORD a. SODDY: Phil. Mag. 1902 p. 582. RAMSAY a. SODDY: Proc. R. Soc. 72 p. 204 (1903).

n) RAMSAY: Chem. News 29 March 1895. RUNGE: Nature 6 June 1895.

o) L'hélium a été découvert pendant l'éclipse de 1868. M. M. LOCKYER et FRANKLAND n'ayant pu l'identifier avec quelque élément terrestre, c'est FRANKLAND qui lui a donné son nom.

p) STRUTT a. JOLY: Nature Oct. 15 1903. Voir la note u suivante.

incandescence *q*) leur absence dans le spectre solaire ne saurait nous surprendre; car, les éléments radioactifs étant les plus lourds qu'on connaisse et la stratification du gaz solaire étant telle que les éléments à poids moléculaire moyen plus grand que 159 sont déjà trop lourds pour s'élever au dessus de la photosphère, il ne semble guère possible qu'un élément radioactif éventuel puisse jamais atteindre la hauteur qu'il lui faudrait pour manifester sa présence.

A ce propos je ferai remarquer ici en passant, que si en vertu de sa grande densité, la matière radioactive éventuelle n'est pas présente au dessus de la photosphère, mais seulement au dessous, elle sera empêchée par la matière condensée dans la photosphère de lancer ses rayons Beta et Gamma au dehors. Mais cet empêchement n'existera pas au même degré là, où la photosphère étant trouée, nous voyons des taches. De chaque tache échappera par conséquent, tout comme de la cuvette de plomb dans les expériences de M^{me} CURIE *r*) un faisceau vertical de rayons Beta et Gamma. Or lorsqu'un tel faisceau rencontre notre terre, il produira dans les couches extérieures de notre atmosphère tous ces phénomènes électriques, qui ont déjà été étudiés par M. ARRHENIUS *s*) et par M. M. BIRKELAND et PAULSEN *t*) comme dus, mais sans l'intervention directe des taches, à des rayons cathodiques solaires et comme la cause de nos aurores polaires et de nos perturbations magnétiques, et qui causeront par conséquent ces phénomènes terrestres d'autant plus fortement que les taches seront plus grandes et plus nombreuses. Ne serait-ce pas là l'éclaircissement du rapport qui existe entre ces phénomènes terrestres et les taches du soleil

q) DEMARÇAY: C. R. 127 p. 1218 (1898); 129 p. 716; 131 p. 258.

r) M^{me} CURIE: Thèse présentée à la Faculté des Sciences de Paris 1903. E. RUTHERFORD: Radio-activity p. 92.

s) Sv. ARRHENIUS: Lehrb. d. Kosm. Phys. p. 152.

t) A. PAULSEN: Bull. de la Soc. belge d'Astr. Oct. 1906 p. 381. Théorie nouvelle de l'aurore polaire. „On sait que certains phénomènes célestes ont amené plusieurs astronomes et physiciens à admettre que le soleil émet des rayons cathodiques; c'est aussi sur cette supposition, que M. BIRKELAND a fondé ses théories sur l'aurore polaire" M. PAULSEN fait la même supposition et „cherche la cause de l'aurore polaire dans une immense ionisation et électrisation négative des couches supérieures de l'atmosphère au dessus de la zone de maximum de l'aurore, de sorte que cette altération de l'air se renouvelle chaque jour en commençant aux limites de l'atmosphère." Les recherches de Sir W. HUGGINS et de Lady HUGGINS (Astroph. Journ. XVIII Sept. 1903. On the spectrum of the Spontaneous luminous radiation of Radium at ordinary temperatures) ont prouvé d'ailleurs qu'une forte ionisation de l'azote par le radium, sans intervention de forces électriques extérieures, produit une luminescence, dont le spectre aux longueurs d'onde 3372, 3575, 3918 et 4285 est le même que celui des rayons cathodiques de l'azote, qui est aussi le spectre principal de l'aurore polaire (PAULSEN: loc. cit. p. 387; ARRHENIUS: loc. cit. p. 910). Mais si la luminescence de nos aurores polaires peut être attribuée de la sorte à des rayons cathodiques du soleil, il est fort bien possible, que la luminescence de la

et l'explication de l'égalité de leur périodicité undécennale *u*)?

La direction généralement verticale des faisceaux qui échapperaient des taches répondrait immédiatement aussi à la découverte de M. ELLIS (M. N. 64 p. 228) que les perturbations magnétiques et les aurores polaires ont chaque année deux maxima (un en Mars et un en Septembre) et deux minima (un en Juin et un en Décembre). Ces maxima et ces minima résulteraient en effet de l'inclinaison de l'axe solaire sur l'écliptique, inclinaison qui causera que la parallèle unique où se trouveront les taches qui, à normales justement dirigées vers nous, seront particulièrement perturbatrices, aura en Mars et en Septembre une latitude resp. australe ou boréale de $7\frac{1}{4}^{\circ}$, tandis qu'en Juin et en Décembre cette parallèle unique coïncidera avec l'équateur.

Or comme à la latitude de $7\frac{1}{4}^{\circ}$ les taches ne sont généralement pas rares, tandis qu'elles diminuent vers l'équateur, où elles font le plus souvent complètement défaut, il est donc évident qu'en Mars et en Septembre il y aura toujours beaucoup plus de taches particulièrement perturbatrices et partant beaucoup plus de perturbations magnétiques et d'aurores polaires qu'en Juin et en Décembre, tout comme M. ELLIS l'a déduit des recherches de Greenwich et de celles de M.M. TROMHOLT, I. F. SCHROETER, MORSMAN et MOUREAUX.

matière coronale du soleil lui-même et celle des protubérances doivent être attribuées aussi à ces mêmes rayons. En ce cas on comprendrait facilement pourquoi, durant la période du max. des taches les rayons principaux de la couronne émanent surtout de la zone où les taches abondent et ont alors la forme caractéristique d'une étoile à quatre rayons. (LOCKYER: *Solar Physics* p. 276. YOUNG: *the Sun* p. 238. SCHAEERLE: *Publ. Astr. Soc. of the Pac.* N°. 7). M. SCHAEERLE admet que la matière coronale elle-même est lancée hors des taches, tandis que d'après moi cette matière ne bougerait pas mais deviendrait visible là où les rayons, qui échappent des taches, la font luminescer. La répartition des protubérances sur la surface du soleil répondrait très bien aussi à cette explication nouvelle. C'est ce que je ferai voir à la fin de mon 10^{me} §.

u) HORREBOW: (1775). (WOLF: *Geschichte der Astronomie* 518). SCHWABE: *Astr. Nachr.* N°. 495 (1843). *Kosmos* v. A. v. HUMBOLDT: 3 Buch, 2^e Abth. p. 401 (1851). LAMONT: *Pogg. Ann.* 84 p. 580 (1851). SABINE: *Phil. Trans.* 142 p. 103 (1852). R. WOLF: *Mitth. d. Naturf. Ges.* p. 183 (1852). GAUTIER: *Arch. d. Sciences* 21 p. 194 (1852). R. WOLF: *Die Sonne u ihre Flecken* p. 30 (1859). HANSTEEN: *Brief im Mitth. d. Naturf. Ges.* IX (1859). FRITZ: *Die Beziehungen d. Sonnenflecken zu d. magn. u. meteor. Ersch. d. Erde* Haarlem (1878). W. ELLIS: *Proc. R. Soc.* 63 p. 64 (1899). MAUNDER: *Knowledge* May 1892 *Monthly Not.* 64 p. 205; 65 (1904), *Journ. Br. Ast. Ass.* XVI p. 140 (1906). En admettant mon hypothèse de rayons, que la matière radioactive du soleil lancerait à travers les taches au dehors, on voit tout de suite qu'il y a trois luminescences distinctes, qui devront nous montrer la même périodicité que les taches. Or ces trois luminescences présentent la même périodicité en effet. Ce sont 1° la luminescence de nos aurores polaires, 2° la luminescence de la couronne solaire, dont, en vertu du déplacement des taches durant la période, la forme changera périodiquement aussi et 3° la luminescence des comètes, lorsqu'au périhélie elles rencontrent les rayons électrisants, qui s'échappent des taches. C'est ainsi par exemple, que d'après les recherches de M. BERBERICH, la comète d'ENCKE se voit toujours plus lumineuse, lorsque le soleil est dans la période du max. de ses taches et que dans cette période la découverte de comètes très petites réussit

Des cinq ou six sources de chaleur, dont le soleil dispose, la source mécanique, qui est alimentée par la contraction incessante de sa masse, est généralement considérée comme la plus puissante. C'est à elle surtout que, d'après la théorie de HELMHOLTZ, est

plus souvent (BERBERICH: *Astron. Nachr.* N°. 2836 et 2837). D'après M. STEEN, les orages du Danemark et de la Péninsule scandinave auraient eu aussi durant ces dernières 30 années la même périodicité que les taches du soleil. (*Journ. of the Br. Astr. Ass.* (1906) 17 p. 50). Comme les faisceaux que je suppose, doivent ioniser notre atmosphère et comme d'après les expériences de M. C. T. R. WILSON (*Phil. Trans.* 1897 p. 265, 1899 p. 403 et 1900 p. 289) les ions alors produits fonctionnent comme des noyaux de condensation aqueuse, il ne semble nullement surprenant que ceteris paribus avec les taches il y aurait aussi les cirrus, les halos, la pluie et la hauteur de l'eau dans les rivières, qui augmenteraient (MELDRUM: *On a supposed Periodicity of the Rainfall*, read for the Meteor. Soc. of Mauritius in Oct. 1872. LOCKYER: *Nature* Vol. VII. FRITZ: *Die Beziehungen der Sonnenflecken etc.* Haarlem 1878 p. 109—160, 265—270. SCHWABE: *Astr. Nachr.* N°. 638. v. HUMBOLDT *Kosmos*: IV p. 145. H. KLEIN: *Zeitschrift d. oestr. Ges. für Met.* 1872, *Astr. Nachr.* 1915. WOLF: *Astr. Mitth.* 30, 33. TROMHOLDT: *Heis Wochenschrift für Astr.* 1874 N°. 43). Citons encore après toutes ces recherches déjà anciennes les résultats tout récents que M. M. MAC DOWALL et BUCHAN ont obtenus à ROTHESAY et en ECOSSE et qui ont fait voir de nouveau ce rapport qui pourrait exister entre la pluie et les taches du soleil. (*Journ. of the Brit. Astr. Ass.* March 1907 p. 291).

Comme le P. FENYI me l'a fait remarquer, mon hypothèse de rayons β et γ lancés hors des taches du soleil et absorbés dans les couches extérieures de notre atmosphère, pourrait répondre aussi au réchauffement, que ces couches à partir de la hauteur de 11000 Mètres montrent toujours. Les Publications de la commission internationale pour l'Aérostation scientifique, fondée en 1900 par M. M. L. TEISSERENC DE BORT et H. HERGESELL, ont fait clairement ressortir ce réchauffement remarquable, qui a été découvert par M. M. TEISSERENC DE BORT et R. ASSMANN. C'est ainsi par exemple qu'un ballon-sonde lâché le 3 Août 1905 à Strasbourg accusait une température de -62.7° à la hauteur de 14490 Mètres, mais une température de 22.7° plus élevée à la hauteur de 25800 Mètres, où le froid n'était plus que de -40° . Dans les premiers trois volumes de ces Publications (1903—1904) j'ai compté au moins 50 cas analogues. Une des ascensions de ballon-sonde les mieux réussies fût celle du 9 Février 1905 à Strasbourg, où l'on vit le froid diminuer de -68.5 à -57.8° alors qu'à partir de 11340 Mètres le ballon monta encore 3680 Mètres plus haut. (HERGESELL: *Beitrag zur Physik der freien Atmosphäre* Bd. I p. 143). La cause de ce réchauffement des couches atmosphériques extérieures est encore inconnue. (HERGESELL: loc. cit. p. 143). Ce réchauffement pourrait résulter peut-être de l'absorption des rayons ultraviolets du soleil (FENYI: *Meteorol. Zeitschrift*, Aug. 1907 p. 355. V. SCHUMANN: *Sitz. Ber. d. Wiener Akad.* 102 p. 667. LENARD: *Drudes Ann.* 1 p. 498; 3 p. 298 (1900)). Mais l'absorption de rayons β et γ pourrait y collaborer aussi. En ce cas on verra le réchauffement augmenter avec les taches. S'il était possible de munir les ballons-sonde d'instruments capables de nous révéler là haut la présence de rayons β et γ éventuels, l'explication du réchauffement pourrait en profiter. Qu'on ne croie pas d'ailleurs que si ces rayons éventuels sont arrêtés bien vite dans les couches extérieures de notre atmosphère, il doive donc leur avoir été impossible aussi de traverser l'atmosphère du soleil. Car tout près de leur source ces rayons auront une concentration et une vitesse beaucoup plus grandes, que lorsque, exténués et plus ou moins dispersés, ils seront arrivés jusqu'à nous. A leur source ils pourront avoir une puissance, dont nos expériences avec quelques milligrammes de Radium n'ont pu nous donner une juste idée. Si M. RUTHERFORD avait besoin de 30 milligrammes de bromure pour obtenir des rayons encore reconnaissables après avoir traversé 3 décimètres de fer, il est permis de douter qu'un milligramme eût déjà montré le même pouvoir pénétrant (*Radio-activity* p. 141). M. H. BECQUEREL a démontré d'ailleurs que les rayons β du

conférée la tâche immense d'entretenir la chaleur solaire *v*). Il est probable toutefois, que dans l'accomplissement de cette tâche immense, elle est énergiquement secondée par le fonctionnement de la source endo-chimique. Telle est l'opinion d'ARRHENIUS, qui ne voit même aucune difficulté à admettre, que les procès chimiques, qui doivent résulter du refroidissement du soleil puissent lui conserver son pouvoir rayonnant non diminué, non seulement durant les millions d'années, qu'en dépit des exigences plus fortes des géologues *w*) et de M. G. H. DARWIN *x*), les calculs de HELMHOLTZ et de Lord KELVIN *y*) lui ont accordés tout au plus, mais durant des milliards de siècles *z*)!

Radium sont excessivement complexes et composés de différents rayons, dont les uns ont une vitesse plusieurs fois plus grande que les autres (C. R. 130 p. 206, 372, 810, 979 RUTHERFORD: loc. cit. p. 99). Or comme parmi ces différents rayons ce ne seront que ceux dont la vitesse est exceptionnellement grande, qui détermineront en somme le pouvoir pénétrant, et comme ces rayons exceptionnels, qui seuls auront réussi à traverser un écran très épais, seront toujours nécessairement rares, cette rareté pourra les empêcher de manifester leur présence s'ils proviennent d'une petite quantité de matière, mais cet empêchement n'existera plus si la masse radioactive est suffisamment grande. Voilà pourquoi les rayons β du soleil pourront montrer un pouvoir pénétrant beaucoup plus grand que ceux qui proviennent des milligrammes de bromure dans nos laboratoires.

v) HELMHOLTZ: Wechselwirkung der Naturkräfte. Ein populär-wissenschaftlicher Vortrag gehalten am 7 Febr. 1854 in Königsberg in Preussen. (Pop. Wiss. Vorträge 2tes Heft p. 99—136). „Aus denselben Formeln ist abzuleiten, dass eine Verkleinerung des Sonnenhalbmessers um $\frac{1}{10000}$ noch eine Arbeit äquivalent 2861 Wärmegraden in einer der Sonne gleichen Wassermasse erzeugen würde. Und da sie nach POUILLET jährlich eine Wärmemenge entsprechend $1\frac{1}{4}$ Grad in einer solchen Wassermasse verliert, so würde jede Verdichtung für 2289 Jahre den Verlust decken". Voir aussi J. HOMER LANE: Amer. Journ. of Sc. 1870 p. 57. On the theoretical Temperature of the Sun under the hyp. of a gaseous Mass, maintaining its Volume by its internal Heat and depending on the Laws of Gases as known to terrestrial experiment. A. RITTER: Anwendungen der mechanischen Wärmetheorie auf kosmologische Probleme 1882. On y voit exposé la loi, que dans une sphère gazeuse qui se contracte et rayonne dans l'espace, le produit du rayon et de la température au centre est constant. Sir W. THOMSON: Phil. Mag. XXIII 1887 p. 287. On the Equilibrium of a Gas under its own Gravitation only. Je ferai remarquer ici encore, que la contraction de 90 Mètres par an, que demande l'explication de HELMHOLTZ, est tellement petite qu'on devra attendre des milliers d'années avant de pouvoir la constater. Car il faudra à la photosphère 8000 ans pour perdre des 1924 secondes, qu'elle mesure maintenant rien qu'une seule seconde (YOUNG: General Astronomy 1900 p. 244).

w) MILLARD READE: Roy. Soc. Jan. 23 (1879). JULY: An estimate of the geological Age of the Earth. Transact. of the Roy. Dubl. Soc. VII Series III, 1902, p. 23—66.

x) G. H. DARWIN: Brit. Ass. Inaugural Address, Nature Aug. 31 1905 p. 444.

y) Lord KELVIN: Appendix E of THOMSON and TAIT'S Natural Philosophy.

z) ARRHENIUS: Lehrb. d. Kosm. Phys. p. 163. Voici comment ARRHENIUS termine son Chapitre du Soleil: „Diese Ueberlegung zeigt, dass es nicht unmöglich ist, an zu nehmen, dass die chemischen Prozesse, welche sich bei der Abkühlung der Sonne abspielen, ausreichen können, um die Ausstrahlung der Sonne während Hunderten von Milliarden Jahren auf ihre jetzigen Stärke zu erhalten. Daher ist es sehr wohl möglich und sogar wahrscheinlich, dass die chemische Energie der Sonne bei weitem die mechanische übertrifft und auch die bedeutendste Rolle zur Erhaltung der Sonnenstrahlung spielt, ungefähr wie für uns auf der Erde die chemischen Wärmequellen ohne Vergleich die

Il n'est pas impossible non plus, que la source radiochimique soit excessivement puissante. Si un gramme de Radium engendre, d'après l'évaluation de MM. CURIE et LABORDE, 100 calories par heure *a*) et si le soleil, d'après les calculs de LANGLEY émet 8.28×10^6 calories par heure et par centimètre carré, il en résulte d'après M. W. E. WILSON, qu'une quantité de Radium ne pesant qu'un quatre cent-millième de la masse du soleil serait déjà suffisante pour rendre compte de toute la chaleur, que le soleil produit *b*).

§ 3. *Fonctionnement intermittent des sources de chaleur physique et chimique causant la plupart des phénomènes lumineux dans les couches extérieures du soleil.*

Si les sources mécanique et endo-chimique, peut-être secondées par la source radiochimique, sont les plus puissantes, dont le soleil dispose et suffisent complètement à l'entretien de sa chaleur, les sources moins cachées, physique et chimique sont bien faibles en comparaison. Elles n'en produisent pas moins les phénomènes lumineux les plus remarquables. Comme leur fonctionnement ne peut avoir lieu que dans les couches extérieures du soleil, où la température et la pression ne sont pas trop excessives, et comme ces couches extérieures sont précisément celles que nous pouvons observer le mieux, il en résulte que pour comprendre les phénomènes, que la surface solaire nous fait voir, c'est surtout le fonctionnement des sources physique et chimique, qu'il faut étudier. Cette étude nous fera voir, que ces deux sources de chaleur s'efforcent bien constamment à aider à l'entretien de la chaleur solaire, mais elle fera voir aussi que ces deux sources s'épuisent toujours bien vite à cette tâche et demandent de temps en temps beaucoup de chaleur actuelle pour se restaurer. Et comme la chaleur qu'il leur faut alors chaque fois est à peu près égale à celle qu'elles peuvent produire, le rendement final de ces deux sources est insignifiant. Si par conséquent ces deux sources ne peuvent efficacement collaborer à l'entretien de la chaleur solaire, elles n'en produisent pas moins un phénomène intermittent de premier ordre, selon qu'alternativement leur fonctionnement viendra en aide aux sources plus puissantes et toujours actives ou les contrariera. Dans le premier cas elles cause-

wichtigsten sind." Ces milliards de siècles seraient bien rassurants, si les considérations de M. VAN LAAR, dont j'ai parlé dans la note *j* précédente, ne les avaient pas rendus trop douteux.

a) CURIE et LABORDE: C. R. 127 (1903). RUNGE u. PRECHT: Sitz. Ak. Wiss. Berlin N°. 38 (1903).

b) W. E. WILSON: Nature July 9 1903.

ront le minimum des taches et dans le second le maximum. C'est ce que je tâcherai de démontrer dans la Première Partie de ce Mémoire.

Si dans mes Mémoires précédents je me suis efforcé d'éclaircir la périodicité des taches d'une toute autre manière *c)*, c'est parce qu'en commençant à élaborer ma théorie j'ai cru longtemps que les sources physique et chimique suffisaient pour expliquer tout ce qu'il y a d'intermittent dans tous les phénomènes que le soleil et les étoiles rouges variables nous présentent. Mais en continuant à développer ma théorie, j'ai vu qu'elle gagnait énormément à être adaptée à la belle théorie de HELMHOLTZ et aux idées d'OSTWALD et d'ARRHENIUS, et que c'était surtout mon explication de la périodicité des taches et des étoiles rouges variables qui en profiterait.

Il n'en reste pas moins vrai, qu'ainsi que je l'ai déjà démontré en 1888 *d)*, les sources de chaleur physique et chimique me semblent éminemment propres à expliquer dans les couches extérieures solaires maint phénomène intermittent. Lorsque par exemple dans un mélange gazeux $A + B + R$, où A et B représentent des corps combinables, dont la combinaison est entravée, non par une température trop haute, mais par la présence abondante *e)* d'une vapeur condensable R , quelque perte de chaleur soudaine (comme elle doit résulter dans l'atmosphère solaire de l'apparition subite de taches ou de pores moins rayonnants dans le niveau photosphérique) fait rapidement condenser cette vapeur et active ainsi le fonctionnement de la source physique, un fonctionnement intermittent de cette source se conçoit aisément. Car si maintenant les molécules R doivent se condenser très vite, parce qu'il leur incombe alors la tâche immense d'empêcher tout refroidissement local du soleil, leur retraite précipitée donnera à la fin aux molécules A et B la concentration, qu'elles demandent pour arriver, soit directement, soit après une courte période d'existence simultanée instable, à leur combinaison. Or dès que cette combinaison commence et que fonctionne par conséquent la source chimique, la source physique ralentira son action et elle la cessera même tout à fait si la chaleur que

c) Théorie du Soleil (1892) p. 145—168.

d) Verklaring van de veranderlijkheid der Roode Sterren p. 1. Essai d'une Théorie du Soleil et des Etoiles variables 1888 p. 8—12.

e) Tandis que la vapeur d'eau dissociée $A + B$ se recombine bien vite et complètement en eau lorsqu'on refroidit cette vapeur, cette recombinaison n'a plus lieu aussi complètement, lorsque cette vapeur est mélangée à une grande quantité d'un gaz inerte R . C'est ainsi par exemple qu'en refroidissant un mélange $A + B + R$ d'eau dissociée $A + B$ et d'acide carbonique R Deville put recueillir du gaz tonnant, c'est à dire des molécules $A + B$, qui se seraient sûrement recombinées si les molécules R d'acide carbonique n'avaient pas été présentes. (DEVILLE: Leçons sur la dissociation. DEBRAY: Dict. de Chimie par A. WURTZ, Art. Dissociation p. 1174).

la source chimique produit est suffisamment grande. Si cette chaleur est plus grande que celle qui suffit pour empêcher tout refroidissement, elle causera bien vite la réévaporation des molécules *R*, précédemment condensées et la source chimique travaillera alors à sa propre extinction. Car les molécules *R* réévaporées viendront obstruer cette source de nouveau et mettront ainsi un terme à son fonctionnement. A la source physique au contraire ces molécules rendront son activité première et le fonctionnement de cette source recommencera; et ainsi de suite.

Quoique cette explication du fonctionnement intermittent des sources de chaleur physique et chimique me semble assez plausible, je ne l'aurais cependant pas imaginée peut-être, si l'observation des phénomènes lumineux dans l'atmosphère du soleil ne me l'avait suggérée. Ces phénomènes m'ont paru exiger instamment une explication pareille. C'est ce qui me reste à faire ressortir dans cette Introduction.

A cet effet je ferai remarquer d'abord que, si de ce fonctionnement intermittent il ne doit pas résulter quelque changement de température, il doit bien en résulter une production intermittente de deux sortes de lumière. Car tant que la source physique sera en action les molécules *R* condensées luiront d'une lumière blanche à spectre continu et tant que la source chimique sera à l'oeuvre les molécules *A* et *B* produiront en se combinant une luminescence chimique à raies brillantes et colorées *f*).

Or, l'intermittence de ces deux sortes de lumière s'observe à l'extérieur du soleil très souvent. Si j'en excepte maintenant l'apparition intermittente des taches, qui sera mieux expliquée plus tard d'une tout autre manière, l'apparition intermittente d'une matière nuageuse *R* n'est pas rare du tout. On la voit souvent dans la photosphère, dans les banderolles coronales et surtout dans les protubérances et les taches. Dans les protubérances cette matière nuageuse ne peut être bien observée que durant les éclipses. On voit alors que beaucoup de protubérances sont tellement remplies de matière condensée *R*, qu'on les a désignées comme des protubérances blanches *g*). Mais on voit alors aussi, que cette blancheur

f) E. WIEDEMANN: Pogg. Ann. N. F. 37 p. 177–248. W. SIEMENS: Wiedem. Ann. 18 p. 311 (1883), Nature Jan. 28 (1892) p. 312. E. PRINGSHEIM: Wiedem. Ann. 45 (1892) p. 428 (1893) p. 347. „Wir kennen keinen einzigen Vorgang, bei dem gasförmige Elemente durch blosse Temperaturerhöhung ohne electricische oder chemische Energie zum leuchten gebracht werden. Andererseits ist man durch die Betrachtung der Leuchtprocesse genöthigt an zu nehmen, dass Electricität und chemische Umsetzung für sich allein im Stande sind, ohne Rücksicht auf die Temperatur Leuchten von Gasen hervorzubringen”.

g) TACCHINI: Rapp. d. eclisse del 1870 tav. V; Mem. d. Spett. Ital.: Sul' eclisse di Sole d. 19 Agosto 1887. SECCHI: le Soleil II p. 78 fig. 174 et 175. LOCKYER: Chem.

n'est que passagère; car même durant les courts moments de la totalité on a vu les protubérances blanchir et rougir tour à tour! *h*) Une vérification plus éclatante de mon idée ne saurait être imaginée. Tant que les protubérances sont blanches nous y voyons les molécules *R*, qui en se condensant font fonctionner la source de chaleur physique et lorsqu'elles sont devenues rouges, nous voyons, qu'alors les molécules *A* et *B* y sont à l'oeuvre pour faire fonctionner la source de chaleur chimique *i*).

Dans les taches on a vu la matière condensée *R* produire 1° des éclairs intermittents, que PETERS a décrits comme traversant quelquefois l'ombre des taches avec des vitesses d'au moins 200 millions de mètres par seconde *j*); 2° une scintillation, que TROUVELOT a remarquée au dessus de l'ombre des taches y faisant l'effet d'une neige tombant par rafales *k*); 3° des plaques d'un éclat intense, que CARRINGTON et HODGSON ont vues exister quelques minutes sur le bord d'une tache se déplaçant avec des vitesses allant jusqu'à 33 lieues par seconde *l*) et 4° les voiles roses, que SECCHI a souvent observés à l'intérieur des taches et évidemment produits d'après lui par la transformation d'une matière blanche préexistante *m*). Ici

of the Sun p. 407. EGOROF: C. R. 109 p. 292. HANDRIKOF: Himmel u. Erde Oct. 1889 p. 35. HALE: Astron. Nachr. N°. 3053. HALE: Astroph. Journ. III p. 374—387. ARAGO: Annuaire 1846 p. 460. KLEIN: Das Sonnensystem p. 36. JOHNSTONE STONEY: Phil. Mag. Dec. 1868 p. 450. L'opacité des protubérances semble indiquer de même qu'elles contiennent souvent une matière poussiéreuse. Lorsque dans les protubérances, dit SECCHI (le Soleil II p. 239) „deux jets d'hydrogène incandescent se croisent, ils n'ont pas un éclat plus vif au point d'intersection, ce qui arriverait cependant si les rayons émanés de celui, qui est en arrière pouvaient traverser l'autre; ils se cachent réellement l'un l'autre comme des corps opaques”.

h) „LITTELOW saw them change from white to red and from red to violet and then back again through the reverse order” (LOCKYER: Solar Phys. p. 108).

i) D'après le P. FENYI ce sont les parties condensées des éruptions métalliques, qui produisent les lueurs blanches (Publ. d. Haynald Obs. VI 1892 p. 27). Voir aussi FENYI: Mem. d. Soc. d. Spettr. Italiani XXI (1892). Phénomènes observés sur le grand groupe de taches en Février 1892. Il s'agit ici d'une protubérance blanche, que le P. FENYI a observé spectroscopiquement sur le bord du soleil non éclipsé „dans le milieu de la protubérance se trouvait une poussière de matière solide ou fluide, dont l'étendue en latitude et en hauteur atteignait 20 à 30 mille kilomètres. M. HALE voit dans la lueur quelquefois blanche des protubérances l'effet d'éruptions faculaires violentes faisant de temps en temps monter la poussière photosphérique à des hauteurs considérables (Astron. and Astroph. XIII p. 119). Après avoir cité cette explication de M. HALE, M^{lle} CLERKE ajoute: (Probl. p. 124). „The explanation may pass muster, since no better has been offered”. Mon explication me semble meilleure et mieux en harmonie avec tous les phénomènes, qui démontrent la tranquillité du soleil.

j) PETERS: Proc. of the Am. Ass. for the adv. of Sc. Vol. IX. ZÖLLNER: Beobachtungen von Protub. der Sonne. Spectralanalyse von ROSCOE 1890 p. 273.

k) TROUVELOT: Bulletin Astron. II. LOCKYER: Chem. of the Sun p. 411.

l) CARRINGTON: Monthly Not. Nov. 1859. YOUNG: le soleil p. 93.

m) SECCHI: le soleil I p. 104 (fig. 53, 54, 55).

encore la vérification de mon idée me semble bien convaincante. Dans la matière blanche préexistante de SECCHI nous voyons briller les molécules condensées *R* et dans ses voiles roses nous observons la luminescence chimique des molécules *A* et *B*. On trouvera encore d'autres vérifications de mon idée dans le paragraphe suivant et dans une observation du P. PERRY, qui vit aussi dans une tache une lueur rougeâtre intermittente *n*).

§ 4. *Les protubérances considérées comme des luminescences.*

Mon explication des principaux phénomènes solaires et des protubérances en particulier comme résultant du fonctionnement intermittent des deux sources de chaleur physique et chimique a été développée si longuement dans mes Mémoires précédents, que je n'ai pas besoin d'y revenir maintenant. Ce besoin est ici d'autant moins grand, que ma théorie des protubérances n'a aucun rapport direct avec l'objet principal de ce Mémoire. Si les protubérances n'étaient pas les luminescences chimiques, que je crois y voir, mais si elles étaient des phénomènes électriques, comme M. DESLANDRES l'a déjà supposé *o*) et comme depuis la découverte des corps radioactifs cela est devenu plus plausible *p*), ou si elles n'étaient dans la mer gazeuse du soleil que les brisants qu'y voit M. JULIUS par dispersion anormale *q*), le mécanisme de la périodicité des taches, que je tâcherai d'expliquer, n'en fonctionnerait pas moins bien. Si néanmoins quelques particularités de mon explication des protubérances *r*) seront ici rappelées, ce n'est que pour faire voir, que mon explication ne présente aucune de ces difficultés insurmontables, qui nous ont démontré l'impossibilité d'interpréter le spectre des protubérances au moyen du Principe de DÖPPLER *s*).

Les protubérances sont d'après ma théorie des luminescences chimiques passagères là où dans l'atmosphère tranquille du soleil un procès chimique est causé par le refroidissement. Ce procès chimique est probablement une combinaison exothermique d'éléments

n) PERRY: Royal Inst. of Gr. Britain May 24 1889. Voir aussi les observations qu' a faites Mr. E. S. MARTIN le 17 Sept. 1893. (Popular Astron. Vol. I p. 91).

o) DESLANDRES: Knowledge Dec. 1893 p. 231.

p) Voir la note *t* à la page 20 plus haut.

q) W. H. JULIUS: Sectie Verg. v. h. Utr. Gen. 9 Juni 1902 p. 12. Astron. Nach. 3672. Versl. d. Afd. Natuurkunde der K. Ak. v. W. te Amsterdam van 28 Juni 1902. La dispersion anormale n'a pas encore été constatée pour l'hydrogène, que je sache.

r) Astronomy and Astroph. XIII p. 230—235, Théorie du soleil p. 54—60.

s) Voir plus haut aux pages 4, 7 et les notes *f*, *q*, *s*, *w*, resp. au bas des pages 4, 8, 9 et 11.

A et *B* combinables, mais il pourrait être aussi une décomposition d'une combinaison endothermique. Quoi qu'il en soit, les protubérances ne sont jamais plus chaudes, mais seulement plus lumineuses que l'atmosphère où on les voit. Bien loin de nous montrer des déplacements fabuleux, elles fonctionnent au contraire comme un frein automatique puissant, empêchant tout mouvement, qu'une diminution de la température pourrait causer. Leur luminescence chimique n'a d'ailleurs rien de surprenant, car la même luminescence a été découverte aussi dans toutes nos flammes terrestres où c'est elle précisément qui y cause des raies spectrales brillantes *t*). Mais dans nos flammes, où c'est un gaz se réchauffant, qui la produit, la luminescence n'est jamais aussi pure que dans les protubérances, où c'est un gaz à température constante, qui la cause et où par conséquent cette luminescence est complètement exempte d'effets thermiques, qui dans nos flammes sont toujours nécessairement présents.

Dans les astres on observe des luminescences chimiques tout partout où quelque cause de refroidissement doit être admise. On les voit par exemple dans les couches extérieures du soleil surtout au dessus des zones royales, où en vertu du moindre pouvoir émissif du contenu gazeux des taches il y a une prédisposition particulière

t) Lorsqu'en 1888 l'idée me vint d'expliquer les protubérances comme n'étant pas plus chaudes mais seulement plus lumineuses que les parties environnantes de l'atmosphère tranquille du soleil, la luminescence chimique dans nos flammes terrestres n'était pas encore connue. Mais cela ne m'a pas empêché de postuler cette luminescence déjà alors comme l'unique moyen de comprendre les phénomènes lumineux dans l'atmosphère relativement tranquille du soleil. (Théorie du Soleil p. 60). Quatre ans plus tard cette luminescence a été expérimentalement constatée par M. PRINGSHEIM, qui démontra qu'un même gaz produira des raies spectrales ou ne les produira pas, selon qu' à température égale il sera oui ou non le siège d'un procès chimique (voir la note *f* précédente). Si ma postulation avait été un peu osée en 1888, elle a donc été brillamment justifiée depuis lors. Voir aussi R. v. HELMHOLTZ: Die Licht und Wärmestrahlung verbrennender Gase, Berlin 1890. W. H. JULIUS: Die Licht und Wärme strahlung verbrannter Gase, Berlin 1890. LANGLEY and VERY: Am. Journ. of Sc. 1890 p. 97—113. M. M. HARTMANN et EBERHARD ont démontré aussi que les raies caractéristiques, que produit une substance dans l'étincelle électrique, ne répondent nullement à une chaleur excessive, mais résultent d'une luminescence, qu' à propos de la raie 4481 du Magnesium, qui est considérée par M. J. SCHEINER comme un indice d'une température très haute, LIVEING et DEWAR avaient déjà clairement reconnue en 1888. (J. HARTMANN: Astroph. Journ. XVII p. 277. 1903. LIVEING a. DEWAR: Proc. R. Soc. 44 p. 241—242. J. SCHEINER: Sitz. Ber. Berlin Ak. d. Wiss. März 1894). Nous savons d'ailleurs que dans les tubes de Geissler le gaz peut devenir lumineux à la température ordinaire et même au dessous. C'est ce qui a été calorimétriquement démontré e. a. par M. M. WIEDEMANN et HASSELBERG (H. KAYSER: Lehrb. d. Physik p. 389). G. WIEDEMANN: Die Lehre von der Electricität und dem Magnetismus IV p. 526. B. WEINSTEIN: Himmel und Erde 1891 p. 506 „KOCH sah die Luft in Geisslerschen Röhren noch leuchten, wenn diese Röhren bis auf 80° C. unter 0 abgekühlt waren". W. HUGGINS: Inaug. Address (Nature Aug. 20 1891) p. 373.

au refroidissement; on voit ces luminescences aussi dans les taches elles-mêmes lorsqu' en se refroidissant leurs éléments dissociés s'y réassocient; on les voit aussi peut-être comme des flammes faculaires *u)* au dessus des facules, où c'est un rehaussement de niveau, qui pourrait causer le refroidissement requis; et on les voit aussi (last not least) surtout dans les atmosphères des étoiles rouges refroidies, où elles causent des raies brillantes, qui permanentes justement dans les étoiles du type 4, qui sont les plus refroidies de toutes, nous prouvent par conséquent, non moins clairement que les bandes cannelées dans le spectre de ces étoiles, que la température y a fortement baissé.

Là, où les protubérances se déplacent, c'est un procès chimique, qui se propage dans la matière tranquille. Les vitesses énormes, qu'on observe souvent dans cette propagation n'ont rien de surprenant et ne fournissent aucun argument, comme M^{lle} CLERKE le croit, contre la justesse de mon explication *v)*. Dans les mélanges explosifs de nos laboratoires les procès chimiques se propagent avec une vitesse infiniment moins grande; car ici chaque portion du mélange doit attendre son tour avant d'être allumée par la chaleur produite dans les portions voisines déjà enflammées plus tôt. Dans le mélange incandescent gazeux solaire une pareille attente n'est jamais nécessaire. Là toutes les portions du mélange peuvent avoir la température requise en même temps et ne demandent alors qu'un refroidissement infinitésimal pour y former leur combinaison chimique. Si là quelque refroidissement soudain, tel qu'il doit résulter de la formation d'une tache ou d'un pore ou d'un relèvement de niveau se produit (ou si là peut-être quelque autre cause, comme par exemple la propagation d'une pression, détermine les molécules *A* et *B* à s'unir) le procès chimique pourra se propager instantanément et dans cette propagation il n'y aura jamais de vitesse, qui, quelque énorme qu'elle puisse être, sera jamais incompréhensible.

S'il est impossible en tout cas, comme je l'ai démontré plus haut, d'attribuer plus longtemps le déplacement des raies dans le spectre des protubérances à un déplacement matériel de la source lumineuse, il faudra donc l'attribuer à quelque procès moléculaire. Si ce procès est un procès chimique, l'immobilité de la raie du

u) DESLANDRES: l'Astronomie Dec. 1894; Knowledge Dec. 1893. HALE: Astron. a. Astrophysics XIII p. 113 (1894). The Solar Faculae.

v) CLERKE: Probl. p. 109 „Chemical action does not spread instantaneously. Through the tenuous gases of the chromosphere a maximum rate of one mile a second might be assigned to its progress — a rate, that is to say, some hundreds of times slower than the velocities to be explained”.

coronium dans le spectre tourmenté des protubérances n'aura plus rien d'énigmatique. Car si c'est un procès chimique, qui se propage dans un mélange gazeux, il n'y aura que les gaz, qui y participent, qui nous montreront leurs raies déplacées. Et les gaz, qui n'y participent guère seront reconnus à l'immobilité de leurs raies. Telle est mon interprétation d'un spectre, que le principe de DÖPPLER ne saurait expliquer.

Telle est aussi l'interprétation la plus plausible des cas nombreux où, surtout dans les taches, on ne voit que les raies d'un seul gaz déplacées, alors qu'en même temps les raies de tous les autres gaz, qui y sont mélangés, indiquent le repos. L'application du principe de DÖPPLER nous force alors à nous imaginer des tempêtes locales, qui ne faisant souffler qu'un gaz du mélange avec une vitesse de centaines de Kilomètres par seconde et incapables néanmoins de causer dans les autres gaz qu'elles traverseraient le moindre dérangement, auraient souvent en outre, une durée éphémère, dont on ne saurait comprendre ni le commencement ni la fin. C'est ainsi par exemple, que M. YOUNG, en observant la tache historique du 3 Août 1872, y a cru voir sévir durant une heure une tempête terrible, qui avec une vitesse de 120 milles par seconde ne soufflait pas constamment, mais cessait et recommençait dans l'intervalle d'une ou de deux minutes *w*). De telles tempêtes n'ont rien de vraisemblable. La courte période de l'intermittence du déplacement spectral répond très bien au contraire à mon explication. Car, si les éléments à raies déplacées doivent ce déplacement à la propagation d'un procès chimique, auquel ces éléments, à l'exclusion des autres gaz du mélange, seraient seuls à participer, ce procès chimique doit être intermittent, comme je l'ai expliqué plus haut et l'intermittence du déplacement que M. YOUNG a observée et que d'autres astronomes ont aussi souvent constatée *x*) semble donner par conséquent à ma théorie du fonctionnement intermittent des deux sources de chaleur physique et chimique une belle vérification.

w) YOUNG: the Sun p. 166—167. „This motion would die out and be renewed again at intervals of a minute or two”.

x) SECCHI: le soleil II p. 66 „les éruptions se renouvellent souvent à plusieurs reprises, chaque éruption durant plusieurs heures et étant séparée de la précédente par un intervalle plus ou moins long. C'est là ce qu'on remarque, surtout aux époques de grande activité, lorsqu'une grande tache se présente sur le contour du disque solaire.” D'après M. EVERSLED (Journ. of the Br. Astr. Ass. V N°. 7) les déplacements de raies dans le spectre des taches indiquent tout aussi souvent un mouvement ascendant qu'un mouvement descendant et ne durent ils tout au plus que 10 à 15 minutes.

PREMIÈRE PARTIE.

Le Mécanisme de la Périodicité dans le Soleil.

§ 5. *Les deux parties du mécanisme: le gaz intérieur et les nuages photosphériques, qui l'entourent.*

La tranquillité relative de la masse solaire ayant été étudiée dans mon Introduction, l'objet principal de ce Mémoire sera de tâcher de faire voir, comment dans le soleil tranquille on peut aisément découvrir ce que les défenseurs des éruptions solaires y ont toujours cherché en vain, c'est à dire le mécanisme de la périodicité de ses taches.

Dans ce mécanisme deux parties essentielles doivent être distinguées: la photosphère et le gaz, que la photosphère entoure.

De ce gaz nous ne savons avec certitude que bien peu *y*). Il

y) Comment l'idée de l'état gazeux du soleil a résulté des recherches de CARRINGTON (1859) et de SPOERER (1861), a été énoncée d'abord par SECCHI (1864) et Sir J. HERSCHEL (1864), mais a été développée surtout par FAYE (1865), et comment cette idée a été renforcée par les recherches antérieures de CAGNIARD DE LA TOUR (1822) et par les recherches postérieures d'ANDREWS (1869), tout cela a été clairement exposé par Mlle CLERKE dans son Histoire de l'Astronomie durant le 19^{me} siècle (Trad. allemande 1889 p. 196—200). Si l'état gazeux de l'intérieur du soleil n'est nullement douteux, il est très difficile néanmoins de se faire du gaz solaire intérieur quelque idée précise. Quoique la compression doive y être énorme, tout ce que nous savons de la masse et du volume du soleil nous apprend cependant avec certitude que la densité n'y saurait être beaucoup plus grande que celle de l'eau. Cette résistance à la compression ne peut être attribuée qu' à une température transcendante, qui produira aussi une grande viscosité. Le gaz central ressemblera donc bien plus à une masse de poix ou de mastic qu' aux gaz que nous connaissons. (YOUNG: the Sun p. 327—333). Le P. BRAUN admet près du centre du soleil une pression de 2 à 3000 millions d'atmosphères et une température de 10 millions de degrés (BRAUN: Kosmogonie p. 165). D'après les théories de M. M. v. OPPOLZER, lord KELVIN et EKHOLM cette température centrale serait resp. de 10 millions, de 200 millions ou de 5 millions de degrés (ARRHENIUS: Lehrb. d. Kosm. Physik p. 132).

doit présenter cependant ces trois particularités capitales 1° qu'il est riche en éléments divers, 2° que la température y augmente vers le centre et 3° que dans ses couches extérieures, où la photosphère l'a limité par la condensation d'une vapeur, cette vapeur sera aussi toujours présente. Si ces trois particularités du gaz au dessous de la photosphère n'ont rien d'incertain, elles sont aussi les seules, que ma théorie demande.

Commençons maintenant notre étude de la photosphère *z*).

La photosphère est une nappe plus ou moins sphérique de nuages, que le refroidissement doit produire par condensation. Elle contient une poussière photosphérique solide ou liquide, toujours en contact avec la vapeur photosphérique, dont cette poussière a été condensée. La forme sphéroïde de la photosphère ne répond pas à la forme de la masse solaire, qui nous montre au contraire durant les éclipses un renflement équatorial notable *a*), que les anneaux coronaux

z) La photosphère a été ainsi nommée par SCHRÖTER (CLERKE: *Gesch. d. Astron.* 1889 p. 71). Sir JOHN HERSCHEL et SECCHI ont été les premiers à la considérer comme une nappe nuageuse (*Les Mondes*, Déc. 1864 p. 707). D'après M. AUG. SCHMIDT (*Die Strahlenbrechung auf der Sonne*, Stuttgart 1891) la photosphère ne serait qu'une illusion d'optique dans un globe gazeux transparent. Je veux bien admettre que si une photosphère réelle n'existait pas, on en verrait une pareille à celle que M. SCHMIDT a imaginée. Mais la réalité de la photosphère condensée que le soleil nous fait voir n'est nullement douteuse. Lorsqu'une masse gazeuse, riche en vapeurs de matières réfractaires et aussi peu remuée, que se montre la masse du soleil, est exposée au froid de l'espace, il est impossible qu'à la longue quelque matière réfractaire n'y ait pas formé à l'extérieur une nappe condensée de nuages photosphériques. Telle doit être par conséquent l'origine de la photosphère, qu'on observe. Et cette photosphère démontre au surplus la réalité de son existence, parce qu'en tournant sur l'axe ses différentes parties, ses taches, ses granulations, ses pores et ses facules ne se comportent pas comme des effets de mirages lointains et disparates, mais comme autant d'objets réels, dont les déformations prévues et les déplacements simultanés démontrent qu'ils sont tous attachés à la surface d'une même sphère qui, là même où nous les voyons, les emporte dans sa rotation. L'hypothèse de M. SCHMIDT suscite aussi un grand nombre de difficultés spectrales, que par exemple M. M. FROST et SEELIGER et M^{lle} CLERKE ont fait ressortir. (FROST: *Astroph. Journ.* IV p. 196. SEELIGER: *Astr. Nachr.* 3187. CLERKE: *Probl.* p. 166). Il n'en est pas moins vrai, que les belles théories de M. M. SCHMIDT et JULIUS ont clairement démontré, que la courbure des rayons lumineux par la réfraction et la dispersion anormale doivent pouvoir causer des illusions d'optique importantes. Mais il en est de ces illusions comme de la pression peut-être importante aussi dans les rayons lumineux; nous n'avons pas encore appris à démêler sûrement leurs effets et si par conséquent ma théorie jusqu'à présent n'en a pu tenir aucun compte, il est fort bien possible qu'en maint détail elle devra être modifiée plus tard.

a) SECCHI: le Soleil I p. 340, 391 etc. SECCHI dit encore ailleurs, le Soleil II p. 224, (conclusions générales). „Dans les zones polaires ne se trouvent jamais ces éruptions métalliques si remarquables, qui sont fréquentes dans les régions équatoriales... La couche, qui renverse les raies métalliques du spectre est bien mince, quoiqu'elle soit plus épaisse à l'équateur qu'aux pôles." Et à la dernière page de son traité (II p. 482): „cette atmosphère du soleil a une forme comprimée, son élévation est moins grande aux

des „flits spectra” ont aussi fait observer *b*). Ce renflement, trop prononcé pour pouvoir être attribué à la rotation actuelle que nous montre le soleil, remonte probablement à quelque cause reculée cosmogonique. La figure, qu'on pourra trouver à la page 42 de ma *Théorie du Soleil* de 1892 et que j'avais déjà insérée en 1888 dans mon *Essai d'une Théorie du Soleil et des Etoiles Variables*, fait bien voir, comment indépendamment des couches stratifiées et aplaties du gaz solaire, la photosphère doit traverser ces couches pour arriver à la sphéricité *c*). Quoique cette indépendance de la forme sphérique de la photosphère par rapport à la forme ellipsoïde des couches stratifiées, qu'elle traverse, soit pour ma théorie du soleil comme nous le verrons dans mon 12^{me} paragraphe de la plus grande importance, elle n'a cependant pour mon explication de la périodicité des taches aucune importance directe et je n'en aurais pas parlé déjà maintenant si elle n'était éminemment propre à faire ressortir tout d'abord, qu'en voulant rendre compte de la propriété la plus caractéristique de la photosphère, on devra lui donner la définition que voici: La photosphère est le lieu géométrique des points, où en vertu de la température diminuant du centre vers l'extérieur, la condensation des nuages photosphériques commence à être possible.

Comme dans toutes les considérations, qui vont suivre, c'est surtout des nuages photosphériques que je m'occuperai, il importe avant tout de bien préciser qu'elle est selon moi l'idée que nous devons nous faire de ces nuages. Je considère ces nuages comme des averses incessantes de pluie ou comme des chutes continuelles de neige. Mais comme la neige ne se forme et ne se comporte pas autrement que la pluie, l'alternative n'a aucune importance et je puis donc, pour simplifier, ne parler que de pluie seulement.

Si les nuages photosphériques consistent en une pluie torrentielle, qui tombe toujours avec une grande vitesse, ces nuages eux-mêmes

pôles qu' à l'équateur”. YOUNG: le *Soleil* p. 173. LOCKYER: *Chem. of the Sun* p. 424, 428. JOHN HERSCHEL cité par YOUNG, le *Soleil* p. 134, 135 et LOCKYER: *Solar Physics* p. 49.

b) L'anneau coronal, que M. SHACKLETON a photographié le 16 Avril 1893 montre un aplatissement évident. LOCKYER: On results obtained with the prismatic cameras. *Phil. Transact.* 185 (1894) A p. 711—717.

c) Cette figure n'a été imaginée en 1888 que pour expliquer ma théorie des protubérances. Car si les protubérances ne sont que des lueurs passagères dans la matière tranquille ne faisant voir que ce qui était déjà présent, j'avais besoin de cette figure pour expliquer la particularité capitale des protubérances qu'elles ne montrent les métaux plus lourds qu' uniquement dans les zones de l'équateur. (Voir la note *a* précédente et SECCHI: le *Soleil* II p. 147, 148, 151, 166, 174). L'occurrence des protubérances les plus hautes et les plus métalliques dans les régions équatoriales est un fait, qu'un seul regard sur la figure fait prévoir et comprendre tout de suite.

ne participent guère à cette chute rapide. Car ils restent toujours limités en haut par le renouvellement incessant de la pluie, que le refroidissement extérieur y fait condenser, et ils restent limités en bas par l'évaporation incessante de la pluie en vertu de l'échauffement intérieur.

Si la chaleur que le nuage perd en haut est plus grande que celle qu'il recouvre en bas, la pluie se formant en haut excèdera la pluie disparaissant en bas et causera par conséquent un agrandissement du nuage, qui croîtra dans la profondeur. De là la forme allongée et cylindrique de tant de nuages photosphériques et leur ressemblance avec des colonnes ou des brins de paille. Dans la fig. 45 de son *Traité du Soleil*, M. YOUNG a fait voir, qu'elle est d'après lui cette structure photosphérique en colonnes. Ordinairement ces colonnes, qui semblent minces, mais sont en réalité des mondes de matière condensée, sont verticales. On n'en voit alors que les bouts supérieurs comme autant de grains. Mais si quelque mouvement dans la vapeur photosphérique les pousse hors de la verticale, comme lors de la formation d'une tache, alors ces colonnes montrent bien leurs formes déliées. Et les averses, qui ne se formaient primitivement qu'en fils au bout supérieur de la colonne, continueront maintenant à tomber en rideau sur toute leur longueur.

Mais revenons maintenant à notre nuage dans sa position normale. Tant que la chaleur, que ce nuage perdra au dehors, continuera à être plus grande que celle qu'il pourra recouvrer du dedans, sa matière condensée augmentera; mais cette augmentation de la matière condensée doit causer l'épuisement de la vapeur photosphérique dans la couche extérieure où jusqu'à présent les averses se formaient. Cette couche étant épuisée le nuage descendra dans une couche non pas épuisée encore, mais qui, épuisée plus tard, ne saura empêcher le nuage de descendre toujours plus bas.

Si dans les couches épuisées, d'où les nuages descendent, la vapeur photosphérique ne peut continuer à produire de lourdes averses, cette vapeur cependant n'y aura pas complètement disparu. Le restant s'y condensera alors en un brouillard léger et relativement durable. Telle me paraît être l'origine probable du brouillard, qui d'après l'opinion généralement admise, rend brumeuse une mince couche autour et tout près de la photosphère, brouillard, qu'on croit responsable 1° de la grande diminution d'éclat de la photosphère vers son bord, 2° de la lueur brillante des facules, qui étant relevées sont vues à travers une couche ex-

ceptionnellement mince du voile brumeux et 3° de la teinte jaunâtre de la lumière solaire *d*).

Tandis que la limite extérieure des nuages photosphériques descend, comme nous l'avons vu, lentement, leur limite intérieure descendra plus vite et causera ainsi un agrandissement des nuages tant que le refroidissement au dehors sera plus grand que le rechauffement du dedans et tant que par conséquent les nuages devront augmenter en bas aux dépens de la vapeur diminuant sans cesse en haut.

La vapeur, que les averses produisent dans la profondeur, étant beaucoup plus volumineuse que la pluie, qu'elle remplace, remontera toujours en partie à un niveau plus haut où incessamment elle servira de nouveau à collaborer aux averses; mais une autre partie de cette vapeur demeurera dans la profondeur où elle a été produite et y fonctionnera comme un saut de conduit, permettant aux averses futures de descendre toujours plus bas. Il est clair d'ailleurs que les averses photosphériques ne continueront à descendre et à augmenter aux dépens de leur vapeur diminuant sans relâche que tant qu'elles continueront aussi à perdre plus de chaleur au dehors qu'elles n'en recouvrent du dedans. Nous verrons bientôt que leur histoire sera une toute autre dès que cette condition ne sera plus remplie.

Telle est d'après moi le mode d'existence des nuages photosphériques, qui ressemble par conséquent beaucoup à celui des êtres vivants. Comme dans ces derniers la composition physico-chimique reste toujours la même; mais les molécules se renouvellent sans cesse. Comme dans ces derniers il y a aussi des phénomènes de croissance. Et si après avoir existé un certain temps les êtres vivants périssent infailliblement, alors qu'il en naît toujours de nouveaux, il en est de même des nuages photosphériques; car, ainsi que nous le verrons bientôt, la photosphère ne dure tout au plus que 11 ans et l'ancienne photosphère ne sera pas encore complètement décomposée, lorsqu'on verra déjà en naître une nouvelle.

Mais n'anticipons pas sur les explications, qui vont suivre. Si

d) Le voile mince et brumeux, qui jaunit la photosphère en l'obscurissant a fait l'objet d'un grand nombre de recherches, que Mlle CLERKE a mémorées dans ses Probl. i. Astr. The Photosphere and its dusky veil p. 70—71. — VOGEL: Monatsber. Berlin 1877 p. 104. — E. v. OPPOLZER: Astroph. Journ. Vol. I p. 261. — HASTINGS: Am. Journ. of Science XXI p. 41 (1881). — Dr. J. SCHEINER: Strahlung und Temp. d. Sonne p. 49. — Dr. J. HALM: Ann. of the R. Obs. Edinburgh I p. 74 (1902). — W. H. JULIUS: Ak. v. Wetensch. te Amsterdam 27 Januari 1906. Eene nieuwe methode ter bepaling van het verloop der stralingssterkte op de zonnescijf van het midden naar den rand. — YOUNG: the Sun p. 282 et 336—340.

dans ces explications les nuages photosphériques seront toujours considérés comme des averses de pluie, qui peuvent s'alourdir et se déplacer, je leur conserverai cependant pour plus de facilité le nom de nuages. Toutes les fois par conséquent que j'aurai à parler de nuages, qui montent ou qui descendent, on pourra bien penser à ces averses, mais, pour simplifier, je n'en parlerai plus jamais.

Nous ne savons guère, quelle est la composition chimique de la poussière photosphérique. Généralement on admet que cette poussière est composée de gouttelettes de fer ou de silicium ou (comme M. M. JOHNSTONE STONEY (Prov. R. S. 1867, 16 p. 29), Sir ROBERT BALL et HASTINGS l'ont supposé) de poussière de carbone. Mais ces éléments sont tous trois trop volatils pour pouvoir exister à l'état condensé en des nuages d'une température de 7 à 8000° *e*). Car à la température de 3500° à peu près du four électrique Moissan les vit tous trois se résoudre en vapeur. Les seules sub-

e) La température effective du soleil n'est encore que très imparfaitement connue. Car elle est tellement plus élevée que les températures que nous pouvons mesurer, que les différentes lois, qui gouvernent le rayonnement à ces températures mesurées et le gouvernement d'ailleurs autrement lorsque la température augmente, ne lui sont plus nécessairement applicables. Chacune de ces lois conduit aussi à une autre évaluation de la température solaire. Tandis que par exemple la loi de NEWTON donna à WATERSTON (1860) 7 millions de degrés, à SECCHI (1861) dix millions et à ERICSON (1871) 4 millions; la loi de DULONG et PETIT ne donna à POUILLET que 1761°, à VICAIRE 1398° (1872) et à VIOLE 3000° (1881). La loi de ROSETTI (avec le carré de la température) (1879) donna 20000°, et celle de STEFAN (avec la quatrième puissance de la température) (1879) donna d'abord 6000°, puis 8700 à M. M. WILSON et GRAY et 6590° à M. WILSON (1901). Les recherches thermodynamiques de ZOLLNER (1870) et de HIRN (1884) donnèrent des températures très élevées, resp. de 28000° et de 2 millions de degrés. LANGLEY eut le premier l'idée de déduire la température de la longueur de l'onde où le spectre a son maximum d'énergie. D'après M. W. MICHELSON et RUBENS cette longueur varierait inversement avec la racine carrée de la température, tandis que d'après M. WIEN et PASCHEN c'est avec la température elle-même qu'inversement cette longueur varierait. MICHELSON et EBERT arrivèrent ainsi à une température solaire de 40000° et M. PASCHEN à une température de 5130° seulement. — On trouvera l'histoire de toutes ces recherches et de beaucoup d'autres encore dans les écrits suivants: CLERKE: *Geschichte d. Astr.* p. 274—285; *Problems* p. 63—69. YOUNG: *the Sun* p. 305—309. J. SCHEINER: *Strahlung und Temp.* d. Sonne. WILSON and GRAY: *Proc. R. S.* 58. H. F. WEBER: *Sitz. Ber. Berlin* 1888 II p. 933. R. v. KÖVESLIGETHY: *Grundzüge einer theor. Spectralanalyse.* WILSON and RAMBAUT: *Phil. Trans.* 185 p. 396. ROSETTI: *Phil. Mag.* 8 p. 324, 550. STEFAN: *Sitzungsber. Wien* 79, 2, p. 391. ANGSTRÖM: *Wied. Ann.* 39 p. 309. WILSON: *Proc. R. S.* 12 Dec. 1901. LE CHATELIER: *C. R.* 1892 V 114 p. 737. S. P. LANGLEY: *Researches on Solar Heat*, Washington 1884. M. W. MICHELSON: *Journ. de physique* II 6, 467 (1887). RUBENS: *Wied. Ann.* 53 p. 284 (1894). LORD RAYLEIGH: *Phil. Mag.* 27 p. 460 (1889). H. EBERT: *Astrophys. Journ.* II p. 57. WIEN: *Wiedem. Ann.* 58 p. 662 (1896). PASCHEN: *Astroph. Journ.* II p. 211. F. W. VERY: *Ibid.* p. 316 et IV p. 44. D'après les observations récentes de M. M. MILLOCHAU et FERY à Meudon à Chamounix, aux Grands Mulets et sur le sommet du Mt. Blanc la température effective du soleil serait de 6130°. (*La Nature* N°. 1770 p. 338 27 Avril 1907, *Journ. of the Brit. Astr. Ass.* XVII 8 p. 370).

stances, que dans son four il ne vit pas volatilisées, étaient des carbides, des silicides et des borides. Et ce seront donc peut-être des carbides de titanium ou de silicium, qui forment la poussière photosphérique.

Si nous devons regretter de ne pas connaître au juste, quelle est la matière, dont la photosphère est composée, cette connaissance n'est heureusement nullement nécessaire pour en comprendre le fonctionnement. Il suffit de savoir que dans la photosphère il y a une poussière photosphérique condensée, qui, chauffée au blanc dans un gaz incandescant, lance au dehors les rayons solaires. Or voilà un fonctionnement, qui rend la photosphère tout à fait comparable au manchon à oxydes de thorium et de cérium, qui, lui aussi chauffé au blanc dans un gaz moins lumineux, produit l'éclatante lumière du bec AUER.

Le manchon photosphérique a d'ailleurs avec le manchon AUER encore cette autre ressemblance, que tout comme lui, il est aisément troué et doit être souvent renouvelé. Ce renouvellement a lieu tous les 11 ans. Mais tandis que le manchon AUER est d'autant plus entier qu'il est plus neuf et d'autant plus irréparablement troué, qu'il est plus usé, nous verrons tantôt que le manchon photosphérique doit nous montrer justement le contraire. Nous ne le verrons criblé de trous que lorsqu'il est tout neuf, et tous ces trous, bien loin d'être irréparables, disparaîtront toujours avec le temps.

Si les nuages photosphériques fonctionnent comme un manchon AUER, alors toute trouée dans ces nuages doit être un endroit relativement obscur, d'où les rayons solaires sont moins abondamment lancés au dehors qu'ailleurs. Ce sont ces trouées dans les nuages photosphériques, qui forment les taches. Dans les taches la matière photosphérique n'existe pas à l'état condensé, mais seulement à l'état de vapeur. Au travers des taches nous voyons luire l'intérieur incandescent du soleil. Mais comme cet intérieur n'émet des rayons blancs à spectre continu que dans la profondeur, ces rayons, pour arriver jusqu'à nous, ont à traverser d'abord des couches vaporeuses puissantes, qui doivent les dépouiller de la majeure partie de leur éclat. De là un renforcement de la plupart des raies de FRAUNHOFER dans le spectre des taches, où à l'absorption normale des couches renversantes celle des couches plus profondes se verra ajoutée. On trouvera une explication de l'obscurité des taches comme uniquement due à l'absorption dans un Mémoire récent de MM. HALE et ADAMS *f*). Si les raies du silicium, bien loin d'être renforcées dans

f) *Astroph. Journ.* XXIII (Jan. 1906) p. 35—44. L'obscurité des taches n'est d'ailleurs que tout à fait relative, car même dans leurs parties les plus sombres elles sont

le spectre des taches, s'y montrent affaiblies, comme M. MITCHELL l'a découvert *f*) et comme MM. HALE et ADAMS viennent de le confirmer *g*), c'est peut-être parce que cet élément léger étant présent surtout dans les couches renversantes et l'orifice des taches étant généralement bombée au dessus de la photosphère, le silicium moins abondant dans les couches plus profondes sera empêché de la sorte de pouvoir exercer toute son action absorbante.

L'explication que je viens de donner de l'obscurité des taches ne paraît guère s'accorder avec la loi de KIRCHHOFF *h*) à laquelle nous devons cependant presque toute notre connaissance de la constitution du soleil. Mais depuis que nous savons avec certitude que l'éclat lumineux de la matière ne dépend pas uniquement de la température *i*), cette loi n'en est plus une sur laquelle on puisse toujours se fier. M. EVERSLED a émis l'idée, que la lumière produite au fond des taches aurait généralement des longueurs d'onde plus courtes et serait par conséquent moins visible que la lumière photosphérique due à une température moins élevée *j*). Si cette idée est juste elle s'adapte immédiatement à mon explication, mais si elle ne l'est pas *k*) l'obscurité des taches pourrait être expliquée aussi au moyen d'un raisonnement inverse. Car si l'obscurité des taches ne pouvait être attribuée à leur propre éclat, qui par rapport à leur température serait trop petit, on pourrait toujours l'attribuer à un éclat plus brillant de la photosphère, qui par rapport

encore beaucoup plus brillantes que la lumière de Drummond. Citons à cet égard une curieuse expérience de CHACORNAC, dont LEVERRIER, qui en avait été témoin a donné la description que voici: „Une pénombre très intense se montrait sur le centre du disque du soleil et elle paraissait fort obscure comparée à la lumière des parties environnantes de l'astre. Or lorsqu'on cachait tout le soleil avec un écran à l'exception de la tache, que nous venons de mentionner et d'une partie du disque située dans les environs du bord on était étonné d'avoir à constater que la tache était plus lumineuse que le bord de l'astre" (LEVERRIER: *Compt. Rend.* 1869 8 Févr. p. 319). M. H. C. VOGEL (*Monatsber. Berlin* 1877 p. 104) a fait une observation analogue. (CLERKE: *Gesch. d. Astr.* 1889 p. 282).

g) MITCHELL: *Astroph. Journ.* XXII p. 34. HALE and ADAMS: *Astroph. Journ.* XXIII p. 28—30.

h) KIRCHHOFF: *Pogg. Ann.* 109. Untersuchungen über das Sonnenspectrum und die Spectra der chem. Elemente Berlin 1866. E. WIEDEMAN: *Pogg. Ann.* (N. F.) 37 p. 177—248. I. EVERSLED: *Astroph. Journ.* V April 1897. On the cause of the Darkness of Sun-spots. MAUNDER: *Journ. of the Brit. Astr. Assoc.* XVII (1906) p. 128 „What was the cause of the darkness of the spot? It was generally held that it must be practically wholly due to absorption... but it seemed to him they must regard a large proportion of the darkness of the spot as due to a lessened radiation, whatever may be the cause of such diminution. He knew that some serious objections had been made to that view but did not see his way to escape from the evidence of direct observation”.

i) Voir les notes *f* et *t* aux pages 26 et 29.

j) EVERSLED: *loc. cit.* p. 252.

k) HALE a. ADAMS: *Astroph. Journ.* XXIII p. 42.

à sa température serait trop grand. Car l'éclat lumineux d'une poussière suspendue dans un gaz incandescent ne dépend pas nécessairement de la température seulement. En mettant dans les mêmes flammes des manchons à oxydes différents, on verra avec ces oxydes varier l'éclat. L'oxyde de thorium par exemple et l'oxyde de cérium purs ne produisent qu'un éclat médiocre et il faut mélanger ces oxydes dans la proportion de 99 à 1 pour obtenir l'éclat maximum qu'on demande. D'après les expériences de M. M. KILLING, WHITE, RUSSEL et TRAVERS cet éclat maximum, bien loin de répondre à une température plus haute, se produirait à une température plus basse que celle qu'ils ont observée dans un manchon à oxyde de thorium pur et serait dû à une transformation spécifique de l'énergie calorifique en lumière. Quelle que soit d'ailleurs la cause de l'éclat surprenant du manchon AUER, que ce soit une luminescence, un effet de catalyse ou une émission sélective ^{l)}, l'hypothèse que dans le manchon photosphérique l'éclat de la poussière photosphérique, qui s'y renouvelle sans cesse, ne dépendrait pas uniquement de la température de la couche où elle plane, n'a rien d'exorbitant et l'on pourra donc s'en servir au besoin pour expliquer l'obscurité des taches.

Le changement que M. LOCKYER a découvert dans le spectre des taches lorsqu'à l'approche du minimum elles se rapprochent de l'équateur ^{m)} résulte de l'indépendance de la photosphère par rapport aux couches aplaties, qu'elle traverse, indépendance que nous étudierons dans le 12^{me} paragraphe et en vertu de laquelle toute vapeur, qui à l'équateur s'élèvera jusqu'à tout près de la photosphère, restera plus loin au dessous d'elle tout partout ailleurs. En comparant le changement de spectre observé par M. LOCKYER

^{l)} C. KILLING: Journ. für Gasbeleuchtung etc. v. SCHILLING u. BUNTE 46 p. 445—450. WHITE u. TRAVERS: Ibid. 45 p. 670; 46 p. 787—790, p. 974—977. Dict. de Chimie de Wurtz, 2me Supp. Art. Gaz de l'éclairage p. 627. Dr. C. RICHARD BÖHM: Das Gasglühlicht Leipzig 1905 p. 211—231. LUMMER: Die Ziele der Leuchttechnik 1903. FRANK W. VERY: Astroph. Journ. IV p. 44 Laws of radiation. Dr. H. W. FISCHER: Sammlung Chem. u. chem. technischer Vorträge herausgegeben von Prof. FELIX AHRENS: Der Auerstrumpf, où l'on voit exposé comment DROSSBACH, ST. JOHN, LUMMER, WIEN, BUNTE, LE CHATELIER, NERNST, BOSE, RUBENS, FERY et M. FISCHER lui-même ont tâché d'expliquer le grand éclat du manchon Auer.

^{m)} LOCKYER: Chem. of the Sun p. 313—325. M. LOCKYER est disposé aussi à admettre que des taches à spectres semblables ne peuvent se trouver que dans une même parallèle (loc. cit. p. 318) „and it really does look as if the sudden changes in the spectra noted from time to time may have been due to the fact that the spots compared were spots varying very considerably in latitude, and it would not surprise me to find that spots which are very like each other in their spectra will be found to be situated more or less in the same degree of latitude”.

avec le changement simultané en latitude observé par SPOERER *n*) on voit immédiatement que ces deux changements simultanés sont précisément tels que ma théorie les prévoit *o*).

Les taches et les pores ont la même température que la photosphère qui les entoure. Car si cette température n'était pas égale des courants ascendants et descendants devraient se produire, bouleversant sans relâche l'atmosphère qu'ils traverseraient. Ce bouleversement n'existant pas, comme je l'ai démontré plus haut, il est donc évident que ces courants n'existent pas non plus et que des différences de température dans un même niveau photosphérique n'existent pas davantage. S'il est prouvé qu'en général les taches émettent moins de chaleur que les autres parties de la photosphère, cela prouve tout simplement que leur pouvoir émissif est moindre. Et ce pouvoir émissif doit être moindre parce que la poussière photosphérique y fait défaut. C'est pour la même raison que la flamme du gaz d'éclairage diminue sensiblement en pouvoir émissif si en y introduisant de l'air, ce qui la rend même plus chaude, on la débarrasse de sa poussière carbonique pour en faire une flamme de BUNSEN.

Le renversement lumineux nullement rare de plusieurs raies dans le spectre des taches ne sera donc jamais causé par quelque rehaussement de la température. Bien au contraire il résultera d'une perte de chaleur. Car cette perte de chaleur dans la vapeur photosphérique $A+B+R$ remplissant les taches, doit y causer le fonctionnement intermittent des sources de chaleur physique et chimique, que j'ai déjà décrit dans mon Introduction, et qui produira des luminescences chimiques chaque fois que la source chimique interviendra. Ce fonctionnement empêchera aussi tout refroidissement des taches et les maintiendra à une température plus haute que celle des couches renversantes. Si cette température n'était pas plus haute on verrait au dessus des taches toutes les raies de FRAUNHOFER brillamment renversées *p*). Ce renversement brillant n'existant

n) SPOERER: Publ. d. Astroph. Obs. z. Potsdam Bd. IV 4, Sonnenfleckenbeobachtungen p. 414. SECCHI: le Soleil I p. 187. Tableau des latitudes moyennes et des fréquences de taches observées par M. SPOERER.

o) Théorie du Soleil p. 149—151.

p) CLERKE: Probl. p. 96. „Still the coolest umbrae must be hotter than the reversing layer, for otherwise the FRAUNHOFER lines would show bright against them, and as we know, they cross them in dusky array. This circumstance is fundamental in solar thermal relations, yet has been generally overlooked. The ordering arigh of such relations is a prime desideratum in solar physics and should serve as an indispensable guide to the interpretation of spectral divisions.” M. M. HALE, ADAMS et GALE inclinent néanmoins à admettre que le spectre des taches démontre leur refroidissement (Contributions from the Solar Obs. N°. 11; Astroph. Journ. Oct. 1906 p. 185—213). Un

pas, toute tache est donc, comme la photosphère elle-même, plus chaude que les couches renversantes qui les couvrent.

De toutes les considérations précédentes il résulte, que les taches étant des trouées dans la nappe photosphérique, leur température est égale à celle de la nappe photosphérique elle-même.

§ 6. *Fonctionnement du mécanisme. Les taches se formant et s'effaçant tour à tour dans la photosphère, qui alternativement monte et descend.*

Les deux parties essentielles du mécanisme de la périodicité des taches étant maintenant étudiées, il me reste à expliquer, comment ce mécanisme fonctionne.

Pour arriver à cette explication nous commencerons notre examen du soleil lorsque la photosphère est dans la période du maximum de ses taches.

La photosphère est alors une nappe relativement mince, criblée de trous et se trouvant à sa plus grande hauteur, aussi éloignée que possible du centre du soleil. Elle plane alors à cette hauteur exceptionnelle, parce que la matière photosphérique, dont le soleil dispose, est alors moins que jamais à l'état nuageux condensé et plus que jamais à l'état vaporeux, ce qui doit lui donner son maximum de volume et par conséquent aussi son maximum de hauteur. Quoique la multiplicité des taches doive contribuer à augmenter la vapeur photosphérique, cete contribution n'est cependant qu' insignifiante. La vraie cause du maximum de volume, que présente la vapeur photosphérique lorsque les taches sont au maximum ne saurait être déjà expliquée maintenant. Mais nous la comprendrons parfaitement tantôt, j'espère, lorsqu' après avoir étudié, comment après le maximum des taches un minimum doit venir, j'aurai expliqué aussi, comment après ce minimum un nouveau maximum se restaure.

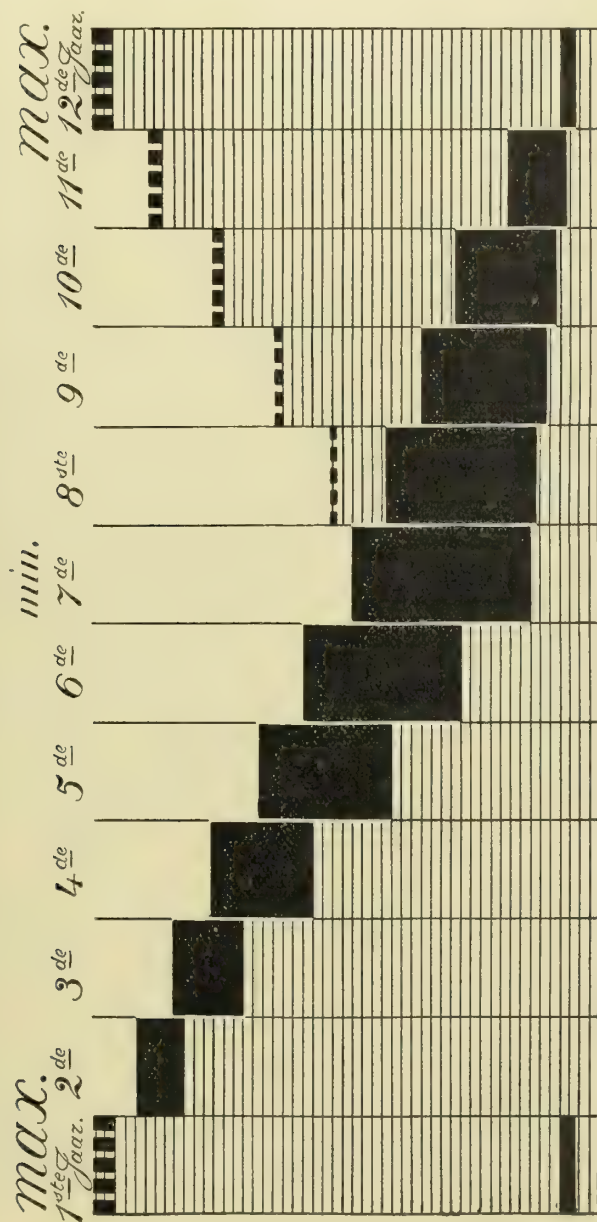
Pour faciliter et consolider cette explication, j'ai représenté dans la figure ci-contre, comment durant les années successives d'une période la photosphère et sa vapeur changent constamment de volume et de niveau.

Dans la première année, que commence notre examen du soleil, nous voyons, comme je l'ai déjà remarqué, la vapeur photosphérique

de leurs arguments est la ressemblance du spectre des taches avec celui des étoiles rouges. Mais cette ressemblance est due, selon moi, comme je l'expliquerai dans la 2me Partie de ce Mémoire, à une toute autre cause (voir aussi la deuxième note *m* de mon 10me paragraphe).

s'élevant jusqu' à sa plus grande hauteur, où on la voit limitée par la photosphère nuageuse proprement dite, qui en vertu du refroidissement extérieur doit toujours la limiter au dehors.

Si cette photosphère n'est alors que bien mince, ses nuages ayant



Changement réciproque des nuages (en noir) et de leur vapeur (en blanc) du maximum au minimum et au maximum suivant:
 1^{re}, dans la nappe photosphérique du soleil (les trous dans les nuages sont alors obscurs et les chiffres indiquent des années consécutives);
 2^{de}, dans la nappe obscurcissante de Mira (les trous dans les nuages sont alors lumineux et les chiffres indiquent des mois consécutifs).

peu de profondeur et montrant de nombreuses trouées, elle ne tardera pas à s'épaissir bien vite. Car à la grande hauteur, où elle plane maintenant, elle perdra plus de chaleur par le rayonnement au dehors, qu'elle n'en peut recouvrer du dedans des cinq ou six

sources de chaleur solaire, que j'ai énumérées dans mon Introduction, et elle subira par conséquent une perte de chaleur, qui causera une condensation, qui fera augmenter ses nuages. Cette perte de chaleur ne produira d'ailleurs aucune diminution de la température; car cette diminution est automatiquement empêchée par la chaleur immédiatement produite par la condensation que toute perte de chaleur doit causer dans la vapeur saturée, qui est en contact avec les nuages. C'est pour la même raison, qu'en refroidissant de la vapeur d'eau on ne verra jamais la température de 100° diminuer, avant que toute cette vapeur n'ait été convertie en eau *q*).

Lorsque par conséquent la photosphère se refroidit, ses nuages ne diminueront pas en température, mais ils augmenteront en poids, et ses taches et ses pores, qui y montraient les endroits, où ces nuages étaient absents, y seront doublement effacés 1^o par l'apparition soudaine de nuages nouveaux et 2^o par l'arrivée résultante de nuages nullement nouveaux, qui existant déjà tout à l'entour de la tache sont entraînés maintenant vers le vide, que les nuages nouveaux ont produit par leur condensation. La matière lumineuse environnante, après avoir formé des voiles, des ponts et des ponts submergés, „s'écroulera alors pêle mêle, comme dit SECCHI, dans le gouffre qui disparaît" *r*).

Si maintenant à la plus grande hauteur, que les nuages photosphériques peuvent atteindre leur vapeur épuisée cesse d'y pouvoir continuer sa condensation, ces nuages alourdis descendront dans la vapeur plus profonde, qui continuera à les alourdir toujours plus. Lorsque cette vapeur sera épuisée à son tour, ces nuages toujours

q) Comme M. F. A. H. SCHREINEMAKERS l'a fait remarquer dans ses recherches sur la tension de la vapeur de mélanges ternaires, un mélange de plusieurs vapeurs différentes doit généralement en se condensant diminuer en température. Mais lorsqu'il n'y a qu'une seule vapeur, qui se condense, la température demeurera constante. Or comme tout changement de température serait incompatible avec la tranquillité du soleil, il n'y aura donc dans les couches extérieures du soleil, tout comme dans celles de notre terre, qu'une seule vapeur saturée qui y formera des nuages. Les vapeurs innombrables, qui au dehors de ces nuages forment les couches renversantes, la chromosphère et l'atmosphère entière du soleil ne sauraient s'y condenser d'ailleurs, même si elles étaient saturées; car la radiation invariable de la photosphère plus profonde les empêchera de refroidir, et lorsque près d'une tache ou d'un pore éventuels cette radiation diminue, elles allumeront aussitôt une protubérance pour remédier tout de suite au refroidissement, qui sans cela serait près d'arriver. Ce ne sont que les nuages photosphériques, auxquels est dévolue la tâche immense d'émettre au dehors la chaleur recouvrée incessamment au dedans, qui puissent nous montrer une condensation variable à mesure que s'acquittant de cette tâche leur chaleur augmente ou diminue.

r) YOUNG: the Sun p. 122. SECCHI: le Soleil I p. 87. LOCKYER: Sol. Phys. p. 70. MAW: Observatory XXI p. 402; XXIII p. 233.

plus épais descendront encore plus bas. Tant que la photosphère continuera à perdre plus de chaleur par son rayonnement au dehors, qu'elle n'en peut recouvrer du dedans, elle continuera à convertir sa vapeur volumineuse en nuages pesants et à descendre toujours plus bas. C'est ce que j'ai fait voir dans la figure pour les premières sept années de la période.

Mais cet alourdissement de la photosphère descendant toujours plus bas ne saurait durer toujours. Car dans les couches où la photosphère s'enfonce la température augmente avec la profondeur. Il est donc évident que la photosphère arrivera finalement à une profondeur où elle commencera à recevoir en bas plus de chaleur du dedans, qu'elle n'en peut perdre en haut par son rayonnement au dehors.

Arrivée à cette profondeur, où cessant de se refroidir, elle commencera à être réchauffée désormais, la photosphère est dans la période du minimum de ses taches et du maximum de ses nuages. La matière photosphérique se trouve maintenant dans un état tout aussi exceptionnel que lors du maximum. Mais tandis qu'alors elle était moins que jamais à l'état nuageux condensé et plus que jamais à l'état vaporeux, maintenant c'est précisément le contraire. De là la différence des niveaux photosphériques au maximum et au minimum.

Mais cette photosphère épaisse du minimum, chargée de tous les nuages, qui depuis le maximum s'y sont accumulés, continuera en vertu de son poids à descendre dans les couches plus profondes. Cette descente sera maintenant le commencement de sa fin. Car tandis que jusqu'à présent elle perdait en bas par évaporation moins de matière condensée qu'elle n'en recouvrait en haut par condensation, ce qui la fit croître en épaisseur, ce sera maintenant le contraire, qui aura lieu. En perdant désormais plus de matière condensée en bas qu'elle n'en recouvrera en haut elle deviendra de plus en plus mince et disparaîtra.

Mais tandis que les nuages de l'ancienne photosphère disparaissent à jamais en s'évaporant dans la profondeur, toute la vapeur, dont ces nuages s'étaient formés, apparaît de nouveau. Et comme cette vapeur ne peut se condenser aussi vite en haut qu'elle est produite en bas, elle remontera donc dans le soleil pour reprendre son volume primitif.

Mais à la surface extérieure de cette vapeur qui monte, le refroidissement fera condenser aussitôt une photosphère nouvelle. Je l'ai représentée dans la figure telle qu'elle s'épaissit en montant durant les dernières quatre années de la période.

Cette photosphère nouvelle, encore bien mince, bien loin d'être unie, sera bosselée de facules et criblée de taches. Ces irrégularités résulteront de l'augmentation incessante de la vapeur, qui pousse la photosphère en haut et qui aux endroits les plus minces y produira par un relèvement plus grand des bulles bombées, qui s'élevant au dessus du niveau général de la photosphère seront vues comme des facules.

Ces bulles bombées seront des facules précurseurs de taches, si leur paroi bombée est assez mince et si la poussée de bas en haut, qui les a produites, continue. Car alors ces bulles crèveront et produiront ces trous dans la nappe photosphérique, que nous observons comme des taches.

Là, où ces trous réussiront à s'ouvrir, ils nous montreront dans l'ombre des taches leur plus grande obscurité. Mais tout à l'entour du trou obscur l'ouverture restera toujours obstruée des débris éraillés de la paroi bombée crèlée, dont les filaments effilés, déliés cacheront en partie l'ouverture comme le font d'après SECCHI et YOUNG s) „les buissons à l'entrée d'une caverne”. Ces filaments déliés formeront autour de l'ombre des taches leur pénombre, dont la surface bombée et convexe nous montrera son plus grand éclat près de son bord intérieur, parce qu'étant là le plus relevée dans la couche brumeuse, qui obscurcit la photosphère, elle n'y perdra tout comme les facules qu'un minimum d'éclat t).

Si d'après l'explication, que je viens de donner, la formation des taches est due à la rupture de bulles vaporeuses, cette formation a déjà été reconnue tout de suite par celui, qui a été un des premiers à étudier les taches, a donné aux facules et aux zones royales le nom, qu'elles ont toujours porté, et a consacré la majeure partie de sa vie et de ses facultés extraordinaires d'observateur à l'étude du soleil. J'ai nommé le R. P. CHRIST. SCHEINER, auteur de la ROSA URSINA u). Dans l'aperçu qu'un autre observateur infati-

s) SECCHI: le Soleil I p. 95. YOUNG: le Soleil p. 90.

t) Les photographies que M. CHEVALIER a obtenues à l'Observatoire Zô-sè en Chine (Astroph. Journ. Nov. 1906 Plate X) nous montrent indubitablement l'éclat souvent plus grand du bord intérieur de la pénombre. Les photographies encore plus récentes de M. NEATE montrent clairement aussi cette même particularité (A. N. NEATE: Journ. of the Brit. Astr. Assoc. July 1907 p. 398).

u) Rosa Ursina sive Sol ex admirando Facularum et Macularum suarum Phaenomena variis nec non.... mobilis ostensus a Christophoro Scheiner Germano e Societate Jesu.... Bracciani apud Andream Phaeum Typographum Ducalem-Impressio coepta Anno 1626, finita vero 1630 p. 536. Les taches ont été découvertes presque simultanément vers la fin de l'année 1610 par J. FABRICIUS, GALILÉE, HARRIOT et SCHEINER. (H. FRITZ: Die Beziehungen der Sonnenflecken Haarlem 1878 p. 2). C'est FABRICIUS qui a publié cette découverte le premier dans un écrit intitulé: De maculis in Sole observatis

gable des taches, le P. JOH. SCHREIBER à Kalocsa, a donné en allemand de la ROSA URSINA, j'ai trouvé l'idée de taches se formant par l'expansion de bulles clairement exprimée *v*) et supportée par le P. SCHREIBER lui-même, lorsqu'il remarque que cette même idée a été exprimée aussi par R. WOLF, autre observateur infatigable des taches, qui lui aussi a cru observer souvent que c'étaient des bulles, qui par leur rupture causaient des taches *w*).

Si la formation des taches, que mon explication du mécanisme de leur périodicité demande, n'a par conséquent rien d'inprévu, cette formation répond parfaitement aussi à toutes les observations récentes, qui ont prouvé, que les taches sont le plus souvent relevées au dessus de la photosphère, que ce sont, comme dit M. MAUNDER, des domes démesurément remplis de vapeur *x*). De telles taches ne feront pas voir le phénomène Wilsonique *y*), ni la grande diminution,

et earum cum Sole revolutione narratio (Witebergae 1611). Voir aussi J. A. C. OUDEMANS et J. BOSSCHA: Arch. Neerland. Ser. 2 Tome VIII. GALILÉE et MARIUS p. 167. En Chine les taches ont été découvertes beaucoup plus tôt. Le premier ouvrage où il en a été fait mention est celui de MA TWAN LIN publié en 1322 et renfermant un tableau remarquable de 45 observations exécutées entre 301 et 1205. (J. WILLIAMS: Monthl. Not. 33 (1873) p. 370. E. MERLIN: Bull. de la Soc. Belge d'Astr. 1907 p. 179).

v) P. JOH. SCHREIBER S. J.: P. CHRISTOPH. SCHEINER und seine Sonnenbeobachtungen (Sonderabdruck aus Natur und Offenbarung 48 Band) 1902 p. 39.

w) R. WOLF: Handbuch d. Astron. II p. 407 „dass ich selbst mehrmals dem Bilden von Blasen in der Photosphäre und dem Sichtbar werden von Flecken infolge Zerspringens solcher Blasen zuzusehen glaubte." M. YOUNG, qui, par une modification de la théorie de SECCHI, s'efforce d'expliquer la formation des taches au moyen d'un enfoncement local de la photosphère lorsque le gaz intérieur qu'elle comprimerait y trouverait une issue ailleurs, doit cependant reconnaître qu'en général on voit toujours des facules, des pores et une surface troublée aux endroits où une tache va naître et que quelquefois leur apparition ressemble à celle d'une masse obscure, qu'on verrait sortir de la profondeur (YOUNG: the Sun p. 187). Si M. YOUNG se voit forcé d'ajouter que cette ressemblance est embarrassante (puzzling), moi je n'y vois qu'une confirmation de mon idée.

x) MAUNDER: Journ. Br. Astr. Ass. VII p. 121. Ibid. XVII p. 128 (Dec. 1906). Tandis que ma théorie des taches trouve dans leur convexité un grand support, cette convexité affaiblit au contraire la plupart des autres théories, qui demandent plutôt leur concavité. Telles sont les théories de Sir JOHN HERSCHEL, SECCHI, FAYE, LOCKYER, SCHAEERLE, YOUNG et E. v. OPPOLZER (YOUNG: the Sun. Sun spot theories p. 177—190). M. R. EMDEN voit, tout comme FAYE, dans les taches l'effet de l'aspiration d'un tourbillon, qu'il explique d'ailleurs d'une toute autre manière. Cette théorie de M. EMDEN demande de même la concavité des taches, comme il résulte de la citation que voici: (R. EMDEN: Astroph. Journ. XV p. 54) „every vertical whirl in a river asserts itself in a depression of the surface. If the whirl, which forms by the rolling of the surface of discontinuity is not too far from the Suns surface, it will show itself like the whirl upon the surface of water. If we grant the validity of WILSONS theory of the constitution of Sun-spots as depressions in the Suns surface, then we need only to seek their cause in the Suns whirls in order to obtain a satisfactory explanation of most of the phenomena which we observe in the case of Sun-spots and their accompanying manifestations".

y) AL. WILSON: Phil. Trans. 1774. Observations of the Solar Spots. Avant WILSON

qu'a constatée LANGLEY dans la chaleur, qui rayonne des taches, à mesure qu'elles se rapprochent du bord *z*); mais elles feront bien voir le phénomène anti-Wilsonique, que M. HOWLETT et le P. SIDGREAVES ont si souvent observé *a*) et le peu de diminution, qu'ont trouvé M. M. FROST et W. G. WILSON dans la chaleur émise par les taches lorsqu'elles se rapprochent du bord *b*).

Ma théorie prévoit cependant, que la convexité des taches ne saurait persister. Car dès que la poussée de bas en haut, qui les a produites, aura trouvé un débouché nouveau et viendra à cesser ou à diminuer, la vapeur, qui les gonfle, sera toujours prête à se condenser de nouveau à leur surface en nuages moins volumineux et il n'est donc nullement surprenant qu'outre les taches convexes nombreuses, que M. HOWLETT et le P. SIDGREAVES ont vues, il y en ait aussi beaucoup de concaves, qui probablement plus âgées, ont été observées par A. WILSON, W. HERSCHEL, DE LA RUE, STEWART, LOEWY, FAYE, SECCHI et RICCO *c*). Ces deux sortes de taches ont déjà été décrites par le P. CHR. SCHEINER, qui en découvrant les taches vit tout de suite, ce que M. HOWLETT et les Pères SIDGREAVES et CORTIE n'ont observé que 270 années plus tard, que les taches sont le plus souvent convexes et relevées au dessus de la photosphère, mais qu'il y en a aussi, dont l'ombre surtout est concave *d*).

on avait généralement admis que les taches s'élevaient au dessus de la photosphère, soit comme des nuages (GALILEI), soit comme des matières volcaniques (DERHAM), soit comme des montagnes (CASSINI 1671 et LALANDE 1776). (CLERKE: *Gesch. d. Astr. w. d. 19^{ten} Jahrh.*, p. 68. YOUNG: *the Sun* p. 178).

z) LANGLEY: *Monthly Not.* 37 p. 5.

a) HOWLETT: *Monthly Not. of the R. A. S.* Dec. 1894 p. 73. P. SIDGREAVES: *Monthly Not.* March 1895 p. 282.

b) FROST: *Astron. a. Astroph.* Vol. II p. 734. *Astroph. Journ.* IV p. 201. WILSON: *Monthly Not.* Vol. 55 p. 458.

c) W. HERSCHEL: *Obs. tending to investigate the nature of the Sun.* *Phil. Trans.* 1801. DE LA RUE, BALFOUR STEWART and LOEWY: *Phil. Trans.* 1865 *Researches on Solar Physics.* FAYE C. R. 1865 XII p. 18. RICCO: *Astroph. Journ.* VI Aug. 1897 p. 91.

d) P. JOH. SCHREIBER: *loc. cit.* p. 31: „Ich versetze die Flecken nicht in eine solche Tiefe“ dit CHRISTOPH. SCHEINER, „dass sie gleichsam ganz eingetaucht sind; denn es kann die eine Fleck mehr oder weniger als der andere hervorragen, sowie auch nicht alle Schiffe am Meere gleichen Tiefgang haben“ p. 32: „Aus den Erscheinungen selbst haben wir bisher gezeigt, dass die kugelige Oberfläche der Flecken gegen uns zu kaum so viel hervorragt als genug ist, dass wir sie über die kreisrunde Begrenzung der Sonne ein wenig emporheben“ p. 34: „Dass die Flecke gegen uns convex sind, geht aus ihrer Lage am Sonnenrande hervor“ etc. (p. 30—37): „Bisweilen meint man, er denke an Vertiefungen, bisweilen verweist er die Flecken in höheres Niveau als ihre Umgebung“. „Den Kern des Fleckes im Gegensatz zum Penumbra scheint er aber bisweilen tiefer zu legen als diese.... Er glaubt eben, die Penumbra wölbe sich etwas über das Niveau der Photosphäre und der Kern sei vielleicht nach auszen sogar etwas konvex“. v. BRAUMÜHL (p. 35) s'est trompé en considérant SCHEINER comme un précurseur de

Si les taches résultent de la rupture de bulles photosphériques gonflées *e*), nous voyons dans les facules, qui les entourent le restant encore relevé de ces bulles. Or comme ce restant relevé est nécessairement peu épais, c'est là que la nappe photosphérique crèvera aisément de nouveau si la poussée de bas en haut continue. De là le phénomène habituel de l'apparition des taches en groupes. Et c'est ainsi aussi que s'explique, pourquoi au même endroit où une tache a disparu, il y a beaucoup de chance, qu'une nouvelle tache apparaisse *f*).

Je ne m'étendrai pas plus longtemps ici sur ma théorie des taches, que je tâcherai d'affermir plus loin et qui trouvera surtout au commencement de mon onzième paragraphe une très belle confirmation. Le peu, que je viens d'en dire, aura suffi pour démontrer, que les taches se formeront surtout et produiront un maximum,

WILSON; car il paraît bien, qu'après tout, les taches convexes aient fait plus d'impression sur SCHEINER que les taches concaves. CORTIE: *Astroph. Journ.* VII p. 248: „It would seem then, that while many spots are above the photospheric level and many below it, it is possible that individual spots are at different levels at different periods of their life history". Voilà précisément mon idée. D'après l'abbé TH. MOREUX „tout observateur sérieux du soleil ne peut croire à la théorie de WILSON. . . j'ai même vu des taches, dit-il, paraissant en relief sur le bord solaire" (*Bullet. de la Soc. Astron. de France*, Janvier 1907 p. 29. Sur le niveau des taches solaires).

e) Mon explication répond aussi aux observations anciennes de RESPIGHI et de YOUNG, qui virent la chromosphère au dessus d'une tache diminuée en hauteur (YOUNG: *the Sun* p. 216) et aux observations plus récentes de M. DESLANDRES, qui ne vit au dessus de l'ombre des taches que les couches supérieures de la chromosphère (*C. R.* 141 p. 377. *Astron. Jahresber.* WISLICENUS 1905 p. 476).

f) CHR. SCHEINER: *Rosa Ursina* p. 516. YOUNG: *the Sun* p. 119. P. JOH. SCHREIBER: loc. cit. p. 48, 49, 41: „Ebenso wagt CHR. SCHEINER auf Grund sehr vieler und unzweifelhafter Beobachtungen zu behaupten (p. 230) dass oft an derselben Stelle auf Fackeln Flecke und wieder auf Flecke Fackeln folgen; auch entging ihm nicht der auch in neueren Werken betonte Umstand, dass bisweilen ein Fleck verschwindet, bald aber in derselben Stelle ein neuer auftaucht. So bringt er als Beispiel einen Fleck, der verschwand nach zwei Tagen aber wieder sichtbar war, mit der Bemerkung, was auch bei anderen Flecken nicht selten vorkommt (p. 264)". Voir aussi MAUNDER: *Journ. of the Brit. Astr. Ass.* XVII p. 130: Areas of special disturbance. *Ibid* XV (1906) p. 140: „We know that the solar action reaches us along definite or restricted lines, not by any general radiation in all directions through space". L'influence solaire dont il s'agit ici est celle qui cause nos perturbations magnétiques et nos aurores polaires. Ces phénomènes n'ont pas seulement la même périodicité undécennale que les taches, mais M. MAUNDER a constaté en outre qu'ils répondent aussi aux 27 jours que dure la rotation synodique des zones royales du soleil. Quels pourraient être ces rayons définis, dont parle M. MAUNDER, j'ai déjà expliqué aux pages 20 et 21 de mon Introduction. En étudiant toutes les taches, qu'en 1860 on avait observées depuis 1612, M. FRITZ a déjà reconnu alors que les taches ont une période de 27 jours (FRITZ: *Die Beziehungen der Sonnenflecken etc.*, Haarlem 1878 p. 65). Voir aussi, quoiqu'ici le rapport avec la rotation synodique du soleil soit excessivement douteux, J. P. VAN DER STOK, *Kon. Ak. v. Wetensch. te Amsterdam*: „On a 26-day period in daily means of the barometric height" *June 24 1904* p. 18.

tant que la photosphère nouvelle continuera à être poussée en haut par la vapeur, qui dans la profondeur sera régénérée par les nuages accumulés durant le minimum précédent, et que cette formation de taches ne cessera, qu'au moment, que cette vapeur régénérée discontinuera d'excéder celle, qui à la surface ne cessera jamais de se condenser de nouveau.

Mais comme ces nuages dans la profondeur ne sauraient échapper à leur destruction totale, ce moment ne peut tarder. Alors la photosphère nouvelle aura atteint sa plus grande hauteur. Car la matière photosphérique, dont le soleil dispose, est maintenant de nouveau moins que jamais à l'état condensé et plus que jamais à l'état vaporeux, ce qui lui aura rendu son maximum de volume et par conséquent aussi son maximum de hauteur.

Or, comme cette photosphère nouvelle, criblée de trous et planant à sa plus grande hauteur est tout à fait semblable à celle qui au maximum précédent brillait aussi dans le soleil, lorsque nous commençâmes notre examen, la périodicité des taches est maintenant expliquée; car tous les phénomènes, que la photosphère ancienne a présentés et qui, après le maximum ont causé un minimum et puis encore un maximum nouveau, se répèteront à l'infini. Si telle est mon explication de la périodicité des taches, elle peut être résumée comme je l'ai fait dans l'alinéa suivant.

La photosphère descend et monte tour à tour. Lorsqu'au maximum elle plane à sa plus grande hauteur, c'est son refroidissement, qui en l'alourdissant et en effaçant ses taches la force à descendre, et lorsque le minimum étant atteint, elle est arrivée à sa plus grande profondeur, c'est son réchauffement qui la force à remonter et à restaurer un maximum nouveau.

La photosphère exécute par conséquent un mouvement vibrant, qui lui est communiqué par la vapeur photosphérique, dont la surface extérieure refroidie, qui forme et façonne la photosphère, doit descendre et monter tour à tour, selon que la vapeur s'y condensant sans cesse, excède bien ou n'excède pas la vapeur éventuellement produite dans les couches incandescentes profondes, où la matière condensée accumulée durant le minimum précédent et sollicitée par son poids à descendre toujours plus bas, finit toujours par s'évaporer. Pourquoi ce mouvement vibrant a une période moyenne de 11 ans environ et pourquoi la photosphère met généralement deux fois plus de temps à descendre qu'à monter; ce sont là des détails numériques qui ne deviendront explicables, que lorsque la température, la composition et la grandeur de la masse des couches photosphériques et la chaleur, que ces couches

perdent et recouvrent sans relâche, auront cessé d'être des particularités encore insuffisamment calculables.

§ 7. *Fonctionnement intermittent des sources de chaleur physique et chimique dans la nappe photosphérique, qui monte et descend tour à tour.*

L'essentiel du mécanisme de la périodicité des taches étant maintenant expliqué, je vais essayer de prouver, qu'outre les particularités, que nous venons d'étudier, ce mécanisme en a encore beaucoup d'autres, qui ne répondent pas moins bien aux phénomènes que le soleil nous présente. Pour arriver à ces autres particularités je ferai remarquer d'abord que, si dans le mécanisme décrit, nous n'avons vu intervenir aucun procès chimique, de tels procès y jouent cependant un rôle très important. Si ce rôle n'est pas aussi prépondérant, que je le croyais encore en 1892, lorsque je crus y voir la cause principale de la périodicité des taches *g*), il mérite cependant que nous l'étudions. Il est clair en effet, que, puisque les couches extérieures de la photosphère rayonnent toujours plus de chaleur au dehors qu'elles n'en peuvent recouvrer du dedans, leur refroidissement résultant ne causera pas seulement constamment la condensation de leur vapeur condensable, mais tout aussi bien la combinaison chimique de leurs substances combinables *h*). Et il est donc évident qu'outre la source de chaleur physique, que pour simplifier, j'ai montrée seule à l'oeuvre comme empêchant toute diminution de la température, il y aura aussi une source chimique de chaleur réparatrice, qui coopérera au même résultat. J'ai expliqué plus haut dans mon Introduction, comment ces deux sources de chaleur, qui ne peuvent le plus souvent fonctionner en même temps et se relèvent alors à tour de rôle, doivent pouvoir produire ainsi des phénomènes intermittents. Car chaque fois que la source physique sera à l'oeuvre nous la verrons produire une matière condensée blanche *R* à spectre continu et chaque fois que la source chimique sera en action la combinaison des molécules *A* et *B* nous fera voir une luminescence chimique à raies brillantes. Or une production intermittente de ces deux sortes de lumière s'observe dans toutes les couches extérieures du soleil. Si je l'ai déjà expliquée dans

g) Théorie du soleil, p. 145—168.

h) Si ce refroidissement cause aussi la décomposition de combinaisons endothermiques et fait fonctionner ainsi la source de chaleur endochimique d'ARRHENIUS, ce fonctionnement ne sera pas nécessairement intermittent comme celui de la source chimique, que j'ai expliqué comme dû à l'intervention périodique de la source physique.

mon Introduction, c'est qu'elle m'y était déjà nécessaire pour rappeler ma théorie des protubérances. Mais j'ai fait voir alors en même temps que beaucoup d'autres phénomènes lumineux intermittents, que nous présentent les taches et la photosphère doivent être attribués à la même cause. Je n'en rappellerai ici que les voiles roses, que SECCHI a souvent observés à l'intérieur des taches et évidemment produits d'après lui par la transformation d'une matière blanche préexistante *i*).

Si ces phénomènes photosphériques, où l'on voit à tour de rôle une matière condensée *R* et un gaz lumineux *AB* se produire, répondent parfaitement à ma théorie d'un fonctionnement intermittent des deux sources de chaleur physique et chimique, il y a aussi dans le spectre des taches quelques particularités, qui démontrent, que d'accord avec cette théorie, les combinaisons chimiques résultantes n'y font pas défaut. Ces particularités sont 1° les bandes obscures découvertes par CORTIE et YOUNG entre les raies *C* et *D* et qui d'après CORTIE seraient dues à des combinaisons, que le refroidissement aurait produites *j*) et 2° dans la diffusion, que montre l'élargissement de certaines raies métalliques du côté du violet *k*).

Quoique des apparitions soudaines et temporaires de poussière photosphérique, telles que ma théorie les prévoit, soient plus facilement observables dans les taches qu'ailleurs, elles ne s'en produiront pas moins sur toute la surface photosphérique, dont les granulations sembleront montrer par conséquent une agitation continuelle, que CHR. SCHEINER a déjà décrite *l*) et qui a été comparée par LIAIS

i) SECCHI: le Soleil I p. 104 (fig. 53, 54, 55) „Y a-t-il dans ces phénomènes (dit SECCHI) une transformation réelle d'arcs brillants en voiles rouges, ou bien faut-il y voir une superposition purement accidentelle? Pour résoudre cette importante question nous avons avec beaucoup de soin surveillé et étudié les taches et nous avons pu nous assurer que les courants lumineux se transforment quelquefois en voiles roses. Le 23 Janvier 1866 nous examinions une tache en forme de ∞ ; deux jets de langues brillantes s'élançaient de part et d'autre et paraissaient devoir la diviser par un pont. Cinquante minutes plus tard les langues de feu s'étaient effilées à leur extrémité. Au bout de dix minutes on les vit transformées en voiles. On ne saurait donc douter de la réalité de cette transformation”.

j) CORTIE: Astroph. Journ. VII p. 242 „Even the continuous dark spectral band of a Sun-spot has in the region *E* to *F* been resolved into fine lines by both YOUNG and DUNER, and in the region *C* to *D* YOUNG and the writer have independently detected the presence of identical dark bands, of which the only satisfactory explanation seems to be the formation of compounds over a spot by a reduction of temperature”. Voir aussi A. FOWLER: The Origin of certain Bands in the Spectra of Sunspots. M. N. 1907, p. 534.

k) FROST-SCHNEIDER: Astr. Spectr. p. 177. AMES: Astr. J. I p. 89. HARTLEY: Proc. R.S. 56 p. 192.

l) JOH. SCHREIBER: loc. cit. 20—25. „CHR. SCHEINER schreibt 1° dass die ganze Oberfläche der sichtbaren Sonnenhemisphäre heterogen ist, aus Schatten und Lichtpunkten (luculae) zusammengesetzt; 2° dass die Oberfläche einem gekräuselten See gleicht und sich dieses Aussehen fortwährend ändert”.

à celle d'un liquide où se fait une précipitation chimique *m*) et par le P. BRAUN au bouillonnement violent d'un liquide en ébullition *n*).

Les changements rapides, que ces granulations font voir, lorsqu'on compare deux réseaux photosphériques de M. JANSSEN, photographiés dans l'intervalle de quelques minutes *o*) ou même de quelques secondes seulement, comme vient de le faire M. HANSKY à Poulkawa *p*), ne sont peut-être pas réels et rien qu'un effet de réfraction dans les atmosphères de la terre ou du soleil *q*); mais si ces changements sont bien réels, mon explication nous dispense d'en attribuer la cause à quelque vitesse fabuleuse d'un déplacement matériel véritable. „Il est facile au contraire de les concevoir par des effets de dissolution ou de condensation sur place de la matière des nuages lumineux, comme sur la terre on voit quelquefois le soleil se couvrir ou se découvrir presque instantanément par condensation ou dissolution des vapeurs contenues dans l'air.” Cette citation, qui rend parfaitement mon idée est de LIAIS *r*). SECCHI n'a pas moins clairement exprimé mon idée (qui est une idée principale de ma théorie de la tranquillité du soleil) lorsqu'il dit: „Ainsi s'explique, sans qu'il soit nécessaire de recourir à des vitesses fabuleuses, la rapidité avec laquelle s'exécutent certains changements de forme dans les taches. Le déplacement apparent d'un nuage peut s'expliquer sans supposer que la matière qui la compose a réellement parcouru le même espace que le contour du nuage lui-même: il suffit pour cela d'un changement de température produisant d'une part la condensation, d'autre part la dissolution de la vapeur sur une surface étendue. C'est ainsi que par un temps de calme nous voyons le ciel se couvrir de nuages presque instantanément, ou bien s'éclaircir avec la même rapidité, les courants d'air ayant une vitesse presque nulle et incomparablement plus faible que celle du mouvement apparent des nuages” *s*).

Si je rapproche ces citations de LIAIS et de SECCHI de celles du Père FÉNYI, de YOUNG et de SECCHI, que j'ai déjà données dans mon

m) LIAIS: *L'Espace céleste* p. 51.

n) C. BRAUN S. J. *Ueber Kosmogonie* (1895) p. 175.

o) JANSSEN: *Ann. de l'Obs. d'Astr. Phys. de Paris*. JANSSEN: *Ann. du Bur. des Longit.* 1878 p. 689. YOUNG: *the Sun* p. 110.

p) A. HANSKY: *Mitt. d. Nicolai Hauptsternw. zu Pulkovo*. *Bulletin de la Soc. belge d'Astr.* Avril 1906 p. 157.

q) HALE: *Astroph. Journ.* X p. 373. Dans l'aperçu, qu'il donne du Tome I des *Ann. de l'Obs. d'Astr. Phys. de Paris*, M. HALE émet des doutes quant à l'origine solaire des phénomènes du réseau. YOUNG: *the Sun* p. 113. *Ma Théorie du soleil* p. 142—144.

r) LIAIS: *L'Espace céleste* p. 51.

s) SECCHI: *le Soleil* I p. 119.

Introduction *t*) il en résulte, qu'en considérant les changements rapides dans les protubérances et dans les granulations photosphériques comme deux phénomènes entièrement analogues et correspondant tous deux à un déplacement lumineux dans la matière tranquille, ma théorie répond complètement à l'impression que tous ces changements rapides ont faite sur l'imagination des observateurs les plus compétents du soleil, lorsque cette imagination n'était pas encore déroutée par l'application trompeuse du Principe de DÖPPLER.

Bien qu'il ne soit par conséquent jamais nécessaire, comme dit SECCHI, „de recourir à des vitesses fabuleuses” je suis cependant loin de prétendre, que dans le niveau photosphérique il n'y aurait jamais des déplacements matériels réels. Car c'est justement de ces déplacements réels que ma théorie fait résulter les facules et les taches. Nous savons en effet que chaque nuage, soit qu'il monte ou qu'il descende, est toujours traversé par une vapeur ascendante (voir plus haut p. 36) et que c'est justement cette vapeur ascendante, qui, toujours plus ou moins capable de former des facules et des taches, les formera surtout, lorsqu'elle sera plus abondante que jamais durant la période du maximum. Il y aura donc constamment dans les couches photosphériques des déplacements fort grands. Mais comme ces déplacements ne causent jamais ces éruptions formidables, dont la non-existence au dessus de la photosphère a été démontrée dans mon Introduction, leurs mouvements ascendants et descendants resteront donc nécessairement localisés dans les nappes tourmentées de la photosphère et de sa vapeur, où leur cause unique sera le grand changement que le volume de cette vapeur présentera lorsque, sans changement de température un même niveau, il diminuera toujours en haut par une condensation incessante de vapeur légère et agrandira plus ou moins

t) Voir plus haut à la page 11. Les voiles photosphérique et faculaire, qui doivent glisser sur toute la surface de la photosphère et que nous étudierons dans mon 10^{me} paragraphe, causeront surtout aussi des changements énormes dans l'apparence de cette surface; et cela non seulement, parce que ces voiles, nécessairement inégaux en épaisseur en différents endroits voisins et même troués par ci et par là, doivent nous faire voir ce qu'ils nous cachent successivement de différentes manières, mais encore et surtout parce que ces voiles eux-mêmes, en recouvrant successivement des objets aussi différemment émissifs que doivent être les granules et les pores, doivent aussi s'amincir et s'épaissir continuellement. — Le „réseau photosphérique” de M. JANSSEN et les „taches voilées” de TROUVELOT résulteront ainsi de la même cause; et il n'est donc nullement étonnant que des obscurcissements photosphériques passagers, tels que le P. PERRY les a vus en 1889 à Stonyhurst, aient été identifiés par lui avec des taches voilées, tandis que RANYARD y vit un réseau photosphérique changeant. (Observatory VII p. 154. A. M. CLERKE: Gesch. d. Astr. w. d. 19^{ten} Jahrh. 1889 p. 218). Les deux astronomes avaient raison tous deux. C'est ce que nous verrons dans mon 10^{me} paragraphe.

en bas par l'apparition nouvelle de cette même vapeur dans un état lourd et comprimé. Si telle est la cause des mouvements photosphériques réels et si nous nous rappelons en outre qu'à la vapeur photosphérique sont toujours mélangées des combinaisons chimiques, dont la plus ou moins grande dissociation, tout en causant aussi des changements de volume, tendra à empêcher que dans un même niveau des inégalités de température se produisent, ces considérations aideront à nous faire comprendre, pourquoi le mouvement, qui résultera d'une expansion ou d'une contraction locales de la vapeur photosphérique, restera toujours localisé au possible près de l'endroit où ce mouvement aura été produit et n'ira jamais au delà des couches au travers desquelles la photosphère monte et descend. Au dehors de la photosphère ce mouvement aura cessé. Peut-être en verrons nous cependant un effet passager dans les floccules faculaires de calcium et dans quelques protubérances. Il est fort bien possible en effet que ces phénomènes lumineux doivent leur luminescence chimique passagère à un déplacement rapide et soudain des couches chromosphériques au moment que la photosphère, qui monte, les relève. Car ce relèvement soudain causera un changement de température et une compression, qui agiront peut-être ensemble pour engendrer un procès chimique *u*).

Il résulte de toutes les considérations précédentes, que les Sources de chaleur physique et chimique font bien de leur mieux pour aider à entretenir la chaleur solaire, mais qu'au bout du compte elles n'y réussissent jamais. Car si elles produisent beaucoup de chaleur tant que la photosphère refroidie se contracte plus fortement que le reste du Soleil, elles s'épuisent bien vite à cette tâche, dont elles détruisent ensuite tout l'effet, parce qu'en se restaurant, lorsque la photosphère réchauffée remonte, elles consomment alors de nouveau la chaleur, qu'elles avaient produite, lorsque la photosphère refroidie descendait. Mais, si ces deux sources de chaleur ne peuvent efficacement coopérer de la sorte à la conservation de la chaleur solaire, leur fonctionnement n'en cause pas moins des phénomènes grandioses. Car 1° ce sont elles qui forment la photosphère, dont la tâche immense est de convertir la chaleur qui lui arrive incessamment du dedans en rayons solaires qu'elle lance au dehors et 2° ce sont elles aussi qui, en venant alternativement en aide aux sources de chaleur plus puissantes ou en les contrariant, font marcher le mécanisme qui cause la périodicité des taches.

u) La propagation ondulatoire d'une telle compression pourra jouer aussi un rôle dans la formation des protubérances et d'autres phénomènes lumineux dans les atmosphères stellaires

Tâchons maintenant d'appliquer notre hypothèse de la photosphère vibrante, qui monte et descend tour à tour, à l'explication de quelques particularités de la périodicité des phénomènes solaires.

§ 8. *Inégalité de la périodicité aux différentes latitudes.*

Parmi les particularités de la périodicité solaire une des plus intéressantes est sans contredit, qu'à chaque latitude cette périodicité nous montre des phases différentes et que si l'on parle néanmoins d'une périodicité en général de l'activité solaire, cette périodicité n'a aucun rapport avec une activité quelconque de la masse totale du soleil, mais est uniquement causée par la collaboration de toutes ces périodicités locales à phases différentes, produisant dans le nombre total des taches et dans l'étendue de leur distribution un maximum lorsque leur latitude moyenne, du moins dans ces dernières années, est de 16° environ.

Cette particularité importante, qui a fait trouver, à CARRINGTON et à SPOERER leur loi du changement des taches en latitude v), est clairement démontrée dans les Tables où SPOERER a enregistré toutes les taches, qu'il a observées durant les années 1856 à 1884 et où il a mis en regard leur fréquence à chaque latitude durant les dix époques successives, qu'il a distinguées dans toute période undécennale w). Ces tables font voir que lorsque le maximum se montre à 16° , le maximum à 30° a déjà eu lieu 1 ou 2 ans plus tôt et que celui à 5° n'aura lieu que 2 à 3 ans plus tard. Les observations de SPOERER me semblent démontrer aussi que les oscillations dans les différentes activités aux différentes latitudes ne diffèrent pas seulement en phase mais aussi en durée. En mesurant les courbes bien connues x), qui d'après SPOERER représentent, comment en

v) R. C. CARRINGTON: Obs. of the Spots on the Sun, made at Redhill 1863 p. 17. SPOERER: Publ. d. Astron. Geselsch. vol 13 (1874 et 1876); Publ. d. Astroph. Obs. zu Potsdam N°. 1 Vol. 1 Part I; N°. 5 vol. 2 Part I; Comptes Rendus 108 p. 486. La loi de CARRINGTON et SPOERER a fait en 1904 l'objet d'importantes recherches, qui suscitées par la critique du Dr. W. J. S. LOCKYER, et par son interprétation des observations du P. BRAUN à Kalocsa, ont été faites par M. MAUNDER et par le P. CORTIE et ont fait voir, comment en somme, cette loi répond très bien aux observations. „On the whole (dit M. MAUNDER: loc. cit. p. 761) the results of the Greenwich record for the 29 years 1874 tot 1902 fully confirm and bear out SPOERERS law of Spot-zones, whilst indicating some important additions to it". Et en effet la loi se voit parfaitement vérifiée dans la fig. 8 convaincante de la page 760, où M. MAUNDER a résumé le résultat de ses observations. Dr. LOCKYER: Monthly Not. 64 App. p. 5. CARL BRAUN: Berichte von dem Erzbischöflich Haynaldschen Obs. zu Kalocsa 1886. E. WALTER MAUNDER: Monthly Not. 64 p. 747—761. A. L. CORTIE S. J. Ibid. p. 762—767.

w) SPOERER: Publ. d. Astroph. Obs. z. Potsdam Bd. IV, 4 p. 414.

x) YOUNG: the Sun p. 157. Mr. and Mrs. MAUNDER: Monthly Notices Vol. LXV

chaque période les taches apparaissent successivement à des latitudes, qui, à partir de 30° environ, diminuent lentement pour resauter, lorsque commence une période nouvelle, à 30° , on voit facilement que la durée de la période diminue lorsque la latitude augmente. Car l'intervalle entre deux courbes consécutives diminue avec la latitude. C'est ainsi par exemple qu'aux latitudes de 10° , 20° et 30° la durée de l'intervalle diminue respectivement de 12 ans à 11 ans et 10 ans et demi.

Mais si à chaque latitude les périodes diffèrent en durée et conséquemment aussi en phase la marche des phénomènes, que CARRINGTON et SPOERER ont découverte, et que SPOERER a représentée dans ses courbes, ne saurait persister. Si maintenant les taches réapparaissent à chaque soit disant période nouvelle à leurs plus grandes latitudes, SPOERER a déjà démontré que cela n'a pas toujours été ainsi *y*) et il est certain que cela ne durera pas ainsi toujours.

Les périodicités différentes à chaque latitude du soleil répondent aux prévisions de ma théorie de la photosphère vibrante. Car la photosphère, qui, comme on sait, ne tourne pas sur l'axe tout d'une pièce, ne saurait vibrer tout d'une pièce non plus. A chaque latitude elle vibrera avec une période différente. Or, comme à peu près les deux tiers de cette période répondent au temps, que la photosphère met à descendre, sa durée entière dépendra surtout de la vitesse avec laquelle la photosphère descend. Et comme cette vitesse sera d'autant plus petite que la pesanteur sera moins grande et le refroidissement moins fort, la période sera à l'équateur plus longue qu'ailleurs. Car là les deux causes, qui font descendre la photosphère, sont aussi plus énergiquement combattues qu'ailleurs : 1° la pesanteur, par le mouvement centrifuge et 2° le refroidissement, par le renflement équatorial fonctionnant comme un écran protecteur.

p. 814. „The break between two cycles in any particular latitude generally lasts for something like three full years during which no spots whatsoever, not even the most minute, appear in that particular zone. The time, when this break takes place differs for different zones; but for any particular zone this entire cessation of activity is one of the most unmistakable characteristics of solar variation”. Voir cependant le Tableau VI dans mon 10^{me} §, qui nous montrera que d'après les observations de SPOERER (loc. cit. p. 414) la durée moyenne de l'absence assidue de taches diminue vers l'équateur. C'est ce qu'on voit très bien aussi sur la belle figure que M. MAUNDER a insérée dans les Monthly Notices 64 à la page. 760 et dont j'ai déjà parlé dans la note *v* précédente.

y) SPOERER: Vierteljahrschr. d. Astr. Ges. 22 Heft 4 (1887). Ueber die Periodicität der Sonnenflecken seit dem Jahre 1618, vornehmlich in Bezug auf die heliographische Breite derselben etc. p. 323—329.

§. 9. *Les recherches de M. POOR sur la forme du soleil appuyant mon hypothèse de la photosphère vibrante.*

Mais ma théorie de la photosphère vibrante n'est pas seulement en accord avec les observations déjà anciennes de SPOERER, que je viens de rappeler, elle est aussi en concordance parfaite avec les recherches récentes de CHARLES LANE POOR sur la forme du soleil *z*). Ces recherches semblent prouver en effet, que durant la période du maximum des taches le diamètre équatorial du soleil est plus grand que le diamètre polaire et qu'il l'est même d'autant plus que le maximum est plus prononcé, tandis que durant la période du minimum cette différence n'existe pas ou change même de signe. La vibration, que M. POOR, sans connaître ma théorie, a constatée est donc précisément celle, que moi, sans connaître ses travaux, j'ai prédite et expliquée. Il est vrai toutefois, qu'en élaborant durant le mois d' Octobre 1905 ma théorie de la photosphère vibrante, que j'ai fait connaître quatre mois plus tard en trois conférences populaires à Rotterdam, à la Haye et à Delft *a*), les vibrations que je postulais me semblaient trop faibles pour être visibles et j'étais alors encore bien loin de savoir, qu'au moment que l'idée de ces vibrations me vint pour la première fois dans l'esprit, leur réalité, avec une amplitude de 0,2 sec., venait justement d'être reconnue par un autre.

Les recherches de M. POOR ayant donné ainsi à ma théorie un appui imprévu, il est regrettable sans doute, que, d'après M. AMBRONN, les mesures héliométriques qu'il a faites durant les années 1892 à 1902 avec M. SCHUR, pour déterminer la forme du soleil, ne les aient pas confirmées comme M. POOR l'avait cru d'abord *b*).

z) CH. L. POOR: *Astroph. Journ.* XXII Sept. 1905 p. 103 — Dec. 1905 p. 305. La forme du Soleil a été déduite par M. POOR 1° de 22 photographies obtenues par LEWIS M. RUTHERFORD durant les années 1870—1874; 2° des mesures héliométriques, qu' a faites, à propos des derniers passages de Vénus, l'expédition allemande durant les années 1873—75 et 1880—83; 3° de 5 photographies obtenues à Northfield par M. M. PAYNE et H. C. WILSON et 4° des mesures héliométriques que M. M. SCHUR et AMBRONN ont faites à Göttingen durant les années 1890—1902.

a) Des comptes rendus de ces conférences ont été donnés dans les journaux locaux. Ceux surtout de la „Nieuwe Courant” du 24 Mars et du 7 Avril et de la Revue hollandaise „Hollandsche Revue” du mois de Juin 1906 sont assez détaillés et corrects. Le cliché de la figure à la page 43 précédente est dû à l'obligeance de l'Editeur de la Revue hollandaise, qui a publié cette figure le premier.

b) AMBRONN: *Astron. Mitth. d. K. Sternw. zu Göttingen. Theil 7* (1905) *Die Messungen des Sonnendurchmessers* — *Astroph. Journ.* XXIII May 1906. *Remarks on Mr. C. L. Poor's papers on the figure of the Sun* p. 343. — Voir aussi ma deuxième Note *s* dans le paragraphe suivant.

Mais comme ces mesures n'ont révélé d'ailleurs aucune déformation contraire, ma théorie les accepte en tout cas comme une réfutation nouvelle et opportune de l'ancienne théorie de SECCHI et de ROSA *c)*, d'après laquelle le diamètre moyen du soleil augmenterait lorsque ses taches diminuent, théorie, qui combattue par AUWERS *d)* a été soutenue par R. WOLF *e)*. Les observations de M. POOR stimuleront, j'espère, encore beaucoup d'autres observateurs à les contrôler et à les continuer. Puissent ces observations futures répondre aux recherches de M. POOR et de moi et puissent elles vérifier notre idée de la photosphère vibrante *f)*.

§ 10. Répartition des taches sur la surface du soleil.

Le phénomène, que je tâcherai d'expliquer en ce paragraphe, est la répartition des taches en deux zones, que CHR. SCHEINER *g)* a nommées „royales” et qui s'étendent à chaque côté de l'équateur entre les latitudes de 5 à 30° environ. Entre les latitudes de 10° et de 15° les taches se montrent en plus grand nombre *h)*. Sur l'équateur elles ne sont pas nombreuses *i)* et seulement une tache a été signalée jusqu' à présent à plus de 45° de l'équateur *j)*.

Si l'on ne voit de taches bien formées et bordées de facules que dans ces zones royales, tout le reste de la photosphère, bien loin d'être uniformément lumineuse, est comme parsemée de taches mal réussies, qu'on a nommées secondaires, rudimentaires ou voilées. „Toute la surface du soleil est parsemée de taches secondaires” dit

c) PAOLO ROSA: *Studii intorno ai diametri solari* Roma 1874.

d) AUWERS: *Sitz. d. Preuss. Ac. d. Wiss. zu Berlin* 1886 p. 1125; 1887 p. 109 -- *Astr. Nachr.* N° 3068.

e) R. WOLF: *Handb. d. Astr.* Viertes Halbband p. 433—435.

f) Cette idée de la photosphère vibrante répond très bien aussi à l'observation de SECCHI, „qu'on peut affirmer que la couleur un peu jaune de la zone superficielle du soleil, due à l'absorption de son atmosphère, semble plus prononcée aux époques où il y a peu de taches” (SECCHI: *les Etoiles* I p. 155). M. J. SYKORA à l'observatoire de Charkow a observé aussi que les taches produisent un renflement de la photosphère là où elles se forment (*Nature* 1896 p. 352; *Journ. of the Brit. Astr. Ass.* VI p. 232).

g) CHR. SCHEINER: *Rosa ursina* p. 568. P. JOH. SCHREIBER: *loc. cit.* p. 28.

h) CARRINGTON: *Obs. of the Spots of the Sun from Nov. 1853 to Nov. 1861 made at Redhill*. SPOERER: *Sonnenfleckenbeobachtungen* 1880—1884. E. W. MAUNDER: *Monthl. Not.* 64 (1904) p. 747. Note on the distribution of Sun-Spots in Heliographic Latitude.

i) CARRINGTON et SPOERER n'y ont observé que 45 taches durant les années 1853—1867.

j) SECCHI: *le Soleil* I p. 131. „En 1846 M. PETERS à Naples observa une tache à 50° de latitude nord. Cette tache est la plus éloignée de l'équateur, qu'on ait jamais observée d'une manière certaine, car on regarde comme douteuse celle dont parle Lahire et qui aurait eu pour latitude 70° nord”.

CHR. SCHEINER *k*). Toute cette surface, dit SECCHI *l*) „est quelquefois tellement recouverte d'un réseau sombre à points noirs, qu'on serait tenté de voir partout des pores et des rudiments de taches". Même aux latitudes les plus élevées CHR. SCHEINER et SECCHI ont observé „des calottes polaires obscures et intermittentes, qui étaient bordées de granulations, qui traçaient quelquefois quelque chose d'analogue à des zones polaires" *m*). Les „taches voilées" sur toute la surface du soleil, si bien décrites déjà dans la *Rosa ursina* *n*) ont été découvertes de nouveau en 1875 par TROUVELOT *o*). Il les considère comme analogues aux taches ordinaires, dont elles ne se distinguent que par leur perforation insuffisante de la photosphère *p*). Il y a d'ailleurs encore d'autres phénomènes, qui démontrent, que hors des zones royales les taches essayent bien de se montrer, mais n'y parviennent jamais. Très significatives sont sous ce rapport les facules, qui, compagnes fidèles des taches, ne s'en voient pas moins sur toute la surface du soleil et jusque dans le voisinage des pôles, qu'elles entourent quelquefois, mais nullement à l'époque du maximum, d'une couronne très marquée *q*). Si dans les zones royales nous voyons toujours des facules tout à l'entour des taches et aux endroits où des taches vont naître ou auront disparu; et si par conséquent les facules et les taches sont dues à une même cause, que j'ai d'ailleurs expliquée plus haut, cette même cause fonctionnera vraisemblablement aussi hors de ces zones royales. Et si elle n'y parvient qu'à soulever des facules, c'est parce que les taches y avortent toujours. Ces facules seront d'ailleurs en vertu de leur origine souvent tout aussi cratériformes que celles qui bordent les taches, et il n'est donc nullement étonnant que SECCHI ait souvent observé ces „cratères sans tache" *r*) et que les clichés spectrohéliographiques de M. M. HALE et DESLANDRES les aient aussi révélés *s*).

k) CHR. SCHEINER: *Rosa ursina* p. 534. P. J. SCHREIBER: loc. cit. p. 24—26.

l) SECCHI: le Soleil I p. 58. LOCKYER: *Chem. of the Sun* p. 408.

m) CHR. SCHEINER: *Rosa ursina* p. 344. P. J. SCHREIBER: loc. cit. p. 25. SECCHI: le Soleil I p. 114, 133 II p. 129, 145.

n) CHR. SCHEINER: *Rosa ursina* p. 344. P. J. SCHREIBER: loc. cit. p. 24.

o) TROUVELOT: *Amer. Journ. of Science and Art*, March 1876 3^d Ser. Vol. XI.

p) YOUNG: *the Sun* p. 136—137.

q) SECCHI: le Soleil II p. 154. MASCARI: *Astroph. Journ.* VI p. 371 „The principal maximum of the faculae falls in the same zone with the maximum of groups of spots and pores, but there is no correspondance of the spots with the secondary polar maxima of faculae". Nous voyons encore là, que les mêmes phénomènes ont à différentes latitudes des périodicités différentes.

r) SECCHI: le Soleil I p. 113.

s) Voir par exemple les belles photographies que M. DESLANDRES a obtenues le 10 et le 11 Avril 1894. On y voit sur toute la surface du soleil une multitude d'anneaux

Si c'est donc sur toute la surface du soleil que, d'accord avec ma théorie, les taches essayent de se développer, je tâcherai d'expliquer maintenant, pourquoi ce n'est que dans les zones royales que ces essais réussissent.

Nous chercherons cette explication dans l'anormalité de la rotation de la photosphère qui tourne tout autrement sur l'axe que l'atmosphère du soleil *t*). Examinons en premier lieu cette rotation anormale de la photosphère. Elle ne ressemble en rien à celle d'aucun autre objet tournant. Car les taches, que la photosphère nous montre dans ses différentes zones, bien loin d'accomplir leur rotation dans le même temps, y mettent des temps très différents, dont les durées, ainsi que CARRINGTON l'a découvert *u*) augmentent avec la latitude. Si nous nous voyons donc forcés d'admettre que les différentes zones photosphériques, où ces taches se trouvent, tournent aussi avec des vitesses angulaires différentes, nous aurions tort cependant de croire que les nuages photosphériques et les taches auraient précisément la même vitesse. Les taches marchent généralement plus vite.

Tous les astronomes sont d'accord que tant qu'une tache existe il lui arrive de temps en temps d'avancer brusquement, beaucoup plus vite que ne le demande la loi de CARRINGTON et SPOERER. Voici par exemple ce que M. YOUNG nous apprend *v*): „Toutes les fois qu'une tache subit des changements soudains, elle s'avance ordinairement sur la surface solaire en faisant presque un saut". Et SECCHI s'exprime ainsi *w*): „Toutes les fois qu'une tache se divise ou qu'elle subit un changement considérable dans sa forme, on observe toujours un mouvement brusque, une espèce de saut, qui se fait invariablement vers la partie antérieure, c'est à dire

de calcium faculaire. (Specimens de Photographie astronomique par H. DESLANDRES 1897) Ces petits anneaux de calcium faculaire se voient aussi en grand nombre sur l'image calcique du soleil, qu' a insérée M^{lle} CLERKE dans ses „Problems" (Plate IV fig. 1). Si ces anneaux ne sont pas les facules elles-mêmes, ils nous font voir en tout cas la position de leurs sommets. — De tels anneaux calcique et ferrique sans tache se voient aussi sur les spectro-héliographies, que M.M. HALE et ELLERMAN ont déjà obtenues sur le Mont Wilson (Astroph. Journ. XXIII p. 62 Dec. 1905).

t) Une telle explication a déjà été longuement décrite dans ma Théorie de 1892, p. 133—142; Astron. u. Astroph. XIII p. 854—856. Mais comme depuis lors de nouvelles recherches sur la rotation du soleil ont prouvé, comme M. J. C. KAPTEYN me l'a fait remarquer, que les données accessibles en 1892 n'étaient pas correctes, mon explication d'alors a dû être profondément modifiée pour pouvoir être mise d'accord avec les données meilleures d'aujourd'hui.

u) CARRINGTON: Observ. of the Spots of the Sun made at Redhill (1853—1861).

v) YOUNG: le Soleil p. 116. The Sun (1895) p. 119.

w) SECCHI: le Soleil I p. 141.

dans le sens où croissent les longitudes. Les grandes taches, même lorsqu'elles ont une longue durée ne sont pas exemptes de ces mouvements brusques et l'on remarque de temps en temps des recrudescences dans la force ou dans le mouvement qui les produit'' SPOERER et déjà CHR. SCHEINER ont fait des observations analogues *x*). Ces accélérations accidentelles se rattachent d'ailleurs à un mouvement propre des taches et ne sont pas dues à une accélération temporaire dans la nappe photosphérique, qui les transporte. Car lorsque les taches forment des groupes, jamais elles ne montrent une accélération commune, mais gardent toujours leur individualité *y*). Si nous croyons pouvoir admettre que tant que les taches ne changent pas de forme, elles ont la même vitesse que les nuages photosphériques, alors toutes les fois qu'elles changent bien de forme elles tourneront plus vite. Et comme la loi de CARRINGTON et SPOERER n'a pu être déduite que du mouvement moyen des taches d'où, même avec la meilleure volonté, l'influence des accélérations décrites et d'ailleurs peut-être permanentes n'a pu être complètement éliminée, on comprendra donc aisément que la vitesse des taches telle qu'elle résulte de cette loi doit être plus grande que celle des nuages photosphériques. Dans mon 11^{me} § je tâcherai d'expliquer, comment cette plus grande vitesse des taches résulte de la vitesse angulaire plus grande de la poussée d'en bas qui les forme et les fait durer.

L'accélération des taches par rapport aux nuages photosphériques répond parfaitement aussi à plusieurs particularités remarquables que les vitesses des taches présentent et que les deux Tableaux suivants font ressortir clairement. Dans ces Tableaux les nombres entre crochets indiquent le nombre de taches observées.

x) SPOERER: Publ. d. Astroph. Obs. zu Potsdam IV p. 422 (voir le Tableau I suivant). P. J. SCHREIBER: loc. cit. p. 44—47.

y) SPOERER: loc. cit. „Die Beobachtungen haben ergeben, dass in östlichen Theile einer Gruppe niemals übergrosse Rotationswinkel vorkommen... Uebergrosse Rotationswinkel kommen vor bei neu entstandenen Flecken und an der Westgrenze der Gruppen". CHR. SCHEINER: Rosa ursina p. 286. „Die vorhergehende Fleck hat eine grössere Rotationsgeschwindigkeit als der nachfolgende und dies ist etwas ganz Ständiges bei diesem Phänomen".

Tableau I.

Angle de rotation diurne des taches.

Latitude	Observations de CARRINGTON	Observations de SPOERER	Observations de M. et M ^{me} MAUNDER			Taches étudiées par SPOERER dans les Public. de Potsdam N° 32 (1885—1893) Ici chaque latitude indique le milieu d'une zone de 2°.		
			Groupes qui durent 6 jours ou plus longtemps	Groupes revenus après leur 1 ^{re} rotation	Groupes revenus sur 100 vus dans la 1 ^{re} rotation	Angle moyen	Angle le plus grand et le plus petit	Différences entre les angles anormaux VIII et les angles normaux III
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
0°	14.42	14.35	14.60 (41)	14.43 (11)	27	14.90 (9)	15.87 et 14.33	+1.52 et -0.02
2 ¹ / ₂	14.41	14.34	14.61 (133)	14.46 (40)	30	14.56 (18)	15.96 — 14.12	+ 1.62 — 0.22
7 ¹ / ₂	14.34	14.30	14.55 (394)	14.39 (97)	24	14.47 (46)	15.40 — 13.91	+ 1.10 — 0.39
12 ¹ / ₂	14.23	14.21	14.45 (585)	14.34 (156)	27	14.39 (60)	15.50 — 13.70	+ 1.29 — 0.51
15	14.18	14.15	14.41 (518)	14.31 (141)	27	14.42 (72)	16.30 — 13.50	+ 2.25 — 0.65
17 ¹ / ₂	14.10	14.08	14.37 (440)	14.28 (125)	28	14.19 (29)	15.40 — 13.81	+ 1.32 — 0.27
22 ¹ / ₂	13.92	13.90	14.19 (225)	14.13 (76)	33	14.12 (18)	15.23 — 13.59	+ 1.33 — 0.31
27 ¹ / ₂	13.70	13.69	14.00 (80)	13.99 (28)	35	14.24 (15)	15.90 — 13.49	+ 2.21 — 0.20
30	13.60	13.57	13.83 (35)	13.88 (14)	40	13.62 (2)		
32 ¹ / ₂	13.51	13.43	13.75 (12)	13.76 (2)	17	13.59 (3)		
35	13.43	13.29	13.51 (5)	(0)	0			
40		12.99						
45	12.92	12.66						

Tableau II.

Diminution de la vitesse des taches avec leur durée, d'après
M. et M^{me} MAUNDER.

Durée des taches	Leur angle de rotation diurne moyen
6 à 7 jours	14.50 (470)
8 à 10 jours	14.47 (681)
11 à 14 jours	14.31 (720)
taches dans leur 2 ^{me} rotation.	14.29 (522)

Dans le Tableau I on pourra comparer les mesures anciennes de CARRINGTON et de SPOERER avec les mesures récentes, qu'ont faites M. et M^{me} MAUNDER en étudiant les 4700 groupes de taches, qui

de 1879 à 1901 ont été photographiés à Greenwich *z*). On verra ainsi que les taches réunies en groupes marchent plus vite que les taches en général. Si les taches en général marchent plus vite que les nuages qu'elles traversent, la vitesse plus grande des groupes s'explique facilement. Car, comme l'union fait la force, les taches réunies en groupes auront moins de peine à vaincre la résistance des nuages plus lents. Cette résistance se manifeste non moins clairement dans le ralentissement que, d'après les colonnes IV et V du Tableau I et d'après le Tableau II, nous montrent les taches à mesure qu'elles durent plus longtemps. C'est ainsi aussi que M. STEPHANI à Kassel a tout récemment observé, qu'une tache, qui avait accompli sa première rotation en 27 jours, en demandait 29 pour achever la seconde *a*). Les dernières trois colonnes du Tableau I se rapportent à 476 mesures, que SPOERER a faites durant les années de 1885 à 1893 *b*). La colonne VIII fait voir qu'en chaque latitude des différences de vitesse s'observent, qui sont, comme M. et M^{me}. MAUNDER l'ont aussi observé, beaucoup plus grandes que ne produit jamais même la plus grande différence en latitude. C'est ainsi par exemple que parmi les 476 mesures de SPOERER j'en ai trouvé jusqu'à 49, qui accusaient un angle exorbitant de plus de 15°, dont il y en avait 5 qui s'élevaient même jusqu'à 16° à 16°.30. En comparant les vitesses les plus anormales de la colonne VIII avec les vitesses normales de SPOERER (colonne III) le mouvement généralement accéléré des taches ressort de nouveau. Car les vitesses les plus anormales le sont très fortement lorsqu'elles sont trop grandes mais très faiblement lorsqu'elles sont trop petites (colonne IX).

Il résulte des considérations précédentes que, si de la rotation des taches nous aurons à déduire celle des nuages photosphériques, ce ne seront pas les groupes accélérés de M. et de M^{me}. MAUNDER, qui devront nous guider, mais plutôt les taches plus lentes de

z) E. W. MAUNDER and A. S. D. MAUNDER: The Solar Rotation Period from Greenwich Sun-spot Measures 1879—1901. Monthly Not. LXV (1905) p. 813—825. „Carringtons period does not correspond to a latitude of between 10° and 15° as he supposed, but is given by the separate spot-groups of latitude 22½°; by the recurrent spots of latitude 20°. CARRINGTONS period is not that of the mean of all spots but is considerably longer than that mean.... The recurrent spots give a somewhat longer period in the mean and are more accordant inter se than are the groups treated separately.... The rotation periods given by different spots in the same zone of latitude differ more widely than do the mean rotation periods for different zones of latitude.... Spots of short duration tend to give a shorter rotation period than spots of long.”

a) E. STEPHANI: Mitt. d. V. v. Freunden d. Astr. Mai 1907 p. 41. „Diese Verlangsamung der Fleckenbewegung ist sehr interessant und wichtig zur Erkenntnis der Vorgänge auf der Sonne, und die Photographien sollen deshalb noch genauer nachgemessen werden”.

b) SPOERER: Publ. d. Astroph. Obs. zu Potsdam N°. 32 (1894) p. 7—140.

CARRINGTON et de SPOERER. Mais même ces taches les plus lentes demeurant nécessairement sujettes à l'accélération de la poussée d'en bas qu'il leur faut pour durer, ne sauront jamais nous donner la certitude que les nuages photosphériques ne tournent pas toujours beaucoup plus lentement encore.

Pour essayer de trancher cette question difficile, de tout autres considérations seront nécessaires, que je tâcherai d'exposer tantôt (voir la note x suivante). Mais auparavant je continuerai maintenant mon étude de la rotation du soleil par celle de la rotation de son atmosphère gazeuse.

De la rotation du gaz solaire au dessous et même au dessus de la photosphère nous ne savons malheureusement avec certitude que bien peu. La rotation des couches renversantes a été étudiée au moyen des déplacements opposés, que d'après DOPPLER les raies du spectre doivent montrer aux bords occidental et oriental du soleil. ZÖLLNER, VOGEL, HASTINGS, LANGLEY et YOUNG *c*) fûrent les premiers à faire cette étude; mais leurs résultats n'avaient qu'une valeur qualitative ou, comme ceux de M. YOUNG, n'avaient rapport qu'à la seule latitude moyenne de 7° . Plus tard (en 1888 et 89) M. H. CREW *d*) et en 1890 M. N. C. DUNER *e*) ont continué cette étude en tâchant de découvrir si la rotation des couches renversantes changeait avec la latitude. Mais malheureusement ils sont arrivés

c) YOUNG: the Sun p. 100. ZÖLLNER: Pogg. Ann. 114 (1871). HASTINGS: Amer. Journ. of Sc. (1873). LANGLEY: Ibid. (1877). YOUNG: Ibid. 1876.

d) H. CREW: American Journ. of Science 1888. On the period of the rotation of the sun as determined by the Spectroscope. Ibid. 1889. On the Period of the Rotation of the Sun. M. CREW a fait deux séries d'observations dont la première avait des défauts, auxquels il s'est efforcé de remédier dans la seconde. La première fit trouver pour l'angle de rotation diurne de la couche renversante à la latitude χ° la valeur $838' (1 + 0.00335 \chi)$; la seconde donna à cet angle la valeur $802' (1 - 0.00206 \chi)$. M. CREW a tâché d'expliquer la grande différence entre ces deux valeurs. A la page 209 il dit e. a.: „The value of the mean relative equatorial velocity thus obtained is $V' - V'' = 2.173 \pm 0.028$ mi per sec., a velocity some 15 per cent less than in the first series. But this as Prof. YOUNG has pointed out, is just what one would expect, since all the settings of the first series were made with the grating „right” and all those of the second with the grating „left”. For the heating effect of the Sun on the slit-plate will in the first place introduce an error with a positive sign and in the second case with a negative sign: but these errors will not be equal in amount”. En combinant finalement toutes ses observations M. CREW a calculé pour l'angle de rotation, qu'il cherchait, la valeur $823' (1 + 0.00065 \chi)$, qui implique une très petite accélération vers les pôles. (Voir mon Tableau V).

e) N. C. DUNER: Recherches sur la Rotation du Soleil (1891). On a cru d'abord que les vitesses, que M. DUNER a données, nous renseignaient sur la rotation sidérale du soleil. Mais M. DUNER a fait remarquer plus tard (Astr. Nachr. N°. 3994) que c'est à la rotation synodique, qu'elles se rapportent. Elles ont donc besoin d'une correction les augmentant fortement pour pouvoir nous faire connaître la rotation réelle du soleil. Dans mon Tableau III cette correction a été faite.

ainsi à des résultats tout à fait discordants. M. CREW trouva que la rotation du gaz absorbant s'accomplit à toutes les latitudes à peu près dans le même temps de 26,23 jours. Mais M. DUNER constata au contraire que cette rotation, pareille à celle des taches, aurait à chaque latitude une durée différente, qu'il vit augmenter de 25.46 jours à l'équateur jusqu'à 38.5 jours à la latitude de 75. Comme les mesures de M. DUNER étaient sans doute plus exactes, celles de M. CREW, qui étaient trop peu concordantes et trop peu convaincantes, ont été tout à fait méconnues et c'est ainsi qu'on a généralement accepté la conclusion de M. DUNER.

Mais cette conclusion n'est cependant nullement péremptoire, parce qu'elle est nécessairement fondée sur deux suppositions très douteuses. Cette conclusion demande en effet 1° que M. CREW ait observé si incorrectement que ses résultats doivent être considérés comme nonavenus et 2° que M. DUNER ait au contraire si bien choisi ses raies 6301.72 et 6302.72, qu'il n'existe aucun doute, que ces raies sont produites au dessus du niveau général de la photosphère et non pas au dessous *f*). Or voilà deux suppositions tout à fait incertaines. Occupons nous ici de la seconde. M. DUNER suppose bien que les raies, qu'il a choisies, doivent être produites au dessus du niveau supérieur de la photosphère, mais cette supposition n'a jamais été justifiée. Si ces raies étaient parmi les 11 ou 34 raies, qu'au dehors de la photosphère on voit toujours ou de temps en temps renversées *g*) ou du moins parmi les 273 raies chromosphériques, que M. YOUNG a observées sur le M^t. Sherman *h*), ou si elles avaient jamais répondu à quelque arc d'un flash spectrum plus récent, la supposition de M. DUNER eût été justifiée. Mais cette justification n'a jamais été donnée, que je sache. Et il est donc fort bien possible que ces raies ne nous aient rien appris de la rotation du gaz au dehors de la photosphère et n'aient révélé que la rotation du gaz plus profond dans les interstices entre les nuages photosphériques *i*).

f) CLERKE: Probl. p. 147 „At the same time it has to be borne in mind that DUNER'S deductions rest upon a narrow basis. He measured only a single pair of lines and we lack the specific assurance that those individual lines occur in the facular and spot spectra. Presumably they do; no reason is apparent why they should behave exceptionally. They should also be looked for in the flash at the edge of the eclipsed sun. Their detection as brilliant lines would confirm and settle their status”.

g) YOUNG: the Sun p. 206—207.

h) YOUNG: Amer. Journ. of Sc. (3) 4 p. 356—363.

i) Le P. BRAUN regrette aussi que M. DUNER n'ait pas choisi des raies sûrement produites dans les plus hautes régions de l'atmosphère solaire, comme les raies de l'hydrogène par exemple (Ueber Kosmogonie, nebst einer Theorie der Sonne p. 178—179).

Il y a d'ailleurs quelques phénomènes bien connus, qui nous prouvent qu'un grand nombre de raies de FRAUNHOFER doivent se produire au dessous du niveau général de la photosphère. M. YOUNG en parle dans les termes que voici: „Toutes les raies ne sont pas dues uniquement ou même principalement à la couche de gaz situé au dessus du niveau supérieur de la photosphère. S'il en était ainsi les raies sombres devraient être beaucoup plus fortes dans le spectre qui vient du bord du disque que dans celui de la lumière du centre et cela n'a pas lieu; du moins la différence est très petite *j*). La photosphère étant composée de masses nuageuses séparées flottant dans une atmosphère qui contient les vapeurs dont la condensation forme ces nuages, la principale absorption a donc probablement lieu dans les interstices entre les nuages et au dessous du niveau général de leur limite supérieure". Telle était aussi l'idée de FAYE k).

Ces interstices entre les nuages, dont parle M. YOUNG, ne seront pas nécessairement étroits. Ils pourront être grands comme des royaumes terrestres. On les verra alors comme ces pores, dont est parsemée toute la surface du soleil *l*). Et si en étendue ils ressemblent à la Hollande, alors probablement on ne les verra plus du tout. Or il est évident que dans les interstices entre les nuages photosphériques la rotation du gaz absorbant sera toujours influencée, comme celle des taches, par la rotation particulière de ces nuages et ce gaz absorbant produira donc nécessairement des raies accusant des vitesses angulaires diminuant avec la latitude. Il n'y a que les raies toujours produites au dessus du niveau le plus élevé de la photosphère, qui puissent nous faire connaître le mouvement réel de l'atmosphère du soleil.

Il doit y avoir par conséquent dans le spectre solaire, outre les raies telluriques, que la rotation du soleil laisse immobiles, deux

j) J'ajoute que s'il en était ainsi, les raies des facules devraient être aussi moins fortes et moins nombreuses que celles de la photosphère moins relevée, ce qui cependant ne s'observe jamais (CLERKE: Probl. p. 98). M. E. VON OPPOLZER maintient aussi que la plus grande partie des raies d'absorption se forment au dessous de la surface photosphérique. Il se réfère non seulement à ses calculs, mais aussi à une observation de HASTINGS, qui vit une raie, qui était fort distincte dans le spectre du centre du disque, disparaître près du bord. (EGON VON OPPOLZER: Sitz. Ber. d. K. Ak. in Wien, April 1893; Ueber die Ursache der Sonnenflecken, p. 17 — HASTINGS: Nature VIII p. 77).

k) YOUNG: the Sun p. 83. FAYE: Ann. 1874 p. 419. — JANSSEN: Ann. 1869 p. 594. — SCHEINER: Die Spectralanalyse der Gestirne p. 194. — C'est ainsi aussi, que le vanadium, qu'on voit dans le spectre solaire et qui abonde dans les taches, ne donne hors de la photosphère aucune preuve certaine de sa présence. (NORM. LOCKYER: Spectroscopic comparison of metals present in certain Terr. and Celest. Light Sources 1907 p. 21).

l) SECCHI: le Soleil I p. 58. — LOCKYER: Chem. of the Sun p. 408 — YOUNG: the Sun p. 105 fig. 29 Granules and Pores of the Sun's surface (After HUGGINS).

catégories de raies solaires, que cette rotation déplace différemment. A la première catégorie appartiendront les raies que l'absorption produit au dessous du niveau le plus élevé de la photosphère. Elles montreront, si mon explication est juste, un déplacement plus ou moins pareil à celui qu'a observé M. DUNER. A la seconde catégorie appartiendront les raies, que l'absorption produit au dessus de la photosphère, à une hauteur que cette nappe n'atteint jamais. Elles montreront le déplacement qu'a observé M. CREW. En concordance avec cette explication nous trouvons en effet que des dix raies que M. CREW a mesurées, sept au moins se trouvent dans le Catalogue des 273 raies que sur le M^t. Sherman M. YOUNG a vues renversées. Ce sont les raies 1474, 5166, 5172, D^1 , D^2 , E^1 et E^2 . Parmi les raies de M. CREW il y en a, qui tout comme celles de M. DUNER appartiennent au fer. Mais cette parenté de raies se déplaçant différemment ne saurait nous surprendre; car, ainsi que M. LOCKYER l'a fait voir le premier, les raies, qu'un même élément terrestre et notamment le fer produit, dépendent du niveau où dans le soleil cet élément se trouve *m*). Les taches, la photosphère et les protu-

m) LOCKYER: Chem. of the Sun p. 326—353. Les recherches actuelles de M.M. HALE et ADAMS sur le spectre des taches font bien voir aussi combien le spectre d'un même élément dépend du niveau et comment le titane par exemple produit des bandes dans la profondeur des taches et n'en produit pas dans les couches renversantes plus élevées. (Astroph. Journ. March 1907 p. 84). M. LOCKYER vient d'arriver à la conclusion que voici: „With regard to the relation of the titanium spectrum to that of the chromosphere, then, the result may be expressed thus: — the enhanced lines are, in the main, conspicuous in the chromospheric spectrum, the unenhanced lines (c'est à dire les raies de l'arc, qu'on voit surtout dans le spectre de FRAUNHOFER) are chiefly inconspicuous or absent". (Solar Physics Committee 1907, Spectrosc. Comp. of Metals... with special Reference to Vanadium and Titanium p. 19). — A propos des trois spectres différents du titane, dont j'ai parlé en cette note, je ferai remarquer ici en passant que si les idées courantes, d'après lesquelles la différence entre ces trois spectres ne saurait résulter que de la température seulement, étaient justes, le soleil accuserait un refroidissement d'autant plus grand qu' à partir de la chromosphère on descendrait au travers de la photosphère jusqu' au fond des taches. Or comme une telle diminution de la température avec la profondeur, incompatible d'ailleurs avec l'explication du spectre solaire par KIRCHHOFF (voir la note *p* de mon 5^{me} paragraphe), me semble invraisemblable, il m'est impossible de l'admettre. Outre la température il y aura donc encore une ou plusieurs autres causes produisant des changements spectraux pareils. Ici encore M. CREW me vient en aide; car parmi ces causes prévues il en a déjà sûrement constaté une, d'une nature électrique. (HALE and ADAMS: loc. cit. p. 88. CREW: Science, January 4 1907) Dans la note *t* de mon 4^{me} par. j'ai déjà rappelé d'ailleurs, comment LIVEING et DEWAR ont déjà entrevu en 1888 et comment M.M. HARTMANN et EDERHARD ont démontré en 1903 que les raies produites dans l'étincelle ne répondent nullement à une température excessive. J. HARTMANN: Astroph. Journ. XVII p. 277 „All of my observations indicate that the spark lines do not correspond to a thermal radiation but rather to electroluminescence". M.M. STARK et CREW distinguent aussi, outre la température ordinaire due aux molécules, une température électrique due aux ions. STARK: Ann. d. Phys. 1904 p. 519. CREW: Astr. J. XX p. 274.

bérances nous montrent des spectres ferriques entièrement différents.

Le phénomène, que ma théorie postule, de raies simultanées différemment déplacées par la rotation du soleil paraît déjà avoir été observé par M. ADAMS au moyen du „Snow telescope” à l'Observatoire du M^t. Wilson *n*).

Ce qui est aussi très intéressant, c'est que les mêmes raies peuvent faire voir des déplacements différents, si on les observe à de longs intervalles. C'est ce qui résulte clairement des recherches récentes de M. J. HALM *o*). Ces recherches ont continué celles de M. DUNER et ont été même faites sur le déplacement des deux mêmes raies. Si M. HALM en avait choisi d'autres et des raies par exemple, qui d'après ses propres recherches et celles de M. FOWLER naissent sûrement, comme notamment la raie 6516.3, dans un niveau plus élevé *p*) ses résultats auraient eu selon moi une valeur plus grande encore et auraient pu trancher la question, qui de ses deux devansiers a eu raison: M. CREW ou M. DUNER.

Il n'en est pas moins vrai qu'en continuant à mesurer les deux mêmes raies, les recherches nouvelles de l'astronome d'Edinbourg sont devenues mieux comparables avec les observations anciennes de l'astronome d'Upsala *q*). Or il résulte de cette comparaison que, quoique M. HALM ait toujours eu à constater aussi que les deux raies accusaient dans le gaz absorbant des vitesses angulaires diminuant avec la latitude, ces vitesses cependant étaient tout autres et changeaient avec la latitude tout autrement que ne l'avait observé M. DUNER. Les vitesses constatées par M. HALM étaient plus petites dans le voisinage de l'équateur, mais surtout beaucoup plus grandes aux latitudes plus hautes que 33°. C'est ce que M. HALM a fait voir par des courbes *r*) et ce qu'on pourra observer aussi dans le Tableau suivant.

n) Report of the director 1907 p. 73. Spectrographic investigation of the solar rotation. „The measures so far made also suggest some interesting differences in the values given by the lines of different elements, but the work is as yet not sufficiently advanced to speak with certainty on this point”. Dans l'Atlas photographique de M. HIGGS on voit aussi aux bords Est et Ouest des raies différemment déplacées (GEORGE HIGGS: A photographic Atlas of the Normal solar spectrum. Descriptive Supplement p. 8).

o) J. HALM: Astron. Nachr. N°. 4146 et 4147 5 Janv. 1907.

p) M. HALM (loc. cit. p. 281 et 282) fait ressortir expressément que les deux raies qu' à l'exemple de M. DUNER il a mesurées naissent à un niveau peu élevé. Voici ce qu'il dit: „Zu bemerken ist dass... die beiden Eisenlinien meiner ausführlichen Untersuchung in Sonnenflecken stark verbreitert erscheinen und daher wahrscheinlich einem niedrigen Niveau der Sonnenatmosphäre angehören”.

q) Pour servir à cette comparaison les recherches que M. DUNER a continuées de 1899 à 1901 se prêtent surtout très bien (DUNER: Astr. Nachr. 3994, HALM: Astr. Nachr. 4147 p. 294, 295).

r) HALM: loc. cit. p. 290.

Tableau III.
Angle de Rotation diurne

Latitude	de la vapeur absorbante 6301.72 — 6302.72		des taches d'après M. et M ^{me} MAUNDER Col. IV du Tabl. I.
	d'après M. DUNER.	d'après M. HALM.	
0°	15.13	14.54	14.60
15	14.65	14.41	14.41
30	14.05	13.83	13.83
45	12.98	13.27	
60	11.61	12.59	
75	10.75	12.50	

Dans ce Tableau les vitesses de M. HALM font encore mieux ressortir que les vitesses anciennes de M. DUNER, qu'en général la vapeur absorbante ferrique tourne sur l'axe avec la même vitesse que les taches. Or voilà justement ce qui doit arriver si mon explication du mécanisme de la périodicité est juste. Car, comme c'est toujours une même vapeur venant d'être poussée en haut qui remplit et les interstices photosphériques et les taches, cette même vapeur doit y avoir aussi une même vitesse. Cette même vitesse, déjà étudiée plus haut dans les taches, étant d'ailleurs toujours plus grande que celle des nuages, ne sera donc jamais durable et c'est ainsi que la vapeur qui dans les interstices photosphériques produit des raies de Fraunhofer, présentera tous ces mêmes changements de vitesse qui caractérisent aussi les taches. Il n'est donc nullement surprenant qu'en mesurant à des moments différents les mêmes raies M. M. DUNER et HALM aient trouvé des vitesses différentes. Je ferai remarquer aussi que, si ma théorie est vraie, la vapeur absorbante ferrique marchera plus vite durant le maximum des taches que durant le minimum. Car durant le maximum cette vapeur est plus abondante et les nuages ralentissants sont plus rares, tandis que durant le minimum la vapeur est plus rare et les nuages sont plus abondants. Or ce ralentissement de la vapeur ferrique durant la période du minimum a été découvert en effet par M. HALM, qui y voit un résultat encore inexpliqué, mais fort remarquable de ses recherches s).

s) HALM: loc. cit. p. 296. „Dieses Resultat ist dahin zu interpretieren, dass die Beobachtungen zur Zeit des Fleckenminimums (1901) für hohe Breiten bedeutend kleinere

En terminant ici mon étude de la Rotation du Soleil j'en conclus qu'il n'est nullement certain qu'une rotation angulaire inégale aux différentes latitudes, telle que nous montre la photosphère, existe aussi au dehors dans l'atmosphère du soleil. La rotation angulaire inégale de la vapeur ferrique, que M.M. DUNER et HALM ont constatée ne saurait nous donner sur la rotation de l'atmosphère solaire la moindre information. Car cette vapeur n'a jamais été vue dans cette atmosphère. Elle reste toujours plus bas dans les interstices entre les nuages photosphériques, qui lui donneront par conséquent le même mouvement inégal qu'ils donnent aussi aux taches *t*).

Comme il n'y a par conséquent aucune observation qui nous force à admettre que la rotation particulière de la photosphère existe aussi au dehors dans l'atmosphère du soleil; comme il y a au contraire les recherches de M. CREW qui semblent prouver que cette atmosphère tourne conformément au cours ordinaire de la nature et nous montre par conséquent à chaque latitude un angle

Rotationswinkel ergeben als zur Zeit energischer Fleckentätigkeit (1905). Ein sicheres Urtheil über die Bedeutung dieses merkwürdigen Resultats ist zur Zeit wohl kaum möglich". Déjà en 1874 SPOERER a exprimé l'idée que l'angle de rotation des taches changeait durant leur période undecennale. „Die Bedeutung der bezeichneten Aenderung würde sein, dass in einer bestimmten Breite die aus dem Innern des Sonnenkörpers aufsteigenden Strömungen nicht während der ganzen Periode mit gleicher Stärke wirken". (Sonnenfleckenbeob. in den J. 1880 bis 1884 Publ. Potsdam IV 4 p. 426). Ici SPOERER a parfaitement rendu mon idée.

Dans le cours de ses intéressantes recherches M. HALM a découvert aussi (loc. cit. p. 273 etc.) que durant les années de 1901 à 1906 les raies, qu'il a mesurées, ont montré un déplacement de 0,02 de l'unité d'ANGSTRÖM vers le rouge. Il attribue ce déplacement à un changement de pression, peut-être dû selon lui à un changement de niveau de la nappe photosphérique. Bien que M.M. SCHUR et AMBRON (voir ma Note *b* à la page 58) n'aient pu constater ce changement de niveau il n'en pourrait pas moins exister, dit M. HALM, s'il n'excédait pas 70 à 80 Kilomètres et il suffirait alors à expliquer selon M. HALM le déplacement qu'il a découvert. Voilà donc M. HALM bien préparé à admettre avec M. POOR et moi l'idée de la photosphère vibrante. Tant que durant la période du maximum la photosphère monte, comme je l'ai expliqué, elle produira d'ailleurs, en vertu de l'augmentation de sa vapeur et de la compression que son ascension doit causer dans les couches qu'elle relève, une augmentation de pression dans les couches renversantes. Une autre particularité très intéressante que les recherches de M. HALM ont fait connaître a déjà été mentionnée dans la note *w* à la page 11 de mon Introduction.

t) Si cette vapeur ferrique nous renseignait sur l'atmosphère solaire, son accélération durant le maximum serait bien étonnante. Un soleil, dont l'atmosphère tournerait aujourd'hui autrement que l'an passé et du temps des recherches de M. DUNER tout à fait autrement que du temps des recherches de M. HALM, ne me paraît guère vraisemblable. Dans le niveau photosphérique au contraire ces changements de vitesse n'ont rien de surprenant. Ils m'y semblent même inévitables et en tout cas l'observation des taches nous y a accoutumés.

de rotation diurne sensiblement égal et comme en somme l'hypothèse la plus naturelle qu'on puisse faire quant à la rotation du soleil me semble l'hypothèse d'un soleil gazeux aplati tournant sur l'axe tout d'une pièce et ne nous montrant des angles de rotation anormaux qu' uniquement dans le lieu géométrique sphérique où quelque matière qui a été condensée ailleurs, a dû nécessairement former ainsi une photosphère à zones différemment tournantes, c'est cette hypothèse la plus naturelle que ma théorie adopte. C'est elle aussi qui va nous guider maintenant dans notre étude de la répartition des taches. Cette répartition est représentée dans le Tableau suivant.

Tableau IV.

Répartition des taches sur la surface du soleil.

Latitude.	CARRINGTON	SPOERER	SPOERER	MAUNDER
	1853—61.	1861—67.	1855—79.	1879—1901.
0°	5	40	471	41
5	116	227	1940	247
10	360	404	2522	535
15	325	242	2158	518
20	351	88	1303	355
25	191	35	740	135
30	126	11	203	35
35	37	5	84	5
40	0	1		
45	2			

Si mon idée d'un soleil gazeux tournant sur l'axe tout d'une pièce avec sa photosphère tournant tout autrement et n'égalant le gaz solaire en vitesse angulaire qu' au milieu des zones royales est juste, la répartition des taches y pourra trouver son explication. C'est ce qui me reste à faire voir en ce paragraphe.

Remarquons d'abord, que là où les vitesses de la photosphère et de

l'atmosphère sont plus ou moins égales, comme dans les zones royales, cette égalité ne saurait nuire à l'apparition des taches, mais que là où ces vitesses sont au contraire excessivement inégales, comme hors de ces zones, cette inégalité pourra créer un obstacle empêchant les taches de se faire jour. C'est cet obstacle que nous allons étudier maintenant.

A cet effet je ferai observer que si les couches extérieures de la photosphère tournent tout autrement que l'atmosphère qui les recouvre, les moindres aspérités photosphériques qui tâcheront de s'élever dans cette atmosphère seront immédiatement enlevées. C'est ainsi aussi que tout chapeau mal affermi s'envole, lorsque d'un train en marche on met la tête dehors. Toutes ces aspérités enlevées formeront à l'extérieur de la photosphère une couche photosphérique se mouvant tout autrement que les couches plus profondes, qui par conséquent pourraient être remplies de taches sans que nous en vissions rien. Comme j'aurai souvent à revenir sur cette couche photosphérique extérieure je la nommerai pour simplifier le voile photosphérique. Ce voile n'empêchera pas seulement les trous anciens d'être vus comme des taches en les transformant en „taches voilées”; il pourra empêcher aussi que de nouvelles taches apparaissent. Car il est impossible qu'une tache naisse là où le voile photosphérique avance plus vite que la tache ne saurait l'ouvrir.

Mais outre le voile photosphérique il y a encore un autre voile résultant d'une autre différence en vitesse, qui lui aussi pourra nous cacher les taches. Car si les taches résultent de la rupture de bulles faculaires que la poussée d'en bas a relevées dans l'atmosphère du soleil, ces bulles, après avoir réussi à traverser le voile photosphérique, ne s'en trouveront que plus exposées encore à l'action destruisante et nivellante de l'atmosphère ne tournant pas comme elles. Et si maintenant elles crèvent lorsque la poussée d'en bas continue, il est fort bien possible que la tache, qu'elles essaient de former reste invisible sous un voile de nuages que l'atmosphère arrachera à la pénombre et au bourrelet faculaire relevés.

Ce dernier voile, que je nommerai le voile faculaire, ressemblera beaucoup au voile photosphérique. Il aura le même effet effaçant; mais comme il sera formé par les nuages faculaires qui, comme les taches tournent plus vite que les nuages photosphériques ordinaires, sa vitesse sera une autre. Il existera même là où l'autre fera défaut et inversement, comme nous le verrons tantôt dans les colonnes V et VI du Tableau V.

Il résulte de cet examen préliminaire de l'obstacle que les diffé-

rences en vitesse de la photosphère et de l'atmosphère du soleil doivent pouvoir faire à l'apparition des taches, que, si cet examen est juste, nous aurons à prévoir que l'on trouvera cette différence très grande là où hors des zones royales les taches font défaut, mais qu'on la trouvera aussi petite que possible là où dans les zones royales les taches abondent. Or voilà une prévision, qui répond en effet aux observations. Il suffit pour s'en convaincre de consulter le Tableau suivant.

Tableau V.

Explication de la Répartition des taches.

Latitude <i>b</i>		Angle de rotation diurne de l'atmosphère (CREW) <i>u</i>	Angle de rotation diurne des taches (CARRINGTON) <i>v</i>	Angle de rotation diurne des nuages photosphériques d'après l'hypothèse de l'auteur IV = III - 0,41	Vitesse max. du voile photosphérique en degrés IV—II	Vitesse max. du voile faculaire en degrés III—II	Degr. de longit. hélioc. d'un trou de 1' géoc. $\frac{23000}{108,5 \times 60 \cos b}$	Jours requis pour voiler un trou d'une minute géocentrique		Vitesse max. du voile photosph. en 725000	Nombres de Groupes de taches d'après M. et M ^{me} MAUNDER.
								par le voile photosp. VII V	par le voile facul. VII VI	Mètres par sec. $\frac{60 \times 24 \times VIII}{725000}$	
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII
0°	13°.72	14°.42	14°.01	+0°.29	+0°.70	3°. 5	12	5	+ 42	+ 100	41
12½	13.82	14.23	13.82	0.	+0.41	3.61	∞	9	0	+ 56	585
15	13.85	14.18	13.77	-0.08	+0.33	3.63	45	11	- 11	+ 46	518
22½	13.91	13.92	13.51	-0.40	0	3.99	9.9	∞	- 50	0	225
25	13.93	13.81	13.40	-0.53	-0.12	4.01	7.5	33.4	- 67	- 16	135
30	13.98	13.60	13.19	-0.79	-0.38	4.04	5.1	10.6	- 99	- 48	35
45	14.12	12.92	12.51	-1.61	-1.20	4.95	3	4.1	- 168	- 123	0
60	14.25	(11.45)	11.04	-3.21	-2.80	7.03	2.2	2.5	- 229	- 202	0

u) L'angle de rotation diurne montre ici la très légère accélération vers les pôles que M. CREW (voir la note *d* précédente) croit avoir constatée et que j'ai tâché d'expliquer dans ma Théorie du Soleil de 1892 p. 45. Si cet angle était à toutes les latitudes absolument le même, cela ne changerait que bien peu aux résultats du Tableau. Ce Tableau, quoique composé au moyen des meilleures données, que j'ai pu trouver, n'a d'ailleurs aucune prétention à ne contenir que des valeurs numériques exactes. Son unique but est de faire voir, comment ces différences en vitesse, qu'il fait ressortir, et qui probablement devront être remplacées plus tard par des différences plus exactes, semblent donner déjà maintenant une explication provisoire mais plausible de la répartition des taches.

v) L'angle à 60° a été calculé au moyen de la formule $8°,548 + 5°,798. \cos 60°$ de SPOERER. Publ. Potsdam N°. 32 (1894) p. 145.

On voit clairement dans ce Tableau, que tant à l'équateur, où la photosphère tourne plus vite que l'atmosphère, que surtout aussi au delà de 45° de latitude, où la photosphère tourne au contraire beaucoup plus lentement que cette atmosphère, il y a de grandes différences en vitesse entre les taches et l'atmosphère du soleil et que si ces différences en vitesse à partir d'un peu plus de 100 Mètres par seconde peuvent empêcher tout à fait l'apparition des taches, un tel empêchement n'existe pas dans les zones royales, qui seront donc les seules zones qui puissent nous faire voir des taches.

Dans ces zones royales il y a une zone privilégiée où les taches se montrent en plus grand nombre. Elle ne se trouve pas à la latitude de $22\frac{1}{2}^\circ$, où d'après mon Tableau les taches tournent précisément comme l'atmosphère du soleil *w*) mais à une latitude plus petite entre les parallèles de 10° et de 15° . Cette latitude plus petite de la zone privilégiée n'est d'ailleurs nullement imprévue. Car l'obstacle à l'apparition des taches ne résulte pas en premier lieu de la vitesse différente de l'atmosphère par rapport aux taches mais plutôt de cette vitesse différente par rapport aux nuages photosphériques, qui tournent plus lentement. Il est donc clair qu'à la latitude où ces nuages plus lents égaleront l'atmosphère en vitesse et où par conséquent les taches naîtront le plus abondamment, les taches auront encore par rapport à l'atmosphère une vitesse notable, et se trouveront par conséquent entre la parallèle de $22\frac{1}{2}^\circ$ et l'équateur.

Pour pouvoir expliquer aussi pourquoi ce n'est pas seulement entre la parallèle de $22\frac{1}{2}^\circ$ et l'équateur mais précisément vers la latitude de $12\frac{1}{2}^\circ$ que les nuages photosphériques et l'atmosphère tournent avec la même vitesse, la grandeur de l'accélération des taches par rapport aux nuages devrait être connue. Mais comme cette grandeur n'est pas connue, il me faut une hypothèse pour

w) Qu'on ne confonde pas la latitude de 10° à 15° où les taches se montrent en plus grand nombre, avec la latitude moyenne des taches lorsqu'elles sont au maximum. Cette latitude est une tout autre et généralement plus grande. Elle changera d'ailleurs dans le cours des siècles (voir plus haut p. 57). D'après M. YOUNG (the Sun p. 214) la zone privilégiée aurait une latitude de 20° environ. Dans la fig. 53, où il représente la fréquence des taches d'après CARRINGTON, on voit, tout comme dans la 2^{me} colonne de mon Tableau IV, que CARRINGTON a observé deux zones privilégiées, l'une à 10° et l'autre à 20° . Si ceux, qui après CARRINGTON ont continué ses recherches, avaient aussi trouvé ces deux zones, cela aurait prouvé, comme nous le verrons tantôt, que les voiles photosphériques et faculaires auraient un même pouvoir effaçant. La zone à 20° aurait pu être expliquée alors par l'absence du voile faculaire et la zone à 10° par l'absence du voile photosphérique (Voir les colonnes V et VI du Tableau V). Mais, comme SPOERER et M. et M^{me} MAUNDER n'ont pas retrouvé la zone à 20° il paraît donc qu'en comparaison de l'effet du voile photosphérique l'effet du voile faculaire est généralement beaucoup moins important.

compléter mon explication. Cette hypothèse la voici : A la latitude de $12\frac{1}{2}^{\circ}$, et probablement aussi aux autres latitudes, l'angle de rotation diurne, que CARRINGTON a trouvé pour les taches, est de 0.41° plus grand que celui des nuages photosphériques. Si moyennant cette hypothèse on calcule alors la vitesse de ces nuages, on leur trouve les angles de rotation diurne de la colonne IV, qui font voir maintenant que c'est à la latitude de $12\frac{1}{2}^{\circ}$ que les taches naîtront le plus abondamment parce qu'il n'y a que là que la vitesse des nuages et de l'atmosphère est la même *x*).

Bien que cet accord parfait à la latitude de $12\frac{1}{2}^{\circ}$ entre les vitesses de mon Tableau et l'apparition du plus grand nombre de taches n'ait par conséquent rien d'intéressant, puisqu'il a été inventé pour le besoin de la cause, il n'en est que plus remarquable, qu'à toutes les autres latitudes, où je n'ai rien inventé, et où ma correction de 0.41° n'est plus qu'insignifiante, l'accord entre les vitesses du Tableau et l'apparition des taches est tout aussi satisfaisant. Car les différences en vitesse que mon Tableau présente paraissent avoir l'ordre de grandeur, qu'il leur faut pour donner à chaque latitude aux voiles photosphériques et faculaires dont la photosphère est entièrement recouverte justement ces vitesses, que mon explication de la répartition des taches demande.

Pour se faire une idée de ces vitesses on pourra consulter les colonnes VIII et IX du Tableau, qui nous font voir le nombre de jours qu'à chaque latitude les voiles photosphérique et faculaire demandent pour voiler complètement un trou, qui mesurant une minute géocentrique, est assez grand pour former une tache visible à l'oeil nu. Or en comparant ce nombre de jours avec les 5 à 6 jours qu'il faut généralement à une tache aussi grande pour s'ouvrir *y*) on voit facilement pourquoi la répartition des taches est pré-

x) Ma correction de 0.41° ne fait voir, que de combien l'angle de rotation diurne des taches à la latitude de $12\frac{1}{2}^{\circ}$ est d'après CARRINGTON plus grand que l'angle de rotation diurne de l'atmosphère solaire à cette même latitude d'après M. CREW. Il n'est guère probable par conséquent que cette correction ait quelque valeur réelle et représente exactement l'accélération des taches par rapport aux zones photosphériques qui les transportent. Car ni la vitesse angulaire des taches, qu'on voit si différemment évaluée dans mon Tableau I, ni la vitesse angulaire de l'atmosphère solaire, qui n'a été étudiée jusqu'à présent que par M. CREW seulement, ne sont déjà suffisamment connues pour pouvoir nous conduire avec quelque certitude à un résultat aussi important. Si quelque recherche future ne viendrait pas confirmer les résultats encore trop douteux de M. CREW, il y aura plus tard dans la colonne II d'autres vitesses, accusant d'autres différences dans les colonnes V et VI et nécessitant aussi, au lieu de 0.41° , une autre correction, qui sera peut-être plus petite, pour arriver à la latitude de $12\frac{1}{2}^{\circ}$ à la vitesse des nuages photosphériques. Il est à espérer toutefois qu'on réussisse un jour à mesurer l'accélération des taches par rapport aux nuages d'une manière plus directe.

y) SECCHI: le Soleil I p. 60. Voici ce qu'un observateur aussi assidu du Soleil que

cisément celle qu'on observe et pourquoi par exemple il est impossible que des taches apparaissent hors des zones royales.

Commençons cet examen à la latitude de 60° : Si là 2,2 jours suffisent au voile photosphérique pour recouvrir entièrement un trou demandant 5 à 6 jours pour s'ouvrir, chaque trou y sera impossible; car il y sera voilé ou refermé tout de suite, avant qu'il n'ait eu le temps de s'ouvrir.

Bien qu'à la latitude de 45° les voiles glissent déjà beaucoup plus lentement, de sorte que le même trou qui à 60° de latitude était déjà complètement voilé en 2 jours, ne l'est plus ici qu'en 3, on voit cependant qu'ici encore les voiles glissent plus vite que ne s'ouvrent généralement les taches et que par conséquent il est à peu près impossible qu'à cette latitude de 45° des taches apparaissent. Si dans le cours des années on en a vu néanmoins quelques unes elles avaient une étendue très petite et une courte durée ^{z)}.

Ce n'est que dans les zones royales que d'après les colonnes VIII et IX de notre Tableau les voiles photosphériques et faculaires marchent moins vite que ne s'ouvrent généralement les taches et que par conséquent des taches apparaissent. Au milieu de ces zones nous voyons marcher ces voiles avec une lenteur si grande qu'il n'y a pas de taches, même parmi les plus lentes à s'ouvrir, qu'elles puissent empêcher de naître. Les taches s'y montreront donc beaucoup plus nombreuses que vers les limites de ces zones, où notre Tableau nous signale des voiles déjà plus ou moins destructeurs. C'est ainsi par exemple qu'à l'équateur nous voyons un voile faculaire et à la latitude de 30° un voile photosphérique de même vitesse, qui d'après les considérations (des 5 jours), qui nous ont guidés jusqu'ici, effaceront la plupart des taches et n'épargneront que celles, qui dues aux poussées d'en bas les plus fortes s'ouvriront le plus vite.

Parmi les taches qu'au milieu des zones royales les voiles photosphérique et faculaire ne sauraient effacer, il y aura aussi au minimum ces taches les plus petites, qui pouvant résulter toujours de l'évaporation continuelle des nuages dans la profondeur, ne cesseront jamais de tâcher d'apparaître même lorsque durant le minimum la photosphère descend. Aux autres latitudes, où les voiles ont un plus grand pouvoir effaçant, ces taches du minimum ne sauraient se montrer et l'apparition des taches y présentera par

PERRY nous apprend quant au temps, qu'il faut à une tache pour se développer: „a spot will often obtain its full size in five or six days, although exceptionally large ones occupy a longer time in their first development". LOCKYER: *Chem. of the Sun* p. 406.

^{z)} Nature, March 20, 1890.

conséquent une périodicité plus marquée. Cette périodicité plus marquée par des intervalles sans la moindre tache a été observée en effet, comme on le verra dans le Tableau suivant, que j'ai tiré des observations de SPOERER *a*).

Tableau VI.

Durée moyenne de l'absence assidue de taches.

Zones.	Fraction de la durée de la période undécennale entière.
0° — 5°	0,0
5 — 10	0,0
10 — 15	0,0
15 — 20	0,1
20 — 25	0,2
25 — 30	0,3
30 — 35	0,4
35 — 40	0,5

Dès qu'une tache aura réussi à perforer ses voiles et à s'élever dans l'atmosphère elle pourra avoir là haut une longue durée. Car bien que les différences de vitesse de la colonne VI doivent lui enlever maintenant sa vapeur avec les nuages que le refroidissement extérieur y aura déjà condensés, cette vapeur lui sera rendue sans cesse d'en bas tant que la poussée, qui produit les taches continue. Or comme les nuages, dont chaque tache doit toujours incessamment se couvrir, doivent former comme un troisième voile effaçant, il est clair que pour faire durer les taches, des différences de vitesse qui pourront enlever ce troisième voile seront plutôt utiles que nuisibles. Si par conséquent les colonnes IV, V et VI de mon Tableau I nous montrent, qu'aux latitudes de $2\frac{1}{2}^{\circ}$ et de 30° , où il y a de grandes différences de vitesse, les taches sont généralement plus durables, qu'aux latitudes intermédiaires, où

a) SPOERER: Publ. de Astroph. Obs. zu Potsdam IV, 4, p. 411—415. Sonnenfleckenbeobachtungen in den Jahren 1880—1884. Voir aussi ma note *x* page 56. Comme moi

ces différences sont plus petites, cette particularité se conçoit *b*). Il est vrai qu'au delà de ces latitudes la durée des taches diminue de nouveau. Mais là les différences en vitesse sont si excessivement grandes que probablement elles n'y pourront débarrasser les taches de leur troisième voile sans les abîmer fortement en même temps.

L'apparition des taches dans les zones royales et leur absence hors de ces zones jusqu'à la latitude de 60° étant maintenant étudiée, il nous reste à étudier aussi l'absence des taches dans les calottes polaires. Cette absence ne saurait être due entièrement à la même cause qui empêche la formation des taches aux latitudes moyennes. Car à partir de 82° jusqu'aux pôles les voiles explicateurs de ma théorie glissent trop lentement. C'est ce qu'on verra dans le tableau suivant, où moyennant l'hypothèse que les zones photosphériques immaculées présentent le même ralentissement avec la latitude, que CARRINGTON et SPOERER ont découvert dans les zones à tâches, j'ai complété les colonnes VIII et X de mon Tableau V.

je le suppose maintenant, SPOERER a déjà admis dès 1860, sans toutefois l'expliquer clairement (FAYE: C. R. 60 p. 818), qu'au milieu des zones royales il y a une parallèle où les taches se meuvent comme le corps principal du soleil et que des deux côtés de cette parallèle y soufflent par conséquent des tempêtes de l'Est et de l'Ouest opposées. A ces tempêtes, que ses contemporains n'ont jamais prises au sérieux, SPOERER attachait une grande importance. FAYE: Ann. 1873 p. 500. CLERKE: Geschichte p. 198. SPOERER: Astr. Nachr. 1347, 1402, 1418, 1471 etc. Voir surtout le N. 1347 où SPOERER est déjà près de prévoir mon explication de la répartition des taches.

b) Cette particularité a été constatée aussi par le P. J. SCHREIBER à Kalocsa, comme le P. FENYI me l'a écrit en 1895 dans les termes que voici: „... P. SCHREIBER unternahm eine ausgedehnte Untersuchung, zu welcher er auch die englischen Beobachtungen benützte. Er fand nach sehr langwieriger Arbeit, dass die Flecken in ihrer Zone am längsten zu dauern pflegen gegen den Pol zu und ebenso gegen den Equator zu, aber abnehmend, von kürzerer Dauer sind“. Le P. SCHREIBER a constaté aussi, comme il me l'a écrit lui-même 1° que la proportion $\frac{\text{durée de la croissance}}{\text{durée de la décroissance}}$ des taches

est généralement égale à $\frac{7}{10}$ et 2° que dans les groupes les taches marchant au devant ont généralement une latitude plus petite que celles marchant à la suite, (ce qui semble résulter, ceteris paribus, de la vitesse angulaire plus grande à la latitude plus petite.)

Tableau VII.

Vitesse du Voile photosphérique sur toute la surface du soleil.

Latitude.	Nombre de jours requis pour voiler un trou mesurant une minute géoc.	Vitesse en Mètres par seconde.
0°	12	42
12 $\frac{1}{2}$	∞	0
15	45	11
25	7.5	67
30	5.1	99
45	3	168
60	2.2	229
65	2.2	229
70	2.5	202
75	2.8	179
80	3.8	132
85	6.9	30
89	32.3	15
89 $\frac{1}{2}$	64	8
90	∞	0

Ce Tableau nous fait voir que si la répartition des taches ne dépendait que des différences de vitesse, expliquées dans le Tableau V, on verrait des taches aussi dans les calottes polaires. SECCHI et déjà CHR. SCHEINER ont bien vu que ces calottes polaires étaient de temps en temps particulièrement obscures et bordées de granulations traçant comme des zones polaires *c*); mais de véritables taches polaires n'ont jamais été observées. Il n'en est que plus remarquable que tous les phénomènes caractéristiques accompagnant toujours les taches dans les zones royales s'observent toujours aussi dans les calottes polaires beaucoup plus distinctement que dans toutes les autres zones sans taches. J'en prends premièrement à témoin les

c) Voir la première Note *m* de ce paragr. page 60.

facules, dont la distribution sur la surface du soleil est précisément celle, que mes Tableaux V et VII font attendre. Cette distribution telle que MASCARI l'a observée de 1894 à 1901 à Catane *d*) la voici :

Tableau VIII.

Répartition des facules sur la surface du soleil.

Latitude.	Fréquence des facules.
0°—10°	8851
10 —20	11020
20 —30	7267
30 —40	4913
40 —50	3428
50 —60	3191
60 —70	4317
70 —80	7262
80 —90	7011

Les facules présentent donc 1^c entre les latitudes de 30 et de 70°, là où les voiles photosphériques et faculaires ont leur plus grande vitesse et leur plus grand pouvoir nivelant, un minimum très prononcé et 2° là où ces voiles se meuvent plus lentement et nivellent très mal comme dans les zones royales (0—30°) et les zones polaires (70—90°) deux maxima non moins évidents. Les facules, qui s'élèvent dans les zones polaires répondent donc tout aussi bien que celles qui s'élèvent dans les zones royales aux prévisions de ma théorie. Mais comme il n'y a que ces dernières qui forment des taches, c'est donc comme si la poussée d'en bas, qui en bosselant tout partout la photosphère, doit surtout dans les zones royales et les zones polaires la couvrir de facules, n'aurait la force requise pour percer ces facules visiblement que dans les zones royales et

d) MASCARI: Bull. de la Soc. belge d'Astr. Février 1903 p. 41. La répartition des facules ressemble beaucoup à celle des protubérances, comme on le verra en comparant mes Tableaux VIII et IX. Quoique la grande fréquence de ces deux classes de phénomènes dans les calottes polaires ne soit nullement douteuse, il est impossible toutefois que cette fréquence soit réellement aussi grande, que mes tableaux la font ressortir. (Voir les notes *g* et *l* suivantes).

serait impuissante à les perforer visiblement dans les zones polaires. Cette impuissance de la poussée d'en bas dans les zones polaires ne serait d'ailleurs nullement inexplicable ; car, ainsi que je tâcherai de le démontrer dans mon 12^{me} paragraphe, la photosphère doit être aux pôles moins massive qu'à l'équateur. Lorsque par conséquent aux pôles la photosphère monte et descend tour à tour, les nuages qui chaque fois dans la profondeur s'y évaporent, seront toujours moins considérables, produiront moins de vapeur et causeront en somme une poussée moins forte que partout ailleurs. Les cratères *e*) et les trous, que cette poussée moins forte pourra produire seront donc exceptionnellement petits. Lorsqu'ils seront nombreux, ils pourront bien produire cet obscurcissement des zones polaires, dont nous avons déjà parlé plus haut et que CHR. SCHEINER et SECCHI ont observé, mais individuellement ce ne seront que des pores trop petits pour être vus comme des taches.

N'oublions pas non plus qu'aux pôles, déjà mal situés d'ailleurs pour nous faire voir des taches très petites, la formation des taches sera contrariée en outre par la pesanteur et le refroidissement, qui probablement y seront plus grands que dans les zones royales mieux protégées contre le refroidissement par le renflement équatorial de l'atmosphère du soleil *f*). Il est donc fort bien possible que si quelque cratère faculaire s'ouvre dans les calottes polaires, il n'en résulte aucune tache. Car si là la vapeur dénudée, qui alors devrait former une tache, se refroidit si vite qu'elle se recouvre aussitôt d'un voile de nuages condensés, elle ne forme rien, que nous puissions observer. De ce voile de nuages condensés sur place j'ai déjà parlé plus haut (page 78) lorsque je l'ai nommé „le troisième voile” et lorsque nous l'avons vu effacer des taches dans les zones royales. Mais nulle part il ne sera aussi puissant que dans les calottes polaires, où probablement un minimum de poussée et un maximum de refroidissement aideront à le mieux former et où en tout cas il aura en se formant l'avantage que les deux différences de vitesse des colonnes V et VI du Tableau V, qui séparément ou simultanément troublent tout partout ailleurs la tranquillité des taches ne sont qu'aux pôles impuissantes en même temps.

e) Voir la note *s* au commencement de ce paragraphe.

f) LOCKYER: Solar physics p. 49. „Sir JOHN HERSCHEL's beautiful theory, that the sun is actually colder at the poles by reason of the smaller thickness of the atmosphere in the polar regions allowing a greater radiation of heat is therefore next alluded to (by FAYE) and it is remarked that this brilliant conjecture has at once taken the sun-spot theory out of the domain of perspective and rendered it capable of dynamical treatment?”. Voir aussi YOUNG: the Sun p. 179 et 180 et ce que j'ai déjà rappelé ici plus haut du renflement équatorial de la masse solaire (pages 33 et 34).

Quoiqu'il soit donc très bien possible, qu'en vertu de la faible poussée d'en bas dans les calottes polaires, beaucoup de facules n'y crèvent pas du tout, tandis que d'autres, qui y crèvent bien, ne réussissent pas à y former des trous visibles, parce que ces trous en naissant s'y couvrent aussitôt d'un voile, qui doit nous les cacher tout de suite; on aurait tort cependant d'admettre que la photosphère polaire ne serait pas riche en trous véritables. Ces trous, dont la formation a déjà été expliquée dans mon avant dernier alinéa, sont trop petits pour être vus comme des taches, ils pourraient être même trop petits pour être vus comme des pores, mais il ne paraît guère possible de douter qu'ils existent. Car tous les phénomènes caractéristiques, qui accompagnent toujours les trous dans les zones royales, caractérisent très distinctement aussi les zones polaires,

De ces phénomènes caractéristiques dans les zones polaires nous n'en avons encore mentionné que deux: 1° la richesse exceptionnelle des zones polaires en facules et 2° leur obscurité quelquefois exceptionnelle aussi. Mais d'autres phénomènes du même genre sont aussi 3° l'augmentation, qu'on voit de temps en temps dans la fréquence et la hauteur moyenne des protubérances dans les zones polaires *g*);

g) Voir par ex. les colonnes II, III, IX, XI et XII de mon Tableau IX. Quoiqu'il y ait beaucoup de chance, qu'en vertu de la lenteur de la rotation près des pôles, les mêmes protubérances s'y observent plus d'une fois et tendent ainsi à nous y faire voir une fréquence exagérée (voir la note *l* suivante), il n'en est pas moins certain que ces protubérances polaires existent et que de temps en temps elles nous montrent des recrudescences, qui ne durent pas longtemps. Voici par exemple ce que SECCHI nous apprend (le Soleil II p. 145): „Les maxima secondaires des protubérances correspondent aux limites des granulations que l'on a vues autour des pôles aux époques de plus grande activité. Cette apparition n'est pas constante: elles disparurent en 1873 et avec elles les protubérances. C'est dans cette même région que la couronne est plus élevée, ainsi qu'on l'a constaté pendant les éclipses. Dans la IX^e et la XI^e rotation, nous voyons reparaître les protubérances polaires, mais elles durent très peu: c'est une de ces fluctuations à courte période, qui nous sont familières, mais dont la cause est encore un mystère". La courte durée de cette période répond d'ailleurs à la règle, que j'ai déjà expliquée plus haut (page 57) d'après laquelle, comme on le voit déjà dans les zones royales, la durée de la période diminue lorsque la latitude augmente. Si les protubérances polaires ne sont pas comptées parmi les protubérances éruptives, ce n'est pas que leur forme s'y oppose, mais c'est plutôt parce que l'atmosphère polaire étant relativement basse et exempte de métaux (voir plus haut page 34) les protubérances y sont toujours relativement peu élevées et ne montrent jamais trace de métaux. „Toutes les protubérances (dit SECCHI II p. 294) ne sont donc pas de véritables éruptions: la différence consiste essentiellement dans la présence ou dans l'absence des vapeurs métalliques" (ibid. p. 157): „Aux pôles les filets des panaches sont verticaux ou très légèrement inclinés; quelquefois ils ressemblent à une pluie, qui retombe verticalement" (ibid. p. 154): „les facules polaires étaient précisément très développées..... il y avait évidemment une relation entre ces couronnes polaires et les maxima secondaires des protubérances observées à cette même époque dans cette même région".

4° les pinceaux polaires de la couronne *h*); l'éclat inaccoutumé que montre souvent la chromosphère polaire *i*) et 6° la ressemblance des zones polaires avec les zones royales quant à la fréquence des déplacements spectraux, qu'on y observe *j*).

N'ayant pas à répéter ici comment tous ces phénomènes caractéristiques peuvent être expliqués comme résultant de trous véritables, produisant, soit des rayons β et γ , soit un refroidissement rendant l'atmosphère du soleil lumineuse au dessus de ces trous *k*), mon explication de la répartition des taches est maintenant terminée.

Si néanmoins ce paragraphe déjà long ne finit pas encore, c'est parce que les Tableaux, qu'il contient, et surtout aussi l'idée, que je viens d'émettre, de voir dans les protubérances polaires l'effet de trous photosphériques trop petits pour être vus comme des taches, m'ont semblé éminemment propres à expliquer ici en même temps la répartition des protubérances sur toute la surface du soleil. Cette répartition pourra être étudiée dans le Tableau suivant.

h) Si dans ces pinceaux nous voyons peut-être une luminescence due à des rayons β et γ , qui échappent des trous polaires, leur courbure pourrait résulter et de leur répulsion électrique réciproque et de leur attraction vers la masse à charge positive du soleil.

i) SECCHI: le Soleil II p. 144. — M. FENYI parle „de la clarté intense de la chromosphère” au dessus d'un champ de taches dans les Mem. de Soc. d. Spett. Italiani XX 1891. Protub. obs. sur le disque solaire le 24 Juillet.

j) FENYI: Publ. d. Haynald Obs. VI Heft 1892 p. 40. „Die kleine Verschiebungen kamen demnach am häufigsten auf der Fleckenzone vor. Ein zweites fast ebenso grosses Maximum lag über den Polarcalotten beiderseits bis 70°”

k) Voir dans mon Introduction les §§ 3 et 4.

Tableau IX.

Répartition des Protubérances sur la surface du soleil.

Les nombres indiquent la fréquence moyenne dans les deux hémisphères.

Latitude.	Observ. de SECCHI en 1871, un an après le maximum.		Observations du P. FENYI, entre le maximum de 1884 et le minimum de 1890. Les nombres sont les ordonnées des courbes, du P. FENYI.							Observ. de A. MASCARI.	Observ. de M. J. G. NEWBIGIN depuis le 11 Février jusqu'au 26 Juin 1906.	
	Nombre total des protubérances.	Protubérances d'une hauteur de l'au moins.	1884	1885	1886	1887	1888	1889	1890	1894	Total des protubérances.	Protubérances très lumineuses.
I	II	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX	X	XI	XII	XIII
0°	192	51	74	60	25	15	18	16	20	76	7	4
15	212	94	85	62	37	39	33	32	32	92	16	13
25	213	66	78	54	41	45	45	55	52	108	18	12
35	182	59	69	43	39	40	43	58	60	84	16	12
45	140	36	56	23	33	55	43	68	85	48	8	5
55	74	10	30	20	15	34	31	30	40	10	10	4
65	80	15	29	2	1	3	2	2	4	48	4,5	0,5
75	160	54	27	4	2	2	1	6	3	124	8	0
85	129	24	21	2	1	1	1	3	2	41	2,5	1,5

Ce Tableau nous fait voir, surtout si nous tenons compte du rétrécissement considérable des parallèles vers les pôles ¹⁾, que c'est toujours vers la latitude de 60 à 65° que les protubérances appa-

1) Les observations de SECCHI sont celles que M. YOUNG a représentées dans la fig. 53 de son *Traité du Soleil, the Sun*, p. 214. Les observations du P. FENYI se trouvent dans les *Public. de l'Obs. HAYNALD* VI p. 34 et VIII p. 109. Celles de MASCARI dans l'*Astroph. Journ.* du mois d'Août 1895 et celles de M. NEWBIGIN dans le *Journ. of the British Astron. Assoc.* XVII N°. 7 April 1907 p. 313. L'augmentation dans la fréquence des protubérances à partir de 60 à 65° vers les pôles est d'autant plus remarquable qu'à mesure que les protubérances y augmentent, les parallèles qui les produisent, deviennent de plus en plus petites et diminuent par exemple dans la proportion de 5, 3 et 1 aux latitudes resp. de 65°, 75° et 85°. Si les protubérances étaient uniformément réparties sur la surface du soleil elles montreraient donc 1° une diminution vers les pôles beaucoup plus grande que celle que même la colonne VIII avec sa diminution la plus forte nous fait observer et elles auraient 2° à 85° par rapport à la fréquence à 65° une fréquence respectivement 8 fois, 8 fois, 4 fois, 5 fois, 5 fois, 1,7 fois, 2,5 fois, 7 fois, 2,5 fois, 4 fois, 3 fois et 15 fois moindre que celle qu'on voit dans les colonnes du

raissent le moins. C'est aussi ce que M. EVERSLED vient de constater de nouveau (M. N. May 1907).

Or voilà une particularité que ma théorie de la formation des protubérances et de la rotation solaire prévoit, comme je tâcherai de l'expliquer maintenant :

Remarquons d'abord, que si ma théorie voit toujours dans les protubérances l'effet lumineux de trous photosphériques, ces trous n'ont pas besoin d'être assez grands pour être vus comme des taches. Ils pourront être aussi infiniment plus petits. On les verra alors comme ces pores dont est parsemée toute la surface du soleil, ou bien, si plus petits encore, ils sont par exemple moins grands que la Hollande, on ne les verra plus du tout.

Or il n'est pas difficile de comprendre que si des trous photosphériques considérables, comme ceux qui forment les taches, ne peuvent apparaître que dans les zones royales, des trous plus petits et entièrement invisibles doivent pouvoir exister sur toute la surface du soleil.

Je sais bien qu'ici on objectera tout de suite que le voile photosphérique qui au dehors des zones royales nous cache même les plus grandes taches y cachera en même temps, et plus facilement encore, tous les trous plus petits. Mais cette objection éventuelle ne pourra résulter que d'un malentendu. Car le voile photosphérique, bien loin de devoir nous cacher des trous très petits, est justement l'instrument qui les formera au contraire. Il les formera surtout clairement, lorsque très mince, il aura dans son tissu peu serré, tout comme les voilettes de nos dames, une multitude de mailles ouvertes. Ces mailles ouvertes pourront être grandes d'ailleurs comme des royaumes terrestres et être invisibles néanmoins; mais elles pourront être aussi infiniment petites. A la rigueur elles pourraient être même complètement absentes, sans que pour cela, comme par exemple le pouvoir pénétrant des rayons du radium le nous prouve, le voile photosphérique, vu sa petite épaisseur, cessât de pouvoir être considéré comme un écran perforé impuissant à arrêter tous les rayons au passage.

Or, lorsque le voile photosphérique, qui est donc toujours plus ou moins perforé et est excessivement mince en tout cas, viendra recouvrir une tache, il pourra n'avoir aucune peine à la cacher; mais il ne pourra empêcher, qu'à travers les trous toujours invisibles

Tableau. Il est vrai qu'en vertu de la lenteur de la rotation près des pôles une même protubérance y aura plus de chance d'être observable plusieurs jours de suite et d'être comptée alors pour plusieurs. Mais pour pouvoir être revues ainsi 8 jours de suite, les protubérances demanderaient une grandeur et une durée peu communes, qui prouveraient alors d'une autre manière que dans les calottes polaires existerait quelque cause particulière, qui y favoriserait le développement des protubérances (voir aussi la note *g* précédente).

dans le mince couvercle qu'il forme, la cavité de cette tache exerce encore au dehors son effet lumineux et y allume par conséquent sa protubérance *m*).

Mais si les trous invisibles dans le voile qui nous cache la surface photosphérique éventuellement trouée du soleil peuvent engendrer ainsi des protubérances hors des zones royales, il est évident que ces protubérances se formeront d'autant moins que ces trous seront moins considérables et que le voile sera plus épais. Or, c'est à la latitude de 65° que ces trous auront nécessairement leur minimum de grandeur; car c'est là que d'après mon Tableau VII les vitesses de la photosphère et de l'atmosphère du soleil diffèrent le plus et que par conséquent le voile photosphérique sera plus épais, plus serré et moins perforé que partout ailleurs.

La rareté continuelle des protubérances vers la latitude de 65° n'a donc rien de surprenant; car à mon idée de la formation des protubérances au dehors du voile photosphérique perforé, là où ce voile cache des taches, elle répond directement. Mais à cette même idée répond très bien aussi une autre particularité capitale, que mon dernier Tableau fait clairement ressortir. C'est la particularité, qu'après le maximum de chaque période undécennale le maximum des protubérances se déplace des zones royales vers des zones à latitude beaucoup plus élevée. Dans les colonnes II, III, IV, V, VI, XI, XII et XIII du Tableau nous voyons en effet que durant la période du maximum des taches, le maximum des protubérances se présente dans les zones royales. Mais les colonnes VII, VIII, IX et X nous démontrent qu'il n'en est plus de même lorsque, comme depuis 1887 jusqu'à 1890 le minimum approche. Lorsqu'alors les taches de plus en plus rares ne se forment plus que dans le voisinage de l'équateur pour réapparaître soudainement à 30° de latitude, le maximum des protubérances se montre à une latitude plus grande encore, c'est à dire à 45° , tout à fait hors des zones royales.

Ce changement dans la latitude où l'activité est la plus grande a déjà été expliqué dans le 8^{me} paragraphe. Nous avons vu alors que la photosphère ne saurait vibrer toute d'une pièce et qu'à chaque latitude elle doit vibrer autrement. Et c'est ainsi que, lorsqu'à

m) Les trous très petits pourront former ces protubérances flammiformes relativement petites, qui limitent la chromosphère, où elles se montrent souvent serrées comme l'herbe dans nos prairies (LOCKYER: Chem. of the Sun p. 117, fig. 49). Là où le voile sera impuissant à nous cacher des taches, il nous fera voir au travers de ses trous dans l'ombre des taches ces endroits plus foncés que DAVES y a découverts et que beaucoup d'autres observateurs, comme M. M. DE PEREIRA, MAW, A. J. S. ADAMS, MISS BROWN et le Père CORTIE (CLERKE: Probl. p. 75 et 76) ont remarqués aussi.

l'équateur les taches diminuent, parce que la photosphère y continue encore toujours son mouvement descendant, on verra au même moment à 30° de latitude les taches augmenter de nouveau, parce que là la photosphère aura déjà repris son mouvement ascendant. Mais si à la latitude de 30° la photosphère reprend son mouvement ascendant plus tôt qu'à l'équateur; à 45° elle l'aura repris plus tôt encore, et si, lorsque les taches réapparaissent à 30° , le maximum des protubérances se montre à 45° de latitude, ce sera parce qu'à cette latitude de 45° la photosphère aura déjà atteint alors son maximum de hauteur, avec son maximum de trous. De tous ces trous hypothétiques nous n'en voyons jamais aucun, parce que le voile photosphérique les nous masque; mais ils n'en démontrent pas moins, tous les onze ans, la réalité de leur existence par le maximum de luminescence, qu'à travers les trous dans le mince voile, qui les masque, ils produisent alors dans l'atmosphère du soleil.

L'accord qui existe entre les prévisions de ma théorie et la répartition des protubérances et surtout le minimum permanent des protubérances vers 65° de latitude, où le voile photosphérique de ma théorie doit être nécessairement plus serré et moins perforé que partout ailleurs, donnent, ce me semble, à toutes les considérations nouvelles, qui nous ont guidés dans ce paragraphe et qui au moyen de mes Tableaux V et VII nous ont conduits à l'explication de la répartition des taches, un nouvel appui fort opportun.

§ 11. *Mouvements propres des taches et des facules.*

Quoiqu'il résulte des considérations précédentes, que la répartition des taches et leur formation semblent grandement dépendre des différences en vitesse angulaire des différentes zones photosphériques et de l'atmosphère qui les recouvre, il n'en est pas moins vrai, que d'autres différences en vitesse angulaire doivent jouer aussi un rôle dans la formation des taches.

Remarquons tout d'abord que les spirales qui d'après CARRINGTON et SECCHI *n*) donnent à 2 ou 3% des taches une apparence comme si elles avaient fortement tourné, me paraissent dues aux différences en vitesse angulaire des taches et des zones photosphériques qu'elles traversent. Elles ne sauraient être attribuées à une rotation réelle et cyclonique de la tache, car une telle rotation n'a été que très rarement observée *o*). Ce mouvement n'est d'ailleurs

n) YOUNG: the Sun p. 126.

o) SECCHI: le Soleil I p. 89. YOUNG: the Sun p. 126. DAVES: Mem. R. A. S. XXI p. 160. W. H. BIRT: Monthly Not. XXI p. 144.

ordinairement nullement indiqué; car dans les différentes parties d'une même tache les spirales nous montrent le plus souvent un mouvement en sens opposé *p*). Mais, si ma théorie des taches est vraie, elles pourront montrer des spirales sans jamais avoir tourné. Car le mouvement centrifuge dans une tache, que la poussée d'en bas fait enfler, tendra à dévier en spirales dès qu'il atteindra des zones à vitesses angulaires différentes, où la matière présente refusera de plus en plus de reculer à mesure que ce mouvement centrifuge sera plus près de cesser. Si cette explication est juste on verra souvent aux côtés boréal et austral d'une même tache ces spirales courbées en sens opposés, on observera ces spirales surtout dans les taches, qui formées très lentement, auront été peu troublées par des pressions latérales, dues à des taches voisines, et on les verra surtout dans les taches venant de s'agrandir ou étant sur le point de disparaître *q*). Car si les nuages dispersés par la vapeur qui s'élève au centre d'une tache naissante peuvent filer en spirales, ils pourront revenir en spirales aussi lorsqu'au centre de la tache la vapeur recondensée aura produit un vide, que la matière photosphérique viendra combler de toutes parts.

Mais tandis que les différences en vitesse angulaire, qui ne causent accidentellement que l'apparence cyclonique de 2 à 3 $\frac{0}{0}$ des taches n'ont rien de bien important, il n'en est pas de même d'autres différences en vitesse angulaire, qu'il me reste à étudier et qui sont au contraire, comme je tâcherai de le démontrer, pour la théorie du soleil en général et des taches en particulier du plus grand intérêt. Il est évident en effet, que si les nuages photosphériques ont une rotation, qui diffère complètement de celle du corps principal et gazeux du soleil, cette différence ne se manifestera pas seulement, comme nous l'avons vu plus haut, à leur niveau le plus relevé où s'enflent les facules et où crèvent les taches, mais tout aussi bien à leur niveau le plus profond, où la vapeur, qui en haut soulève les facules et fait crever les taches, résulte de leur évaporation.

Or il n'est nullement probable, comme je l'ai tacitement supposé jusqu'ici *r*), que la vitesse angulaire du corps principal et gazeux du soleil soit indépendante de la distance du centre. Car l'hypo-

p) YOUNG: the Sun p. 123. „Very often, in spots of considerable extent, there are opposite spiral movements in different portions of the umbra; indeed, this is rather the rule than the exception”.

q) SECCHI: le Soleil I p. 88 „En réalité on n'observe ces tourbillons qu'à l'époque de la formation; ils se présentent souvent dans les moments de recrudescence et lorsqu'une tache est sur le point de disparaître”.

r) Voir plus haut p. 72.

thèse est beaucoup plus probable que cette vitesse angulaire augmente avec la profondeur. Cette hypothèse nous est suggérée en effet par l'explication immédiate, qu'elle donne au mouvement accéléré des taches, que nous avons vu démontré dans le § précédent et elle ne répond pas mal non plus, comme nous le verrons plus loin, à des idées assez plausibles quant à la cosmogonie du soleil. C'est en tout cas cette hypothèse, que j'adopterai dans les considérations, qui vont suivre.

Il est clair d'abord que si dans la profondeur le gaz solaire tourne plus vite sur l'axe que les nuages, qui durant le minimum doivent s'y enfoncer, ce gaz donnera à ces nuages un surcroît de vitesse angulaire, qu'aura donc plus tard aussi la vapeur, que ces nuages produiront et qu'auront de même les facules et les taches, qui nous feront voir alors combien vite cette vapeur se meut encore à sa plus grande élévation. Les nuages photosphériques au dessus desquels ces facules et ces taches apparaissent auront une moindre vitesse 1° parce qu'ils auront toujours été produits à un niveau moins profond et 2° parce qu'une accélération éventuelle y aura toujours été enrayée plus longtemps par le mouvement plus lent de la masse principale et gazeuse du soleil.

Telle me paraît être l'explication de l'accélération des taches par rapport aux nuages photosphériques. Cette accélération est due par conséquent à la vitesse angulaire plus grande dans la poussée d'en bas. Et comme cette poussée est nécessaire, non seulement pour former les taches, mais tout aussi bien pour les faire durer, toute tache marchera toujours plus vite que les nuages, qui l'environnent, et qui sans cesse tendront par conséquent à la ralentir.

Cette accélération des taches (et des facules, qui les précèdent en temps et en lieu) sera donc surtout grande tant que les taches se forment ou s'agrandissent; elle diminuera généralement avec leur âge et dans les taches réunies en groupes elle sera nécessairement plus grande que dans les taches solitaires. Toutes ces prévisions évidentes de ma théorie ont déjà été longuement étudiées à propos de mes Tableaux I, II et V, où nous avons vu tous ces effets de la résistance des nuages plus lents clairement vérifiés.

Mais il y a encore beaucoup d'autres phénomènes de premier ordre, que ma théorie de l'accélération de la poussée d'en bas explique directement. Tel est par exemple le phénomène, que WARREN DE LA RUE a déjà remarqué, que M. CORDER a observé de même en 1895 et que M^{me}. MAUNDER vient d'étudier minutieusement de nouveau sur les taches, qui de 1889 à 1901 ont été photographiées à Greenwich. Ces trois observateurs ont constaté,

que dans la moitié orientale du disque solaire les taches sont généralement plus grandes et plus nombreuses, s'éteignent moins souvent et naissent davantage que dans la moitié occidentale *s*).

Or ma théorie fait voir qu'il serait impossible qu'il en fût autrement. Car si les taches résultent de la rupture de bulles photosphériques lorsque la poussée de la vapeur, qui a formé ces bulles de nuages photosphériques plus lents, continue *t*), cette vapeur à vitesse angulaire accélérée percera ces bulles relevées, non pas dans leur centre, mais du côté occidental marchant au devant, de sorte que chaque tache aura toujours par derrière un relèvement photosphérique non crevé, qui ne pourra nous intercepter la vue des taches que dans la moitié occidentale du disque solaire, où nous verrons donc toujours les taches plus petites et moins nombreuses qu'elles ne sont en réalité. Dans la moitié orientale au contraire les taches se montreront toujours avec leur grandeur et leur fréquence réelles; car là le relèvement photosphérique, qui les suit par derrière, ne pourra jamais les nous éclipser *u*).

Cette inégalité des deux moitiés solaires, bien loin d'être mystérieuse et de suggérer même quelque influence occulte de notre petite terre sur les phénomènes grandioses à la surface du soleil *v*) est par conséquent très facile à comprendre et elle donne donc à mon idée que les taches résultent de la rupture de bosses photosphériques une belle confirmation.

Les photographies obtenues à Kew par MM. WARREN DE LA RUE,

s) HENRY CORDER: Journ. Brit. Astr. Assoc. VI 1895 p. 27. Growth and Decay of Sunspots: „I have just looked through Miss BROWN's reports for 1891—2 and can only find a very few isolated cases of increase near the west limb.... and also note the great many instances of rapid growth soon after coming into view on the eastern side". Mrs. MAUNDER: Ibid. Report of Meeting of the Ass. held on May 29, 1907. Account of her paper on „An apparent Influence of the Earth on the Number and Areas of Sun-spots in the Cycle 1889—1901" presented recently at a meeting of the R. A. S. „947 spot-groups came into view from the invisible hemisphere at the east limb, and only 777 went at the west limb back into the invisible hemisphere. Similarly, when she investigated the birth rate on the visible hemisphere, she found it declined from the east to the west in a marked degree and the death rate rose just as distinctly.

t) Voir plus haut page 46 et aussi la note *i* suivante.

u) J'ai déjà proposé cette même explication dans ma Théorie de 1892, où à la page 119 je me suis exprimé ainsi: „Le fait découvert par WARREN DE LA RUE qu'en général les taches, que nous montre le côté oriental du disque solaire semblent plus grandes que celles qui apparaissent du côté opposé, ne trouve-t-il pas dans le rehaussement du côté oriental du bord de la tache une explication bien simple?" Il est clair d'ailleurs que les protubérances qui surgissent dans le voisinage des taches présenteront plus ou moins le même phénomène, mais que les protubérances sans tache ne le présenteront pas. C'est ce qu'a constaté M^{me}. MAUNDER en effet en étudiant les protubérances, qui de 1892 à 1905 ont été observées à Catania (Mrs. MAUNDER: loc. cit. p. 333).

v) CORDER: loc. cit. p. 27. Mrs. MAUNDER: loc. cit. p. 333.

BALFOUR STEWART et LOEWY ont fait ressortir d'ailleurs ce développement plus grand des facules du côté postérieur de la tache où leur renflement relevé forme un bourrelet *w*). Ces mêmes observateurs ont découvert aussi que la matière faculaire relevée et amassée à la suite des taches *y* forme quelquefois de véritables queues. Sur 1137 taches photographées, 584 présentaient une queue faculaire dans la partie postérieure et 45 seulement une espèce de queue dans la partie antérieure *x*).

Mais revenons maintenant aux mouvements propres des taches. Si une tache est en train de se former au milieu d'un groupe de taches, l'augmentation de volume alors nécessairement produite dans ce milieu par l'intrusion de la vapeur, qui s'y élève, doit disperser les taches déjà existantes. Le groupe en tournant sur l'axe solaire doit nous montrer en ces moments les taches, qui vont au devant, plus accélérées et celles qui vont à l'arrière plus paresseuses que de coutume. Or voilà justement ce que SPOERER a souvent observé *y*).

w) BALFOUR STEWART: PROC. of the R. Soc. Vol. XIII p. 168. PHILLIPS: PROC. of the R. S. Vol. XIV p. 47: „In a recent communication M. BALFOUR STEWART remarks that in the photographs of the sun taken at Kew, it appears to be a nearly universal law that the faculae belonging to a spot appear on the left of the spot, the motion due to the suns motion of rotation being across the picture from left to right. I find that my sketches support this view to the extent that the faculae which follow a spot appear in several cases more prominent than in others. SECCHI: le Soleil I p. 165:.... „3° la disposition des facules, qui sont plus vives et plus étroites à la partie antérieure des taches, tandis qu'elles sont plus nombreuses, plus larges mais plus pâles à la partie postérieure qui présente elle-même sur son contour un renflement que M. DE LA RUE appelle un bourrelet”.

x) DE LA RUE, BALF. STEWART and LOEWY: PROC. of the R. Soc. XIV p. 39 Researches on Solar physics. Le développement plus grand des facules du côté postérieur des taches a déjà été décrit par CHR. SCHEINER dans la Rosa Ursina comme un fait important. Voici comment la description de SCHEINER est rendue par le P. SCHREIBER (loc. cit. p. 47): „Die Fackeln haben die Tendenz, sich mehr gegen den Ostrand als gegen den Westrand aus zu breiten. Weshalb auch jene Fackeln, welche in der Nähe der Flecken entstehen, diesen meistens nachfolgen (Rosa Urs. p. 192, 248, 260, 268, 292). Im Ganzen verbreitet sich überhaupt die Lichtmasse der Fackeln mehr gegen Osten als gegen Westen (p. 192)”. Je ferai remarquer ici en passant que le développement plus grand des facules du côté postérieur des taches, où elles forment même souvent des queues faculaires, ne me paraît guère compatible avec l'idée généralement acceptée depuis les recherches de M. STRATONOFF, que les facules marcheraient plus vite que les taches. (CLERKE: Probl. p. 146. ARRHENIUS Lehrb. d. kosm. Phys. p. 124. STRATONOFF: Astr. Nachr. N°. 3275, 3344). Cette marche plus vite ne me semble possible que dans les facules qui vont au devant des taches. Elle est impossible dans les facules qui restent en arrière.

y) SPOERER: loc. cit. p. 422 „Uebergrosse Rotationswinkel kommen vor an der Westgrenze der Gruppen und bei neu entstandenen Flecken. In ostlichen Theile einer Gruppe kommen niemals uebergrosse Rotationswinkel vor. Man findet daselbst Verkleinerung der Rotationswinkel, aber selten mit bedeutenden Betrage”.

Mais ces vitesses angulaires ne peuvent durer qu'un temps bien court. Ils n'ont lieu que durant la formation des taches *z*).

Il est clair d'ailleurs, que la dispersion décrite des taches ne sera pas seulement remarquée dans la direction de leurs longitudes, mais tout aussi bien dans celle de leurs latitudes. De là probablement tous ces changements de direction soudains, que montre souvent, d'après M. MAUNDER *a*), l'itinéraire des taches sur la surface du soleil. De là peut-être aussi la légère tendance des taches à se rapprocher des pôles ou de l'équateur selon que leur latitude est ou plus grande ou plus petite que celle des zones entre 10 et 15°, où les taches se développent le plus fortement *b*).

Tandis que les phénomènes, que nous avons considérés dans les deux alinéas précédents, résultent d'après ma théorie du gonflement des bulles, qui produisent les taches, ce gonflement me semble expliquer aussi, pourquoi deux taches très rapprochées se repoussent si souvent *c*). Car si ces taches, qu'un mince rempart de matière condensée sépare, sont des bulles de vapeur en train de se gonfler, leur gonflement simultané doit être entravé sur la ligne, qui relie leurs centres et réussira surtout là où dans le prolongement de cette ligne la distance des parois des deux bulles est aussi grande que possible. Or, comme les deux bulles en grossissant doivent s'éloigner de la sorte, leurs orifices, que nous voyons comme des taches, doivent nous montrer le même éloignement.

Cet éloignement n'aura lieu d'ailleurs que tant que les taches grossiront *d*). En cessant de s'agrandir, elles tendront plutôt à se réunir pour

z) SPOERER: loc. cit. p. 424, 425. Astron. Nachr. N°. 2936 p. 122.

a) MAUNDER: Knowledge Sept 1, 1894. The wanderings of a sunspot. A la page 200 M. MAUNDER donne un dessin où tous ces changements soudains en longitude et en latitude sont représentés.

b) CARRINGTON: Obs. of the Spots of the Sun, made at Redhill. SECCHI: le Soleil I p. 121 etc. CHR. SCHEINER: Rosa ursina, Cursus non paralleli p. 200, 330, 264 etc. SPOERER: Sonnenfleckenbeobachtungen loc. cit. p. 418. „Die Vereinigung beider Halbkugeln bestätigt für 31 Jahre die bekannte Breiteänderung, nämlich in den Aequatorialzonen bis 10° Breite, Annäherung an den Aequator, dann von 10° bis 15° geringe Annäherung zum Pole, ueber 15° zunehmende Bewegung nach dem Pole. Dieses Resultat bezeichnet indessen nur den Ueberschuss, welchen eine der beiden Richtungen ueber die andere erlangt.... Beide Richtungen kommen in alle Zonen vor”.

c) YOUNG: the Sun p. 119. CHR. SCHEINER: Rosa ursina p. 188, 252, 286. P. SCHREIBER loc. cit. p. 45. „Die Flecken sind bei ihrer Entstehung (SCHEINER spricht eben von benachbarten Flecken) einander immer näher und erst dann entfernen sie sich von einander”.

d) P. J. SCHREIBER: loc. cit. p. 45. „Ja auch die später als neu entdeckte Thatsache, dass dieses Auseinander schieben zweier Flecke hauptsächlich bei Neubildung stattfindet, sowie dass der vorangehende der beiden Flecken gröszere Rotationsgeschwindigkeit zeigt als der Nachfolgende, war für SCHEINER nichts Neues”.

former ainsi des taches plus grandes *e*) et, lorsqu'elles seront dans leur déclin, le vide, qu'elles produiront, causera même une action aspirante sur les taches dans leur voisinage. „Ce qui prouve bien, dit SECCHI *f*)”, ce pouvoir d'attraction exercé par les taches, c'est l'absorption des petites par les grandes. Elles se rapprochent peu à peu de la cavité principale dans laquelle on les voit bientôt disparaître *g*).” L'influence, que toute tache exerce sur quelque tache voisine peut donc être diamétralement opposée. En tout cas cependant on verra les taches se déformer ou se déplacer lorsque dans leur voisinage une autre tache se produit ou change de contour *h*).

L'histoire des taches a encore quelques autres particularités, qui doivent résulter du mouvement accéléré de la vapeur dans la poussée d'en bas. Car ce mouvement accéléré fait prévoir, que toutes les fois qu'en montant, le sommet de cette vapeur produira successivement toute une série de taches, les taches nouvelles à mouvement accéléré se formeront de préférence du côté antérieur de la série. Les taches à la suite et leurs facules ne participeront guère à ce mouvement accéléré et on les verra même souvent rejetées en arrière, comme je l'ai déjà expliqué dans un alinéa précédent. Si par conséquent dans un groupe de taches une série de taches bien petites forme quelquefois une espèce de queue, qu'on trouve ordinairement du côté postérieur d'une tache marchant au devant, et si en général les taches du côté postérieur d'un groupe sont plus lentes, plus anciennes et partant plus caduques que celles du côté antérieur, ces particularités, que CHR. SCHEINER a déjà remarquées *i*) et que SECCHI et SPOERER ont si bien décrites *j*) répondent très bien aux prévisions de ma théorie.

e) CHR. SCHEINER: Rosa Ursina „Man stelle sich nur Wasserblasen vor, die sich zu einer grösseren vereinigen” (P. J. SCHREIBER loc. cit. p. 40). Combien cette idée de SCHEINER répond elle bien ici à ma théorie des taches!

f) SECCHI: le Soleil I p. 87.

g) CHACORNAC: Bull. des Obs. faites à Ville Urbanne. Groupe des taches solaires 6 Mars 1865. LOCKYER: Contrib. to Solar Physics p. 70. MAUNDER: Journ. of the Brit. Astr. Assoc. XVII (1906) p. 129: „The leader spot of an ordinary stream, during the early history of the group, would move forward from the rest of the group with a average speed of 8000 miles a day, swinging backwards again towards its original position as the group declined”.

h) SECCHI: le Soleil I p. 142.

i) CHR. SCHEINER: Rosa ursina p. 516. J. SCHREIBER: loc. cit. p. 38. CHR. SCHEINER fait remarquer aussi que très souvent l'ombre des taches n'est pas centrale, parce qu'elle les devance dans la direction de l'ouest. „Der Kern strebte und drängte immer mehr gegen West, was bei grösseren Flecken vorzukommen pflegt” (Rosa ursina p. 260).

j) YOUNG: the Sun p. 119. SECCHI: le Soleil I p. 91. „Les taches possèdent souvent une espèce de queue composée de taches plus petites; ces appendices se trouvent ordinairement dans la partie postérieure de la tache” (fig. 45, p. 88). SPOERER: Sonnenfleckenbeobachtungen loc. cit. p. 422 „der östliche Theil der Gruppe verschwindet leichter.”

Ayant fait voir en ce paragraphe combien l'hypothèse de l'augmentation de la vitesse angulaire du soleil dans la profondeur est fertile en explications plausibles, il me reste à faire voir, que cette hypothèse n'a rien d'in vraisemblable et qu'elle ne répond pas seulement aux faits nombreux et bien constatés, qu'elle sert à expliquer, mais aussi à des idées très plausibles quant à la cosmogonie du soleil.

Tout le monde admet en effet que dans un passé lointain le soleil était beaucoup plus volumineux qu'aujourd'hui, qu'il contenait alors la matière, qui depuis a formé la terre et les planètes *k*) et qu'il tournait alors beaucoup plus lentement sur l'axe *l*). Tout le monde admet aussi, que la contraction du soleil continue et que c'est à elle principalement qu'est due la conservation de la chaleur solaire *m*).

Or si le soleil étendu primitif a engendré la terre, les éléments les plus lourds de notre chimie terrestre faisaient donc autrefois partie des couches extérieures du soleil. Si ces couches à présent ne contiennent plus que des éléments légers, c'est parce que les éléments les plus lourds, qui y étaient mélangés autrefois, ont été attirés depuis plus fortement vers le centre. Les sphères égales, qui au commencement renfermaient chaque élément, se sont donc contractées d'autant plus, que ces éléments étaient plus lourds. Et c'est ainsi que de la contraction du soleil ont résulté 1° la stratification de ses éléments et 2° l'accélération de sa vitesse angulaire vers le centre. Car si la matière à l'intérieur du soleil contracté est venue de plus loin que celle à la surface, sa vitesse initiale lui aura donné une vitesse angulaire plus grande.

Cette augmentation de la vitesse angulaire avec la profondeur me semble ainsi beaucoup mieux concevable que celle avec la hauteur que plus souvent on suppose et que l'on croit fondée sur les quatre arguments suivants: 1° sur la grande vitesse des facules *n*), 2° sur quelques observations de M. JEWELL, que je n'ai jamais vues publiées, mais qui, d'après une courte Note dans l'*Astrophysical Journal*, citée très souvent, auraient prouvé, que les couches renversantes tourneraient d'autant plus vite qu'elles s'élèveraient davantage *o*), 3° sur une hypothèse de M. BELOPOLSKY, quant à la

k) IMM. KANT: *Algern. Naturgesch. u. Theorie des Himmels*, Zweites Theil, Erster Hauptst. (1755). OSTWALD'S *Klassiker* p. 15 etc.

l) LAPLACE: *Expos. du Syst. du Monde* T II p. 295 (1796).

m) HELMHOLTZ: *Wechselwirkung d. Naturkräfte* (1854). HOMER LANE (1870). A. RITTER (1882). SIR W. THOMSON (1887). Voir plus haut p. 22 et 23.

n) CLERKE: *Probl.* p. 146. Voir cependant la note *x* précédente.

o) *Astrophys. Journal* IV p. 138.

nature de la couronne *p*) et 4° sur l'hypothèse de quelques savants, du Père BRAUN par exemple, que la rotation du soleil aurait été causée par des collisions avec d'autres mondes stellaires *q*). Ces quatre arguments n'ont rien de bien convaincant et la vitesse exceptionnellement grande des facules *y* figure même comme une anomalie inexplicable si l'on y réfléchit que les couches renversantes, qui planent généralement encore plus haut que les facules tournent cependant plus lentement *r*).

De telles anomalies ne se rencontrent pas, que je sache, dans mon explication de l'accélération des taches et des facules (voir la note *x* précédente). Cette accélération donne au contraire à l'hypothèse de l'augmentation en vitesse angulaire avec la profondeur sa plus belle confirmation.

Mais, si cette hypothèse est juste, elle aidera aussi peut-être à nous expliquer l'aplatissement des couches gazeuses solaires, qu'on a constaté maintes fois, et que la rotation trop lente des couches qu'on connaît, n'aurait jamais pu produire. Cet aplatissement, quelle qu'en ait été d'ailleurs la cause cosmogonique, n'est en tout cas nullement douteux. Car il a été souvent observé durant les éclipses *s*) et il répond parfaitement aussi à cette particularité, qui est capitale dans ma théorie du soleil „que dans les zones polaires ne se trouvent jamais ces éruptions métalliques remarquables, qui sont fréquentes dans les régions équatoriales” *t*).

p) BELOPOLSKY: Bull. de l'Acad. de St. Petersburg VI N°. 3 p. 293.

q) BRAUN: Ueber Kosmogonie p. 58—64 u. 176—180.

r) CLERKE: Probl. p. 147.

s) Voir aux pages 33, 34 et 82 les notes *a*, *b*, *c* et *f*. Le renflement équatorial de l'atmosphère solaire est accusé, d'après tous les observateurs, par le développement énorme que montrent souvent les rayons de la couronne au dessus de l'équateur (éclipses de 1867, 1878, 1889) et au dessus des zones royales, et que ces rayons ne montrent jamais aussi fort au dessus des zones polaires. Mais ces rayons variables n'étant que des accidents lumineux locaux (voir mes notes *i* à la page 20 et *h* à la page 84), ne nous donnent pas l'image de l'atmosphère entière, que spectralement le coronium nous fait voir plus complètement là aussi, où entre les rayons brillants on ne voit à l'oeil nu rien du tout. (YOUNG: the Sun p. 258 et 262. Am. Journ. of Sc. Vol. 48 2^d Series p. 377. ABNEY et SCHUSTER: Phil. Trans. 175 (1884). HARKNESS (1869) Washington Obs. App. II p. 60). On aurait donc tort de croire que lorsque la couronne nous montre la forme d'une étoile à quatre rayons l'atmosphère solaire elle-même aurait alors aussi une forme aussi bizarre.

t) SECCHI: le Soleil II p. 220. Voir aussi la note *g* à la fin de mon 10^{me} paragraphe. Ma théorie prévoit aussi que dans le renflement équatorial des couches renversantes il y aura aussi des vapeurs, qui moins abondantes aux pôles, donneront à l'équateur et aux pôles deux spectres un peu différents. En comparant ces deux spectres (que d'après les idées courantes les éruptions métalliques fréquentes dans les zones équatoriales devraient déjà rendre différents aussi) on leur trouvera peut-être quelques inégalités. Mais si ces inégalités ne sauraient être trouvées, cela ne devra pas trop nous surprendre. Car 1° il s'en faut de beaucoup que nous sachions suffisamment comment les raies d'absorption

Or si cet aplatissement des couches gazeuses existe et si par conséquent la profondeur où un même élément sera également représenté est aux pôles plus grande qu'à l'équateur, un tel aplatissement aura dû jouer un rôle cosmogonique important dans la formation de la photosphère et il expliquera ainsi peut-être la loi de la rotation des zones photosphériques. C'est ce qu'avant de terminer ici ma théorie du soleil je tâcherai de démontrer dans le paragraphe suivant.

§ 12. *Le déplacement séculaire de la photosphère comme lieu géométrique expliquant la rotation particulière des zones photosphériques solaires et l'évolution des différents types spectraux stellaires.*

Dans ce paragraphe nous considérerons la photosphère non seulement comme le manchon nuageux vibrant, que nous avons étudié jusqu'à présent, mais surtout aussi comme le lieu géométrique des points où en vertu de la température diminuant du centre vers la surface, la condensation des nuages photosphériques commence à être possible. Ce lieu géométrique n'est pas aplati comme les couches gazeuses qu'il traverse, mais il est plus ou moins sphérique, parce que dans les couches extérieures du soleil la température est déterminée surtout par la distance du centre excessivement réchauffé.

Si c'est donc d'une couche aplatie de la vapeur photosphérique, tournant sur l'axe du soleil, qu'une photosphère sphérique de nuages a été formée, ces nuages ne tourneront pas sur l'axe tout d'une pièce, mais avec des vitesses angulaires différentes qui augmenteront des pôles vers l'équateur. Il est clair en effet, qu'après

se forment et comment leur épaisseur dépend *a.* de l'intensité de la source lumineuse (voir la note *x* suivante) et *b.* de l'épaisseur de la couche absorbante (JULIUS: *Astroph. Journ.* March 1907 p. 95—115) et 2° nous savons bien avec certitude que les épaisseurs très différentes des vapeurs chromosphériques, à travers lesquelles nous voyons la photosphère au centre du disque et à son bord, ne changent rien aux raies (FORBES, MATTHIESSEN, JANSSEN: *C. R.* 25 et 64. BREWSTER & GLADSTONE: *Phil. Tr.* 1860. DELAUNAY: *Ann.* 1869), mais que les moindres différences dans l'état hygrométrique de notre propre atmosphère causent aussitôt dans le spectre des rayons solaires affaiblis, tels qu'ils arrivent jusqu'à nous, un changement notable dans l'épaisseur des raies telluriques d'absorption (BREWSTER: *Phil. Mag.* 1838 (3-) 8 p. 384. JANSSEN: *Compt. Rend.* 1866. PIAZZI SMYTH: ROSCOE, *Spectr. analyse* 1890 p. 170) et puis 3° nous avons encore les recherches récentes de M.M. HALE et WALTHER ADAMS (*Astroph. Journ.* March 1907 p. 91) qui ont fait voir que la lumière solaire qui est réfléchiée dans notre propre atmosphère et probablement aussi dans l'atmosphère solaire (ou qui en vertu de troubles atmosphériques arrive dans le spectroscopie d'endroits photosphériques adjacents pas directement fixés) doit tendre aussi à amoindrir toute différence éventuelle de spectre en différents points du disque solaire. (Voir aussi sur ce sujet H. F. NEWALL: *Monthly Not.* Jan. 1907 p. 162; *Observations on the Nature and Amount of Sky-glare*).

être entré dans la couche aplatie de la vapeur photosphérique, notre lieu géométrique sphérique n'y rencontra aux pôles que peu de nuages condensés dans un voisinage relativement pauvre en vapeur, tandis qu'à son équateur au contraire il dût se charger des nuages puissants, que la vapeur abondante du renflement équatorial avait produits jusqu'au loin. Or, comme ces nuages puissants équatoriaux avaient dû descendre d'une hauteur beaucoup plus grande que les nuages clair-semés des régions polaires, ils devaient donc tourner sur l'axe beaucoup plus vite aussi *u*).

Si tel me paraît être le commencement d'une explication du „pourquoi” de la loi de rotation des zones photosphériques, cette explication ne répond pas mal aux idées vaguement acceptées quant au „comment” de la rotation du soleil. Elle y répond même beaucoup mieux qu'à ma propre idée, que j'ai exposée dans le Tableau V de la page 74. Car elle fait bien voir, que dans la photosphère les vitesses angulaires doivent diminuer lorsque la latitude augmente, mais elle ne donne aucune raison, pourquoi d'après mon idée, les zones photosphériques tourneraient plus lentement que le gaz solaire aux latitudes plus grandes que $12\frac{1}{2}^{\circ}$ et plus vite que ce gaz aux latitudes plus petites.

Quoique cette dernière particularité, que j'ai postulée, soit bien loin d'être sûrement établie, comme je l'ai déjà fait remarquer dans mon 10^{me} paragraphe, elle me paraît cependant si bien expliquer la répartition des taches, des facules et des protubérances, que je n'aimerais pas devoir m'en passer. Mais ce sacrifice n'est pour le moment nullement nécessaire. Car il n'est pas difficile de nous imaginer la cause, qui aura pu produire cette particularité.

Cette cause réside dans une propriété de la photosphère, que nous n'avons pas encore considérée jusqu'ici et qui, indépendamment de l'explication hypothétique où nous la verrons ici maintenant pour la première fois à l'oeuvre, me paraît être en tout cas de la plus haute importance pour comprendre dans toutes les étoiles leurs types spectraux et leur évolution.

La propriété de la photosphère, dont il s'agit ici, est son déplacement continu à travers les couches de l'astre. Nous savons déjà que le lieu géométrique photosphérique est loin d'être immobile,

u) Le calcul prouve que pour pouvoir produire la diminution de vitesse angulaire que les zones photosphériques nous font observer, la couche de vapeur photosphérique originelle a dû avoir un aplatissement de $\frac{1}{6}$. Cet aplatissement, à cause cosmogonique encore insuffisamment connue ne répond pas mal d'ailleurs à beaucoup d'observations du soleil éclipsé; et l'anneau coronal que M. SHACKLETON a photographié le 16 Avril 1893 au Brésil montre aussi un aplatissement pareil. (LOCKYER: Phil. Trans. 185 A p. 716 fig. 1 1474 K. ring).

car c'est son mouvement vibrant, qui cause, comme je l'ai expliqué plus haut la périodicité des phénomènes solaires. Mais ce mouvement vibrant n'est qu'insignifiant si nous le comparons avec le déplacement, que la photosphère pourra montrer dans le cours des siècles. Car il n'est nullement nécessaire, qu'après avoir accompli sa vibration undécennale, la photosphère remonte chaque fois à la même couche, où elle planait au maximum précédent. Sa hauteur nouvelle pourra être aussi ou plus grande ou plus petite. Cela dépendra du changement éventuel de la chaleur à l'intérieur du soleil.

Si le soleil en se contractant refroidit, son lieu géométrique photosphérique deviendra relativement plus petit; car en vertu de son poids la photosphère relativement lourde se contractera plus fortement que les couches gazeuses où elle plane et des couches, qu'à l'intérieur elle cachait autrefois, seront vues plus tard au dehors de sa sphère. C'est ainsi que les étoiles blanches du Type 1 de SECCHI, où la température transcendante a produit des photosphères tellement élevées *c)*, qu'elles ne font voir que surtout de l'hydrogène et de l'hélium au dehors, se changeront plus tard en des étoiles jaunes du Type 2. Car si ces étoiles blanches refroidissent leurs photosphères relevées immenses se contracteront plus fortement que leurs couches gazeuses stratifiées et les métaux, qu'elle couvrait autrefois et empêchait de manifester leurs raies spectrales, deviendront alors d'autant plus visibles que la photosphère descendra plus bas.

v) L'étoile blanche Beta Centauri par ex., dont la masse est 85 fois plus grande que celle de notre soleil a une photosphère 342 fois plus grande (CLERKE: Probl. p. 194). Les étoiles blanches ont généralement à masse égale une photosphère beaucoup plus lumineuse que les autres étoiles. C'est ainsi que Sirius par ex., $2\frac{1}{2}$ fois plus massive que le soleil, a un éclat 21 fois plus grand. (CLERKE: Probl. p. 199). Il est vrai qu'en vertu vraisemblablement de leur température transcendante les photosphères de ces étoiles ne sont pas voilées, comme celles de notre soleil et des étoiles jaunes et rouges par une nappe brumeuse obscurcissante. Mais cette absence d'un voile, qui dans notre soleil retient plus des deux tiers de sa lumière (VOGEL: Monatsber. 1877 p. 104. HASTINGS: Amer. Journ. of Sc. XXI p. 41 1881) ne saurait expliquer à lui seul la supériorité de leur éclat. Cette supériorité pourra être attribuée aussi à une radiation plus forte à même étendue; mais il est en tout cas probable, que cette supériorité soit due surtout à la grandeur de leurs photosphères. L'étude des éclipses, que montrent les étoiles blanches a confirmé d'ailleurs, que leurs photosphères ont par rapport à leur masse des dimensions énormes. Algol par exemple a une masse plus de 2 fois moindre que celle de notre soleil, mais une photosphère $\frac{2}{3}$ fois plus grande (VOGEL u. SCHEINER: Sitz. Ber. Berlin 28 Nov. 1889). Pour 16 autres étoiles blanches du Type d'Algol, des photosphères tout aussi volumineuses par rapport à leur masse ont été calculées par MM. H. N. RUSSELL et ALEX. ROBERTS (Astroph. Journ. X p. 215 et 208). L'obscurité des compagnes obscures du type d'Algol n'est peut-être que tout à fait relative (GORE: Journ. of the Brit. Astr. Ass. XIV p. 203, 249). D'après moi, c'est surtout la simplicité du spectre du Type 1, qui démontre, que dans les étoiles blanches la photosphère est très grande par rapport au volume de leur corps gazeux.

Et c'est ainsi aussi que les étoiles jaunes du Type 2, comme notre soleil par exemple, se changeront plus tard en étoiles du Type 3. La contraction de la photosphère continuera. Et on verra alors au dehors de la photosphère la matière, qu'elle cachait autrefois au dedans et que conséquemment on ne pouvait voir alors que dans le spectre des taches. Il n'est donc nullement étonnant, que M.M. HALE et ADAMS aient trouvé que le spectre du Type 3 et celui des taches ont un grand nombre de raies en commun *w*).

Mais si au contraire le Soleil en se contractant se réchauffe, comme HELMHOLTZ, LANE, RITTER et Lord KELVIN en ont fait voir la possibilité (voir ma note *v* à la page 23) et comme Sir ROBERT BALL l'a populairement exposé aux pages 497—500 de son livre „the Story of the Heavens”, la photosphère se contractera moins fortement que les couches gazeuses où elle plane. Car si ce réchauffement ne peut empêcher ces couches gazeuses de se rapprocher du centre, il doit bien en vertu de la volatilisation plus forte qu'il cause, empêcher la photosphère condensée de se rapprocher du centre tout autant. En ce cas le lieu géométrique photosphérique montera au travers des couches stratifiées et les couches renversantes deviendront invisibles à mesure que la photosphère montante les recouvrira. C'est ainsi que d'une étoile jaune du Type 2, solaire pourra résulter une étoile blanche du type 1. Tandis que par conséquent toutes les étoiles blanches doivent jaunir et rougir à la longue, il y aura probablement aussi des étoiles jaunes et rouges, qui à la longue blanchiront.

Mais revenons maintenant à notre propre soleil. Nous ne savons pas avec quelque certitude si en ce moment il se refroidit ou se réchauffe; car nous ne savons pas si la matière comprimée à cou-

w) HALE and ADAMS: Contributions from the Solar Observatory N°. 8. ADAMS: Ibid. N°. 12. HALE, ADAMS and GALE: Astroph. Journ. XXIV Oct. 1906 p. 205. HALE and ADAMS: Astroph. Journal March 1907. Voir aussi l'article „On the relation between stellar spectral types and the intensities of certain lines in the spectra” de M. SEBASTIAN ALBRECHT: Astroph. Journ. Dec. 1906 p. 333. „The principal result of the comparison is the very strong indication that the physical conditions in the stars as we pass from the *F* to the *Mb* type vary roughly in the same direction as from the sun to the sun-spots.” MM. NEWALL, COOKSON et BELLAMY ont observé de même dans le spectre d' α Orionis des bandes et des raies, qu'on retrouve aussi dans le spectre des taches (Monthly Not. 67 N°. 7). Si mon idée est juste, la grande simplicité du spectre des étoiles les plus chaudes n'est donc pas due, comme M. LOCKYER l'admet à la désintégration de leurs éléments ni, comme M. VOGEL l'admet, à l'impuissance des métaux à causer à la température de ces étoiles des raies d'absorption; mais bien au relèvement excessif de leur photosphère, qui cachera leurs éléments d'autant plus, qu'elle planera à une plus grande distance du centre (LOCKYER: L'évolution inorganique étudiée par l'analyse spectrale, Paris 1906 C. E. GUILLAUME: Revue générale des Sciences Oct. 1906. VOGEL: Astr. Nachr. N°. 2000. J. SCHEINER: Spectralanalyse d. Gest. p. 260).

sistance de „poix ou de mastic”, qui forme son noyau, se comporte, somme toute, comme un gaz. Mais dans le passé il doit y avoir eu un temps que le soleil en se contractant se réchauffait sans relâche. Or si en ce temps reculé la matière photosphérique actuelle a été prise, comme je l’ai expliqué au commencement de ce paragraphe, à quelque couche aplatie de la masse gazeuse du soleil et a été transformée alors en une photosphère sphérique tournant sur l’axe à l’équateur beaucoup plus vite qu’aux pôles, cette photosphère a été déplacée depuis à travers les couches du soleil dans une direction centrifuge. Et comme ce déplacement centrifuge a dû causer un ralentissement de sa vitesse angulaire par rapport à celle des couches à contraction centripète qu’elle traversait, cette photosphère ne tourne plus maintenant, comme au commencement, tout partout plus vite que son enveloppe gazeuse. Si son ralentissement a été tel, qu’à la latitude de $12\frac{1}{2}^{\circ}$ elle tourne à présent avec la même vitesse angulaire que le gaz, qui la recouvre, elle tournera plus vite que ce gaz aux latitudes plus petites et plus lentement que ce gaz aux latitudes plus grandes et la photosphère tournera donc en somme comme le demandent les Tableaux V et VII de mon dixième paragraphe.

DEUXIÈME PARTIE.

Le Mécanisme de la Périodicité dans les Etoiles rouges variables.

§ 13. *Périodicité des étoiles blanches et jaunes.*

En terminant ici pour le moment ma théorie du Soleil, je ferai remarquer tout d'abord que cette théorie doit être applicable aussi aux étoiles. De cette application, que j'ai déjà exposée en principe aux dernières pages, qui précèdent, j'espère faire l'objet d'un Mémoire spécial *x*). Il y a cependant une classe d'étoiles, qui

x) Les colorations exceptionnelles bleues, vertes et violettes dans les étoiles doubles ont été étudiées dernièrement par l'auteur dans le Bulletin de la Soc. belge d'Astronomie du mois d'Octobre 1899, p. 373—380. Ces colorations ne s'observent pas seulement dans les couples physiques, mais tout aussi bien dans les couples optiques. Dans le beau „Catalogue des Etoiles doubles et multiples en mouvement relatif certain” qu'a publié M. FLAMMARION, on voit que sur chaque 100 compagnons certainement physiques il y en a 23 d'exceptionnellement colorés, tandis que sur 100 compagnons certainement optiques il y en a 19. Parmi ces compagnons optiques il y en a comme ceux de Cygne 2708 et de Pégase 2877, qui ont une couleur si magnifiquement bleue, qu'ils peuvent être classés parmi les compagnons les plus fortement colorés. Or comme ces compagnons optiques sont en réalité des étoiles isolées et, comme telles, tout aussi peu bleus que toutes les autres étoiles isolées de l'univers, leur coloration exceptionnelle ne peut naître que du hasard, qui les nous fait voir tout près d'une autre étoile, dont ils sont indépendants et peut-être infiniment éloignés. Cette autre étoile pourra bien les colorer plus ou moins par un effet de contraste, mais cependant ce n'est pas ainsi que leur coloration s'explique; car, tout comme dans les couples physiques, cette coloration est réelle et persiste par exemple lorsqu'avec un diaphragme placé dans la lunette nous cachons l'étoile principale. C'est ce dont M. WITT, quatre autres observateurs et l'auteur se sont assurés à l'Observatoire de la société „Urania” à Berlin en 1894 (loc. cit. p. 379). Mais si cette coloration des compagnons optiques est réelle, je ne vois qu'une explication, qui en soit possible. Cette explication la voici: L'étoile principale à couleur ordinaire sera plus rapprochée de nous et sera entourée jusqu'à une grande distance d'une matière absorbante capable de donner à toute étoile ordinaire, qu'on verra au travers d'elle une coloration exceptionnelle. Cette matière absorbante, dont la configuration, l'étendue et la puissance pourront différer

répondent tellement bien à tout ce que ma théorie prévoit, qu'il serait dommage pour ma théorie du soleil de ne les pas étudier ici tout de suite. Ce sont les étoiles variables et notamment ces étoiles variables les plus nombreuses, qui sont rouges et ont des périodes longues et plus ou moins capricieuses comme Mira.

Nous considérerons brièvement en premier lieu la périodicité des étoiles blanches et jaunes. Cette périodicité est généralement d'une

grandement d'une étoile à l'autre, sera peut-être comparable 1° à celle qui dans notre propre système cause la lumière zodiacale et forme aussi peut-être le fonds lumineux sur lequel on a vu quelquefois la partie non éclairée de Vénus et de Mercure se projeter comme un disque noir (W. NOBLE: J. of the Brit. Astron. Ass. VI p. 77. R. KILLIP: Ibid. p. 121. LEO BRENNER: Ibid. p. 120 et 387); mais elle sera aussi concevable si nous songeons 2° à la vapeur qui résultera de chocs entre météorites, 3° à des comètes nombreuses, 4° à la masse interplanétaire demandée par LEVERRIER pour expliquer le mouvement de Mercure, 5° aux gaz légers qui doivent échapper des atmosphères planétaires (JOHNSTONE STONEY: Astroph. Journ. VII p. 25; XII p. 201), 6° aux électrons et aux particules qui, lancés par des corps radioactifs, par l'électricité et par les rayons lumineux, doivent remplir toujours plus ou moins l'entourage de chaque soleil et 7° à l'hypothèse du Newtonium de MENDELEEF, A. SCHMIDT, SCHAEERLE et COURVOISIER, qui considèrent l'éther comme un gaz matériel infiniment léger emplissant l'univers et formant tout à l'entour des astres des enveloppes interplanétaires condensées, dont le pouvoir réfractif expliquerait (a) la parallaxe quelquefois invraisemblablement petite ou même négative de plusieurs étoiles et (b) une certaine oscillation annuelle dans la hauteur du pôle, que les étoiles TALCOTT révèlent, et qui est indépendante de la longitude de l'observateur. (MENDELEEF: Versuch einer chemischen Auffassung des Weltaethers, Deutsche Uebersetzung im Zeitschrift Prometheus XV 1904 p. 97, 121, 129, 145. A. SCHMIDT: Beiträge zur Physik der freien Atmosphäre 2^{ter} Band 1 Heft p. 18—29 (1906); Die Atmosphäre des Weltraums. SCHAEERLE: Astron. Nachr. 3935. COURVOISIER: Astron. Nachr. N°. 3990 u. 3991) L'enveloppe réfractive que MM. SCHMIDT, SCHAEERLE et COURVOISIER postulent est celle aussi que mon explication demande. Lorsqu'en 1888 l'idée de cette enveloppe me vint pour la première fois, voici ce qu'à propos de son effet réfractif j'en dis déjà alors à la page 25 de mon Essai d'une explication chimique des principaux phénomènes lumineux stellaires (Juillet 1888): „Dans l'étude du mouvement des deux astres, l'enveloppe de l'astre le plus rapproché doit donner une nouvelle complication. Car cette enveloppe en altérant par absorption la couleur et la grandeur de l'astre plus éloigné, change aussi par réfraction sa position dans le ciel. Le déplacement ainsi causé changera avec les couches que la lumière traverse et dépendra par conséquent de la distance angulaire des deux étoiles". Comme la matière peut avoir d'ailleurs une densité presque nulle (comme dans les comètes par exemple) et présenter néanmoins des effets lumineux grandioses, il n'est donc pas trop difficile de comprendre que chaque soleil puisse être entouré d'une enveloppe étendue de matière absorbante, pouvant colorer les étoiles qu'on voit au travers d'elle. On objectera peut-être que cette enveloppe absorbante ne colorera pas seulement le compagnon mais tout aussi bien l'étoile principale elle-même, qui y rayonne au centre. Mais cette objection n'aurait que peu de valeur. Car la lumière du compagnon éloigné est en vertu de cet éloignement infiniment plus faible que celle de l'étoile principale rayonnante au centre de l'enveloppe elle-même. Et puisqu'une même matière doit produire une absorption d'autant plus notable que les rayons qui la traversent sont moins énergiques, il est donc évident que cette absorption affectera beaucoup plus le compagnon que l'étoile principale. C'est pour la même raison que dans sa classification bien connue des étoiles M. VOGEL admet que l'absorption métallique serait beaucoup plus forte dans les étoiles de ses classes II et

régularité parfaite, parce que toutes les étoiles blanches et jaunes, qui sont périodiques, sont généralement aussi des couples spectroscopiques, qui font voir chaque fois un même phénomène lumineux lorsque leurs composantes après chaque révolution reviennent à un même point de leur orbite. Ce phénomène lumineux reproduit chaque fois avec la régularité d'une horloge est dû d'ailleurs à une des deux causes suivantes :

Dans les étoiles blanches, comme Algol, U Cephei et Y Cygni

III que dans les étoiles plus chaudes de sa classe I (Astron. Nachr. N°. 2000). Et c'est encore pour la même raison que dans le spectre solaire les raies d'absorption produites dans l'atmosphère solaire immense ne sont généralement pas plus fortes que les raies telluriques produites dans notre propre atmosphère minuscule (voir la note *t* précédente), ou même dans l'atmosphère encore infiniment plus petite, qui entoure chaque arc électrique dans nos laboratoires (CLERKE: Probl. p. 50). N'oublions pas non plus que puisqu'il y a une enveloppe absorbante autour de chaque étoile, il y en aura donc toujours deux entre tout compagnon coloré et nous. Mon explication de la coloration exceptionnelle des compagnons optiques étant maintenant terminée, elle expliquera aussi peut-être la couleur verdâtre et le spectre d'Uranus et de Neptune, qui nous font voir des rayons solaires ayant parcouru dans l'enveloppe interplanétaire de notre propre système un chemin beaucoup plus long que ceux qui nous arrivent des autres planètes. Mais en tout cas mon explication sera directement applicable aussi aux étoiles doubles physiques, où elle répond très bien aux observations spectrales. Car ces observations ont démontré, que ce qui rend bleu et petit en même temps, le compagnon de β Cygni par exemple, ce n'est pas qu'il appartient au Type 1 à étoiles plus ou moins bleuâtres, mais c'est qu'il accuse une absorption exceptionnelle dans le jaune et l'orange. HUGGINS a. MILLER: Phil. Trans. (1864) p. 431. VOGEL: Bothkamp Beob. 1872 II p. 28. Si ce compagnon était du Type 2 on le verrait bleu tout de même et c'est donc à tort qu'on suppose que tous les compagnons bleus ou verts seraient nécessairement du Type 1. Je sais bien que hormis le couple de β Cygni, les couples de γ Andromedae, de E Bootis, de α Herculis, d'Antares, de 95 Herculis et de γ Delphini ont (ou ont eu) aussi des compagnons du Type 1; mais cela ne prouve aucunement que tous les 667 compagnons bleus ou verts par exemple que j'ai trouvés dans les „Mesures micrométriques d'étoiles doubles, faites à l'Observ. de Lund” publiées en 1876 par M. DUNER, seraient tous aussi du Type 1 et cela ne prouve donc non plus, ce qu'on a cru en pouvoir conclure, que dans tout couple à couleur exceptionnelle l'étoile principale serait toujours plus refroidie que le compagnon plus petit (CLERKE: Probl. p. 276). Cette conclusion m'a toujours semblée invraisemblable. Mais heureusement elle a perdu toute raison d'être, depuis que M. T. LEWIS a prouvé que ces compagnons exceptionnellement colorés ne sont pas plus petits mais plus grands que l'étoile quasi principale (T. LEWIS: Mem. R. Astr. Soc. 56 XXI 1906 Measures of Double Stars. Sir W. and Lady HUGGINS: Astroph. Journ. Jan. 1907 p. 66). Cet heureux résultat répond d'autant mieux à mon idée que l'absorption, qui d'après cette idée doit colorer l'étoile la plus éloignée doit aussi amoindrir son éclat en même temps. Les compagnons fortement colorés seront donc nécessairement très petits. Et c'est ainsi par exemple, que dans les 17 couples que M. FLAMMARION a distingués dans son Catalogue comme remarquables par la belle couleur du compagnon, celui-ci n'est en moyenne que de la 7.5^{me} grandeur. Dans les couples spectroscopiques la coloration exceptionnelle fera défaut parce que dans ces couples serrés l'enveloppe absorbante de l'étoile rapprochée sera toujours tout près du compagnon incandescent plus éloigné et peu capable par conséquent, comme je l'ai expliqué plus haut, à produire une absorption notable. On pourra trouver une ébauche de ma théorie des Novae et des Nébuleuses dans le Numéro de Décembre 1895 de „Knowledge” p. 278.

par exemple, cette cause est toujours une éclipse. Mais dans les étoiles jaunes, où, comme dans notre soleil, la photosphère est voilée par une mince nappe jaunissante et brumeuse, qui retient la plus grande partie de leur éclat *y*), il y a outre des éclipses éventuelles encore une autre cause tout aussi efficace, qui en certaines parties de leur orbite les fera changer d'éclat. Cette cause, que KLINKERFUES a déjà étudiée, est la déformation des photosphères de ces étoiles, lorsque dans une orbite très excentrique, leurs composantes, dont l'une est obscure peut-être, se rapprochent et s'éloignent du périastre. Si, comme dans le couple de Delta Cephei, les composantes sont au périastre même 3 fois plus proches qu'à l'apastre *z*), ce rapprochement produira par un effet de marée *a*) un renflement photosphérique, qui en étirant et en déchirant le voile mince, mais très obscurcissant, qui entoure la photosphère complètement à l'apastre, brillera alors, comme une facule immense, avec un éclat plus grand que jamais. Mais cet éclat n'aura qu'une courte durée. Car à mesure qu'après le passage au périastre la distance des composantes augmentera de nouveau, le renflement lumineux diminuera de même et la photosphère, qui au périastre était partiellement débarrassée de son voile obscurcissant en sera complètement recouverte de nouveau à l'apastre.

Telle me paraît être l'explication du cas de Delta Cephei et de ses quarante congénères, qui toutes sont jaunes et dont celles, qui

y) „PICKERING finds that the intrinsic lustre of the sun exceeds its apparent lustre four and two third times, the disparity according to VOGEL is about two fold.... The darkening effect is produced in the immediate neighbourhood of the photosphere.... The assumption of a solar analogue to a London fog is certainly a daring expedient, yet none more satisfactory is at present available". CLERKE: Probl. p. 70—72. The Photosphere and its dusky veil. Voir aussi plus haut la note *d* à la page 36.

z) BELOPOLSKY: Astron. Nachr. N°. 3257, 3338; Astroph. Journ. I p. 160, 263.

a) Déjà en 1895 Mr. EDDIE s'est demandé si le maximum de Delta Cephei ne serait pas un effet de marée. „Might not tidal disturbances and bodily tides in the bright member excited upon its closes approach to the ruling dark body at and near periastron explain the stars rapid rise in brillancy and its periodic variability?" M. EDDIE s'est borné à poser la question, mais il n'a fait aucune tentative d'expliquer comment la marée périastrique rehausserait l'éclat de l'étoile. (L. A. EDDIE: Astroph. Journ. III p. 227). Cette tentative, pareille à la mienne, a été bien faite par KLINKERFUES et WILSING. „WILSING bemerkt im Verfolg seiner Untersuchungen über die Veränderlichkeit der Sterne unter der KLINKERFUES'schen Annahme, dass die veränderlichen enge Doppelsterne sind, deren Atmosphären durch die gegenseitige Anziehung deformirt werden, dass die hierbei gewonnenen Resultate auch auf die neuen Sterne anwendbar sind.... Es wird in diesem Falle zur Zeit des Periastrons die Oberfläche des mit einer stark absorbirenden Atmosphäre umgebenen Sternes zum Theil von letzterer freigelegt, so dass also zunächst eine beträchtliche Aufhellung des continüirlichen Spectrums erfolgt". (WILSING: Astron. Nachr. Bd. 124 p. 121. SCHEINER: Die Spectralanalyse der Gestirne p. 304).

ont été spectroscopiquement étudiées, ont révélé des orbites très allongées. L'amplitude du changement d'éclat ne sera pas nécessairement constante. Car si la photosphère de ces étoiles vibre incessamment comme celle du soleil, cette vibration interfêrera avec la vibration périastrique, qu'elle pourra renforcer ou affaiblir. De là peut-être l'inconstance dans les changements d'éclat que R Trianguli, X Cygni, W Virginis et T Monocerotis par exemple ont fait observer. Il n'est pas surprenant d'ailleurs, que parmi les couples spectroscopiques il y en ait aussi un grand nombre, qui, quoique jaunes, comme Capella, Epsilon Librae, Chi Draconis et Eta Pegasi par exemple, ne sont pas variables. Car si ces couples ont des orbites peu allongées ou très étendues, inclinées sur le rayon visuel, elles n'ont rien, qui puisse les faire changer d'éclat.

L'explication, que je viens d'esquisser de la variabilité particulière des étoiles jaunes, avec leurs périodes courtes et régulières et avec leur changements continus, a le grand avantage de nous faire comprendre tout de suite pourquoi une variabilité pareille n'a jamais été observée dans une étoile blanche. Car bien qu'au périastre les étoiles blanches ne se déformeront pas moins que les étoiles jaunes et produiront ainsi ces irrégularités, qu'on a souvent observées dans les éclipses du genre d'Algol *b*), cette déformation, à défaut complet d'un voile à déchirer, ne changera jamais rien à l'éclat de l'étoile.

Il est donc clair, qu'à l'exception du cas de Beta Lyrae, où tout comme dans d'autres variables géminides, la grande proximité des composantes cause d'une manière continue des phénomènes exceptionnels, les étoiles blanches elles-mêmes ne sont jamais variables.

Car s'il n'y a que des éclipses, qui les rendent périodiques, ces étoiles elles-mêmes ne changent jamais d'éclat.

Mais il ne s'agit pas seulement de comprendre pourquoi les étoiles blanches ne montrent jamais la variabilité particulière des étoiles jaunes avec leur changement continu, nous voudrions savoir aussi pourquoi les étoiles jaunes ne montrent jamais les éclipses du genre d'Algol. Or voilà une particularité, qu'on a toujours considérée comme incompréhensible (*c*), mais, qui me paraît cependant explicable de la manière suivante.

Remarquons d'abord que les couples spectroscopiques jaunes ont généralement beaucoup moins de chance de nous faire voir des

b) Ces irrégularités ont été observées par ex. dans les éclipses de S Cancrî, Lambda Tauri, U Cephei, U Ophiuchi, R Arae, Y Bootis et W Delphini. (CLERKE: Probl. 306—315).

c) „Algol variables, without any recognised exception, show first-type spectra. They are either Helium or Sirian stars. This specialty is unaccountable”. CLERKE: Probl. p. 316

éclipses que les couples blancs. Car les couples jaunes, ayant généralement des périodes de révolution beaucoup plus longues, sont beaucoup moins resserrés.

C'est ainsi par exemple que les couples dont M^{lle} CLERKE a enregistré la période dans la Table II à la fin de ses „Problems in Astrophysics” ont une période moyenne de 149 jours, s'ils sont jaunes, mais de 5 jours seulement s'ils sont blancs. Et c'est ainsi aussi que les couples jaunes du groupe de Delta Cephei ont une période moyenne de plus de 8 jours, tandis que dans les couples blancs du groupe d'Algol cette période moyenne est 2 fois plus courte. La couleur blanche des couples les plus resserrés se conçoit d'ailleurs plus ou moins. Car leur resserrement doit entraver leur refroidissement, ce qui les empêchera de jaunir. Or, comme des éclipses seront d'autant plus fréquentes que les couples seront plus resserrés, leur fréquence plus grande dans les couples blancs, qui généralement doivent être plus resserrés et ont des composantes plus volumineuses en outre, n'a rien de bien surprenant. (Voir la note *v* à la page 99).

Si nous comprenons bien de la sorte qu'une étoile jaune ne saurait être que rarement éclipsée, cela ne prouve pas encore qu'une telle éclipse ne se présentera jamais. Mais une telle éclipse éventuelle ne ressemblera alors que bien peu au phénomène d'Algol. Car ayant lieu de préférence lorsque près du périastre d'une orbite allongée les composantes sont aussi rapprochées que possible, l'éclipse ne produira qu'un court obscurcissement secondaire en comparaison du grand changement d'éclat continu qu'alors la marée périastrique doit produire. Ne verrait-on pas l'effet de ces éclipses éventuelles dans les minima et maxima secondaires, que les courbes des étoiles jaunes à courte période font observer quelquefois et qui ont parfois une durée tellement courte que dans W Gémeaux par exemple ils ont pu échapper aux observations de M. LAU, mais ont été clairement constatés par M. LUIZET (*d*)?

Ce sont les mesures de la vitesse dans le rayon visuel, qui devront trancher cette question.

Si ces mesures, contrairement à mon attente, viendraient confirmer les résultats déjà obtenus par M.M. BELOPOLSKY et WRIGHT quant au minimum secondaire d'Eta Aquilae (*e*) et si elles pouvaient démontrer de même que les autres minima secondaires des

d) H. E. LAU: Bull. de la Soc. Astr. de France Février 1906 p. 95. M. LUIZET: Ibid; Mai 1906 p. 227.

e) BELOPOLSKY: Astroph. Journ. I p. 160. VI p. 393. W. H. WRIGHT: Astroph. Journ. IX p. 59.

étoiles jaunes périodiques ne répondent jamais à quelque éclipse possible, il faudrait en conclure que dans ces couples jaunes la grande distance des composantes est déjà une raison suffisante qui les empêche de nous faire voir des éclipses et leurs minima et maxima secondaires demanderaient alors une autre explication. Ces minima et maxima secondaires pourraient résulter peut-être de l'ébranlement de la photosphère, qui après son passage au périastre, où elle était déformée au plus haut degré, reprendrait sa forme normale non d'une manière continue, mais d'une manière vibrante après un premier retrait trop grand *f*).

§ 14. *Les étoiles rouges en général.*

La périodicité des étoiles jaunes a été mémorée ici en passant, parce qu'elle me semble donner à l'hypothèse déjà généralement adoptée d'ailleurs d'un mince voile brumeux obscurcissant et jaunissant ces étoiles, une belle confirmation.

Or si les étoiles blanches, qui sont les plus chaudes, n'ont pas un tel voile brumeux et si les étoiles jaunes, qui sont moins chaudes, en ont un qui très mince les obscurcit déjà et les colore, les étoiles rouges, qui sont moins chaudes encore, en auront un plus épais, qui les obscurcira et les colorera encore plus.

C'est ce voile refroidi brumeux et épais qui rend les étoiles rouges variables. C'est ce qui me reste à expliquer dans ce Mémoire.

Comme la variabilité des étoiles rouges, bien loin de présenter la régularité d'une horloge est généralement plus ou moins capricieuse, il est impossible de l'attribuer, comme celle des étoiles blanches et jaunes à une révolution orbitaire quelconque. Dans le cas de Mira la non-existence d'une telle révolution a été d'ailleurs

f) La courbe onduleuse, qui d'après M. YENDELL représente le changement d'éclat de S Flèche, répondrait bien plus ou moins à cette idée de la photosphère déformée restaurant sa forme première en vibrant. (YENDELL: Pop. Astron. II p. 207. CLERKE: Probl. p. 326 fig. 24. Col. E. E. MARKWICK: Journ. of the Br. Astr. Ass. 1907 p. 210). Mais d'après M. H. E. LAU, dont la communication à la Soc. Astron. de France, à la page 92 du Bulletin de Février 1907, ne m'était pas encore connue lorsque j'écrivis ce paragraphe, l'inflexion secondaire de la courbe de S Flèche (fig. 31) s'explique par le passage du satellite devant l'étoile principale. Les mesures spectrographiques faites à l'Observatoire Lick montrent en effet, qu'à cette phase la vitesse radiale de l'étoile est nulle pour devenir ensuite négative" „la variation principale de S Flèche est due aux marées du satellite obscur". La courbe de lumière de l'étoile jaune S Flèche, si différente de celle d'Algol, nous fait donc voir tout de suite pourquoi, ainsi que je l'ai expliqué dans le Texte, il faut qu'une étoile éclipsee soit blanche pour pouvoir, nous montrer tout simplement le phénomène d'Algol.

spectroscopiquement démontrée par M.M. CAMPBELL et STEBBINS *g*). Les étoiles rouges changent donc d'éclat d'une manière spontanée. Et comme ce ne sont qu'elles qui présentent une variabilité pareille, cette variabilité doit résulter d'un mécanisme, qui dans toutes les autres étoiles fait défaut. C'est en cherchant à découvrir quel est ce mécanisme, que je suis arrivé à ma théorie du soleil (*h*) et à la conviction, que le même mécanisme, qui dans le soleil cause la périodicité des taches, cause aussi dans les étoiles rouges la périodicité de leur éclat. Or comme l'analogie de ces deux périodicités a déjà été très souvent démontrée *i*) leur explication identique est cause que mes théories du soleil et des étoiles rouges variables se renforcent et se soutiennent mutuellement. Voilà pourquoi j'ai cru devoir terminer ce Mémoire par l'étude du phénomène de Mira.

Pour faciliter cette étude nous considérerons premièrement les étoiles rouges en général.

Ce qui distingue surtout les étoiles rouges, c'est qu'en comparaison des étoiles blanches et jaunes leur température est moins élevée. Cette température moins élevée se voit démontrée par quelques particularités de leur spectre:

Citons 1° leurs bandes cannelées et leurs raies unilatéralement ombrées, qui indiquent que dans les atmosphères de ces étoiles la température a déjà suffisamment baissé pour y rendre beaucoup plus évidente que dans les autres étoiles la présence de combinai-

g) C'est à tort par conséquent que M. PAUL GUTHNICK a tâché d'appliquer l'idée de KLINKERFUES (voir la note *a* précédente) au phénomène de Mira (Nova acta. Abh. d. Kais. Leop. Carol. Deutschen Ak. d. Naturforscher Bd. 79: N°. 2 p. 258—261. 1901) CAMPBELL: Astroph. Journ. IX Jan. 1899. J. STEBBINS: Astroph. Journ. XVIII Dec. 1903. The spectrum of Omicron Ceti p. 350—359. Dans un couple spectroscopique toute étoile rouge pourra fonctionner comme l'étoile jaune de Delta Cephei. Et c'est ainsi probablement que l'étoile U Sagittarii, bien que fortement orangée, change d'éclat avec la précision d'une horloge (CLERKE: Probl. p. 325). Il n'est pas impossible d'ailleurs que quelques étoiles rouges soient éclipsées aussi à la manière d'Algol. C'est ainsi par exemple qu'à propos de l'étoile R Scuti, M. MARKWICK nous informe, que M. TURNER lui a écrit „that the irregularities in the light of this star might be due to two causes, combined: *a*) That which produces the ordinary variation observed in the so-called long period stars; and *b*) An eclipse of the Algol Type. This is, dit M. MARKWICK, the first occasion, so far as I am aware, when long period and Algol variation have been brought together (in theory), to account for certain apparently irregular fluctuations of light" (Col. E. E. MARKWICK: Journ. of the Brit. Astr. Ass. July 1907 Variable Star Section; Interim Report N°. 18 p. 386).

h) Verklaring van de veranderlijkheid der roode sterren Mei 1888. Voir aussi la note *i* à la page 15 ici plus haut.

i) WARGENTIN et PIGOTT ont déjà pensé à cette analogie (R. WOLF: Handbuch der Astronomie, ihrer Geschichte und Litteratur Bd. 4 p. 555). WOLF: Neue Untersuchungen, Mitth. d. Naturf. Ges. 1852 p. 249. GORE; Proc. Royal Irish Ac. July 1884. CLERKE: Probl. p. 362. Voir aussi les notes *n*, *o* et *d* aux pages 119 et 124.

sons chimiques, telles que par exemple des carbures d'hydrogène ou des oxydes métalliques, comme ceux du fer et du titane *j*). La forte absorption dans la raie bleue du calcium est aussi un indice d'un moindre réchauffement *k*).

Citons 2° les raies spectrales brillantes, que ces étoiles nous font observer si souvent, qui sont même permanentes dans les étoiles du Type 4, et qui, bien loin d'être en désaccord avec une température peu élevée, doivent en résulter au contraire, parce qu'on y voit la luminescence des procès chimiques que tout refroidissement doit causer *l*). Il est fort bien possible d'ailleurs, que ce ne sont pas seulement des raies, mais tout aussi bien des bandes cannelées que le spectre des étoiles rouges nous montre renversées et lumineuses dans les espaces, qui séparent les bandes obscures.

Cette possibilité a été le point de départ de l'hypothèse météorique de M. LOCKYER, qui vit dans le spectre des étoiles rouges du Type 3 de SECCHI les mêmes bandes lumineuses bleue et verte qu'on voit aussi dans le spectre des comètes *m*). KEELER se vit aussi forcé d'admettre, que dans le spectre d'Alpha Herculis par exemple les intervalles, qui séparent les bandes obscures, sont toujours beaucoup plus lumineux que le reste du spectre continu et y indiquent réellement un surcroît d'émission *n*). Dans sa classification bien connue des spectres stellaires M^{lle} MAURY parle toujours avec conviction des bandes lumineuses dans les spectres

j) ZÖLLNER: Phot. Unters. p. 243. ANGSTRÖM; Recherches sur le spectre solaire Upsala 1868. N. LOCKYER: Phil. Trans. 1874 p. 492; the Meteoric Hypoth. 1890 p. 342—347. VOGEL: Astr. Nachr. N°. 2000. SCHEINER: die Spectralanal. d. Gestirne p. 306, 320. CLERKE: Probl. p. 183, 210. HALE, ADAMS and GALE: Astroph. Journ. XXIV Oct. 1906 p. 205.

k) CREW: Astroph. Journ. XXII 1905 p. 201. HALE, ADAMS and GALE: loc. cit. p. 205.

l) Voir plus haut p. 26—31.

m) LOCKYER: The meteoritic hypothesis p. 348 etc. „It suddenly flashed upon me (dit-il p. 349) that the 517 recorded by DUNER in his observation of Alpha Orionis as the edge of a dark band, could be nothing but the edge of the brightest band of carbon, the bright cometary band par excellence; and therefore that these so called stars not only resemble comets in their absorption flutings, but in their radiation flutings as well (Dr. COPELAND arrived at the same conclusion in 1886 in the case of a new star in Orion (Monthly Not. 46 p. 112)). „The dark band of DUNER is a contrast band”. „In stars of Class III a carbon was first traced by the blue fluting and afterwards by the one at 517. In both cases these flutings, though recorded, were not recognised by previous observers. The difficulties of the stellar observations must always be borne in mind. It will also be abundantly clear that a bright fluting added to a continuous spectrum may produce the idea of a bright line at the sharpest edge to one observer, while to another the same edge will appear to be preceded by an absorption band”.

n) KEELER: Astroph. Journ. VI p. 424. „It is impossible to avoid the conclusion that the edges of the zones bordering on the dark bands are bright — much brighter, that is, than the average continuous spectrum — and that they are due to a real predominance of emission at the regions of the spectrum in which they occur”.

du type 3 o). Et M. STEBBINS, qui a fait du spectre de Mira une étude approfondie, nous assure de même, qu'entre leurs bandes obscures les spectres de Mira et d'autres étoiles du type 3 de SECCHI se montrent beaucoup plus lumineux que là où ces bandes font défaut *p*). Quant à l'identification de ces bandes lumineuses, qu'on a comparées, dit-il à celles du carbone dans l'arc électrique, M. STEBBINS signale les deux coïncidences suivantes: Si à la longueur d'onde 5165,9, où l'on voit commencer dans toutes les étoiles du Type 3 une bande obscure diminuant vers le rouge, c'est en réalité une bande lumineuse diminuant vers le violet, qui s'y fait observer, cette bande lumineuse est identique avec la 3^{me} bande du carbone, qu'ont mesurée M. M. KAYSER et RUNGE. Et c'est ainsi aussi que la 4^{me} bande du carbone à la longueur d'onde 4737,2 paraît correspondre avec une bande lumineuse dans le spectre d'Alpha Herculis *q*). La superposition de bandes lumineuses pareilles expliquerait dans le spectre du type 3, pourquoi l'absorption s'y montre si souvent brusquement arrêtée du côté du violet *r*). Quoique pour simplifier M. STEBBINS ne parle généralement que de bandes obscures, il n'en pense pas moins toujours aux bandes lumineuses aussi; et c'est ainsi par exemple, qu'après avoir décrit, comment le spectre continu de Mira est affaibli durant le minimum surtout entre les longueurs d'onde 4300 et 5000, très prudemment il ajoute, que

o) ANTONIA C. MAURY: *Annals of Harvard College Observatory. Spectra of bright stars, as a part of the HENRY DRAPER Memorial* (1897). M^{lle} MAURY parle de ces bandes lumineuses aux pages 38, 40, 42, 43 et 46 de son Mémoire. Voici par ex. ce qu'elle en dit à propos de son groupe XV (Arcture). „The narrow bright bands 5436,8 to 5445,2 and 5156 to 5167, which in stars of the third type form the borders of absorption bands are clearly seen. These are faintly visible in the sun". A propos de son groupe XVIII (Alpha Orionis) elle remarque: „The bright band 4556 to 4586 is stronger than the band 4470 to 4525, but not so strong as the band 4614 to 4648.... They are all bordered by distinct bright bands, having wave lengths 4750 to 4762, 4949 to 4954, 5156 to 5168 and 5437 to 5445 respectively".

p) JOEL STEBBINS: *Astroph. Journ.* XVIII; The spectrum of α CETI p. 357: „The prominent bands in the spectrum of Mira have been considered by some observers as a series of dark bands, with sharp edges towards the violet and shading off towards the red. Others think them to be bright flutings, like those of the arc spectrum of carbon. For convenience, they will be considered in this paper as dark absorption bands. On the plates of α Ceti and other third-type stars the bright portions of the banded spectrum are certainly brighter relative to the region above $H\gamma$, where there are no bands, than are the corresponding portions of the spectrum of a solar type star. However the dark portions are fainter than the same places in the solar type of spectrum".

q) STEBBINS: loc. cit. p. 360.

r) LOCKYER: *the Meteoritic Hypoth.* p. 410. General Discussion of DUNERS Observations.

ce changement d'intensité pourrait être attribué aussi à l'extinction de bandes lumineuses éventuelles *s*).

Quant à moi je suis fermement convaincu, que M. LOCKYER a eu raison et que ces bandes lumineuses existent. Elles rattachent le Type 3 au Type 4 de SECCHI. Si les bandes obscures du Type 4 résultent du renversement lumineux de bandes, qui sont plus ou moins lumineuses dans le Type 3, la parenté évidente de ces deux Types s'explique *t*) et fait comprendre aussi, comment ces deux types se transformeront l'un dans l'autre. Car si dans les étoiles rouges du Type 3 des raies et des bandes hydrocarbonées chimiquement luminescentes sont causées par la combinaison de leurs principes carboniques avec l'hydrogène toujours présent, il est clair que, lorsqu'à force de se combiner tout l'hydrogène libre aura été épuisé, ces luminescences devront cesser. Dans le spectre de ces étoiles on verra dès lors, que l'hydrogène libre y a complètement disparu et que l'absorption hydrocarbonée, qui y était masquée autrefois tant que la matière absorbante était luminescente en naissant, y produit distinctement maintenant ses bandes cannelées obscures. Or voilà justement ce que les étoiles du Type 4 nous font observer *u*). La transformation du Type 3 en Type 4 aura lieu d'ailleurs d'une manière soudaine et elle ne produira pas ces spectres intermédiaires

s) STEBBINS: loc. cit. p. 363. Dans les photographies 3 et 4 de la Planche XV nous voyons ces bandes lumineuses éventuelles ressortir clairement. On aurait tort d'ailleurs de s'attendre toujours à une coïncidence parfaite des bandes d'émission stellaires avec celles de nos laboratoires ou avec celles des bandes d'absorption. Car dans les étoiles rouges les raies brillantes de l'hydrogène sont là pour nous convaincre, que dans ces étoiles il y a une cause pas encore reconnue, qui déplace souvent fortement les raies d'émission (STEBBINS: loc. cit. p. 368).

t) Le spectre de R Geminorum, étudié par VOGEL (Astron. Nachr. Bd. 84 p. 120) est très instructif sous ce rapport. „VOGEL macht darauf aufmerksam, dass die Wasserstofflinien und D_2 nicht hell erschienen, dass aber eine bemerkenswerthe Uebereinstimmung der hellen Linien mit den dunklen der Classe III *b* herrsche. Eine solche Uebereinstimmung ist auch thatsächlich vorhanden und es würde aus derselben folgen, dass die Linien derjenigen Gase, also auch der Kohlenwasserstoffe, welche auf den Sternen des Typus III *b* die starke Absorption verursachen, hell auftreten, dass also eine Umkehr des Spectrums III *b* vorliegt". (SCHEINER: Die Spectralanalyse der Gestirne p. 329). Ce renversement bien constaté des raies et des bandes obscures du Type 4 ne paraît cependant guère probable à Mr. SCHEINER. Car selon lui ce renversement demanderait une température élevée, qui serait incompatible avec l'existence des carbures d'hydrogène. Mais cette incompatibilité n'existe pas du tout si nous admettons que ces carbures sont luminescents, comme ils le sont sans doute dans les comètes, où d'après M. SCHEINER lui-même (loc. cit. p. 234 et 235) ces carbures sont lumineux à des températures très basses.

u) SECCHI: Sugli spettri prismatici delle stelle fisse 1867 2^{me} partie p. 9. VOGEL: Publ. d. Astroph. Obs. zu Potsdam IV 1^{er} Theil. DUNER: Sur les Etoiles à spectres de la troisième Classe 1884. ESPIN: Monthl. Not. 58 p. 443 1898. DUNER: Astroph. Journ. IX p. 119. HALE and ELLERMAN: Astroph. Journ. X p. 87.

que Pechûle demandait *v*); car elle s'effectuera tout d'un coup lorsque l'hydrogène venant à manquer l'obscurité des bandes d'absorption cessera d'être masquée par leur luminescence *w*).

L'absorption métallique est dans les types 3 et 4 tellement semblable que M. SCHEINER en a déduit que la différence des deux types est uniquement due aux combinaisons chimiques différentes que leurs atmosphères contiennent *x*). La ressemblance spectrale des deux types est quelquefois frappante. En comparant par exemple les photographies, que M.M. HALE et ELLERMAN ont publiées des spectres de l'étoile 132 Schjellerup du type 4 et de Mu Geminorum du type 3, on voit tout de suite qu'en certaines parties de leurs spectres ces deux types sont quelquefois à peu près identiques *y*).

Remarquons encore que, d'après les dernières recherches de M. DUNER et de MM. HALE et ELLERMAN, toutes les étoiles du Type 4 nous montrent toujours des raies spectrales brillantes *z*). Tant il est vrai, qu'à mesure que dans les astres la température diminue, la luminescence *y* augmente jusqu'à devenir un phénomène permanent. Mais les étoiles rouges ont encore d'autres particularités spectrales, qui indiquent de même, que leur température est moindre que celle des étoiles blanches et jaunes.

Citons 3° le grand nombre de raies, qu'elles ont en commun avec les taches solaires *a*). Or voilà une particularité, qui d'après ma théorie démontre que les étoiles rouges sont moins chaudes que le soleil. Car si elles nous font voir au dessus de la photosphère la matière, qui dans le soleil *y* est encore cachée au dessous, cela prouve que leur lieu géométrique photosphérique s'est rapproché

v) PECHÛLE: Expédition Danoise pour l'Observ. du Passage de Vénus 1882 p. 25. LOCKYER: the Met. Hypothesis p. 346.

w) Si les combinaisons, dont il s'agit ici, étaient endothermes, le rôle des types 3 et 4 dans leur transformation et leur parenté serait interverti. Cette intervention n'est cependant guère probable. Car apparemment les étoiles toujours peu lumineuses et très rouges du type 4 ne sont pas plus chaudes, mais plus froides que celles du type 3.

x) J. SCHEINER: Die Spectralanalyse der Gestirne p. 321.

y) HALE: Astroph. Journ. IX p. 273. „These photographs (Plate V) serve to confirm the common belief in the essential similarity of the two types of red stars. LOCKYER: Spectrosc. Compar. of Metals (1907) p. 22. HALE, ELLERMAN and PARKHURST: Decennial Public. of the Univ. of Chicago VIII p. 253 (1903).

z) DUNER: Astroph. Journ. IX p. 119. HALE and ELLERMAN: Astroph. Journ. X p. 87. SECCHI avait déjà entrevu ces raies brillantes dans le spectre des étoiles de son type 4. (SECCHI: les Etoiles I p. 99). Ces raies brillantes ont été observées aussi par MM. KEELER et CAMPBELL (Astroph. Journ. X p. 110).

a) SCHEINER: Publ. d. Astroph. Obs. zu Potsdam 7 (1895) p. 332. HALE a. ADAMS: Astroph. Journ. XXIII (1906) p. 400. ADAMS: Astroph. Journ. XXIV p. 69.

du centre et que par conséquent, comme je l'ai déjà expliqué plus haut, leur température a baissé *b*).

Quoique le refroidissement des étoiles, en vertu de la contraction photosphérique qu'il cause, doive compliquer les spectres stellaires lorsqu'à partir du type 1 le plus simple, les types 2, 3 et 4 s'en développent, ce même refroidissement produira aussi l'effet inverse. Car en vertu de la condensation physique et chimique qu'il engendre il y aura aussi des substances, qui disparaîtront. J'en prends à témoin l'hydrogène, qui avec ses raies fortement élargies abonde dans le type 1, a déjà beaucoup diminué dans le type 2, n'est plus que faiblement visible dans le type 3 *c*) et n'existe plus du tout dans le type 4.

Les considérations, que je viens de développer quant à l'évolution des étoiles rouges, ne sont qu' hypothétiques et erronées peut-être. Mais heureusement je n'en ai nullement besoin pour expliquer la périodicité de ces étoiles. Pour arriver à cette explication:

Citons 4° l'extinction du violet et du bleu dans le spectre des étoiles rouges, extinction qui répond à leur couleur et à leur éclat généralement médiocre. Bien que cette extinction résulte de leur refroidissement, il est impossible cependant de l'attribuer à un refroidissement tellement grand que leur photosphère n'en serait plus chauffée que jusqu'au rouge. L'abondance de la vapeur de fer et de titane dans leurs atmosphères nous empêche d'y admettre un refroidissement aussi grand.

Ce qui rougit les étoiles rouges et les dépouille de la majeure partie de leur éclat; c'est ce qui, à un moindre degré, jaunit aussi le soleil et ses jaunes congénères, c'est une brume, qui, au dehors de la photosphère trouble l'atmosphère de ces étoiles. Cette brume est d'autant plus intense que la température est moins élevée. Dans les étoiles les plus chaudes du type 1 elle n'existe même pas, dans les étoiles moins chaudes du type 2 elle n'est encore que légère, mais dans les étoiles refroidies du type 3 et surtout dans celles plus refroidies encore du type 4, cette brume est un brouillard très épais *d*.)

b) Voir plus haut p. 99 et 100.

c) Il n'est même pas impossible, que dans le type 3 l'hydrogène ait déjà complètement disparu dans les couches très refroidies tout à fait extérieures. En ce cas on comprendrait facilement pourquoi, lorsque l'hydrogène, qui n'y existerait plus que dans les couches plus profondes, deviendrait lumineux, une de ses raies brillantes y serait toujours masquée, comme M^{lle} CLERKE l'admet, par l'absorption du calcium s'élevant plus haut. (CLERKE: Probl. p. 226 et 350). Voir cependant l'objection de M. STEBBINS (loc. cit. p. 375).

d) CLERKE: Probl. p. 215. „Their inconspicuousness probably arises, not from any

Or nous savons, que toute brume arrête les rayons bleus et violets, qui la traversent, et que par conséquent tout objet blanc, que nous voyons au travers d'elle, rougit et diminue d'éclat. C'est ce que nous fait voir aussi le soleil, chaque fois qu'à l'horizon ses rayons ont à traverser une couche extraordinairement puissante de brume.

Cette coloration en rouge ne dépend nullement d'ailleurs de la composition chimique de la brume, elle ne dépend que de la petitesse des particules condensées flottantes *e*). C'est ainsi par exemple que 1° la poussière volcanique de Krakatau nous a fait voir aussi une coloration rouge très forte et que 2° toute brume pourra perdre son effet rougissant lorsque ses particules deviennent trop grosses. En observant le soleil à travers un jet de vapeur s'échappant d'une soupape de sûreté FORBES ne vit le soleil tout rouge que tout près de la soupape, car plus loin, où les gouttelettes d'eau condensée étaient plus grosses la coloration n'avait plus lieu *f*). En expérimentant avec le nuage bleu actinique du jodure d'allyle TYNDALL a fait une observation analogue *g*). Nous savons aussi que c'est surtout la brume à l'horizon, qui rougit le soleil, car le plus souvent une brume plus haute ne le jaunit qu'à peine. J'ai rappelé ici ces observations, parce qu'elles semblent indiquer, comment il est possible, que capricieusement quelques étoiles rouges, comme S Herculis, T Ursae Majoris et Chi Cygni par exemple, se voient de temps en temps décolorées *h*).

deficiency of intrinsic light-power, but from the overwhelming absorptive action of their atmospheric envelopes. Thus only a small part of their original radiations attain to outer space; none of the shorter wave-lengths escape; the spectra are cut off short a little below the place of the blue calcium line. Intense visual redness is a consequence" Voir aussi loc. cit. p. 253.

e) Cette coloration, expliquée mathématiquement par CLAUSIUS et Lord RAYLEIGH, a été étudiée expérimentalement par ABNEY, LANGLEY et PERTNER (ARRHENIUS: *Lehrbuch der Kosm. Physik*, pag. 852—878) L'explication de Lord RAYLEIGH est d'autant plus importante, qu'elle rend compte aussi de la cause principale de la couleur bleue du ciel. Les nuages bleus actiniques de TYNDALL ont aussi beaucoup contribué à élucider ces colorations (TYNDALL: *Wärme als Art der Bewegung* (1871) p. 647).

f) ARRHENIUS: loc. cit. p. 876.

g) TYNDALL: loc. cit. p. 664.

h) CLERKE: *Probl.* p. 253—255. Observations at Sir CUTHBERT PEEK's Observatory. A l'observatoire de Harvard College on a photographié aussi le spectre de deux étoiles, qui, quoique blanches et non dépourvues de rayons bleus, appartenaient du reste au type 4. (CLERKE: *Probl.* p. 221 et 258). La décoloration des étoiles rouges au maximum trouvera une autre explication plus loin. (p. 120.)

§ 15. *Fonctionnement du mécanisme de la périodicité. Le voile rougissant extérieur alternativement plus opaque et plus transparent, à mesure que, tout comme la photosphère du soleil, il est tour à tour plus riche et plus pauvre en nuages.*

Si la couleur des étoiles rouges doit être attribuée à une nappe brumeuse, qui voile et obscurcit leur photosphère, la variabilité de ces étoiles s'explique aisément. Car si cette nappe est une masse considérable de vapeur saturée que la condensation n'a embrumée qu'à la surface, cette nappe relativement refroidie a absolument la même constitution physique que la nappe photosphérique incandescente du soleil et comme cette dernière, ainsi que je l'ai expliqué dans la Première Partie de ce Mémoire, est tantôt mince et riche en nuages et tantôt volumineuse et pauvre en nuages, il en sera de même de la nappe, qui nous occupe maintenant et sans que j'aie besoin de réitérer tous les détails de mon explication d'alors, nous pourrions donc admettre, que cette nappe sera elle aussi alternativement riche et pauvre en nuages.

Mais comme ces nuages dans la nappe brumeuse, bien loin de fonctionner comme ceux qui dans la nappe photosphérique du soleil émettent la lumière de l'astre, fonctionnent au contraire comme un voile obscurcissant, leur changement intermittent en épaisseur aura un effet autrement grandiose. Car en donnant au voile qui obscurcit les étoiles une opacité intermittente, il causera périodiquement le changement de leur éclatⁱ⁾. Ce n'est par conséquent qu'un phénomène météorologique passager et insignifiant dans l'atmosphère des étoiles rouges variables, qui les fait changer souvent énormément en grandeur^{j)}. La grande masse de l'étoile n'y prend

i) CLERKE: Probl. p. 253. „Long period variables are characteristically red, and redness in stars appears to be rarely a fixed or stable property. It might be compared to an external covering capable of alteration in opacity, or even of entire removal and connected in its effective action with complex more or less unsettled conditions". Si j'en excepte ces „unsettled conditions" mon explication paraît très bien répondre à l'idée de M^{lle} CLERKE. Mais si cette explication est juste M^{lle} CLERKE se trompe en raisonnant comme il suit (loc. cit. p. 151): „We learn that a spotted condition in the sun matches a phase of strong luminosity in the stars; and are hence led to infer that the sun radiates most powerfully when his disc is most maculated". Ce raisonnement serait juste si la variabilité résultait d'un changement dans le rayonnement photosphérique; mais si elle résulte d'un changement dans l'opacité d'un voile extérieur, ce raisonnement manque d'à propos. Je ne crois pas d'ailleurs que les observations aient jamais fourni la moindre preuve que l'éclat du soleil serait au maximum plus grand qu'au minimum. Voir aussi ma note u à la page 129.

j) Ce changement est énorme par exemple dans les étoiles Mira, Chi Cygni, U Orionis, R Hydrae, S Urs. Maj., T Urs. Maj., V Delphini, R Cygni, R Andromedae, R Coronae,

pas la moindre part et sous son voile tour à tour plus opaque et plus transparent l'étoile brille invariablement comme toutes les étoiles fixes k).

Appliquons maintenant cette idée à l'étude plus détaillée du phénomène de Mira l). Cette étude ressemblera complètement à celle, qui nous a déjà expliqué la périodicité des taches et pourra être élucidée par la même figure, qui, parce qu'on y voit les nuages en noir, s'adopte même encore mieux au cas de Mira.

R Serpentis et R Cassiopeiæ, qui varient toutes de plus de 7 grandeurs. Chi Cygni est au maximum 6500 fois plus lumineuse qu'au minimum. Elle varie de la 4^{me} à la 14^{me} grandeur. Le changement de V Delphini n'est certainement pas moins énorme. (Mrs. FLEMING: Astron. Nachr. 3025. HARTWIG: Astron. Nachr. N°. 3211 et 3596).

k) L'idée d'expliquer les changements d'éclat des étoiles rouges variables au moyen de nuages tour à tour plus épais et plus transparents et de comparer la couleur rouge de ces astres avec celle que prend notre soleil quand nous le voyons à l'horizon, est si plausible, qu'elle a déjà dû se présenter maintes fois. Elle a même si irrésistiblement séduit BIRMINGHAM, cet observateur infatigable des étoiles rouges, que pour rendre compte du changement dans l'épaisseur des nuages il n'a pas reculé devant l'hypothèse exorbitante d'un anneau nuageux à renflement unilatéral, qui tournerait autour de l'étoile! (J. BIRMINGHAM: Trans. Roy. Irish Ac. XXVI 1876. The Red Stars, Observ. and Catalogue) Une hypothèse ressemblant beaucoup à celle avec laquelle ma théorie a débuté en 1888 (voir plus haut la note i à la page 15) a été proposée par M. LOHSE. Mais M. LOHSE ne fit aucune tentative pour appliquer son hypothèse à l'explication d'une périodicité quelconque. Il avait surtout en vue l'apparition soudaine des Novæ. (LOHSE: Ber. d. Preuss. Acad. d. Wiss. Berlin Dec. 1877. SCHEINER: Spectralanal. d. Gestirne p. 302).

l) C'est Mira, qui nous a révélé le premier qu'il y a des étoiles variables. La périodicité de Mira a été découverte en 1596 par DAVID FABRICIUS, le père de JOHANNES FABRICIUS, qui en découvrant 14 ans plus tard les taches solaires a donc préparé ainsi l'explication de la découverte de son père. L'étoile merveilleuse fut insérée par BAYER en 1603 dans son Catalogue avec le nom de σ Ceti; mais HEVELIUS en 1661 lui donna le nom de Mira. Une histoire complète des 7400 observations, qu'on a faites de l'éclat de Mira depuis 1596 jusqu'en l'an 1900, a été donnée par M. PAUL GUTHNICK dans le Vol. 79 N°. 2 des Nova Acta Abh. d. Kais. Leop. Carol. Deutschen Akad. der Naturforscher, Halle 1901 p. 71—261. De ces 7400 observations JULIUS SCHMIDT en a fait près de 2400 et M. T. W. BACKHOUSE près de 800. Après eux, HEIS, SCHÖNFELD, FLANERY et ARGELANDER en ont fait le plus. Mais HOLWARDA, FULLENIUS, JUNGIIUS, HEVELIUS, BOULLIAU, la famille KIRCH, REYHER, WARGENTIN, W. HERSCHTEL, GOODRICKE, WESTPHAL et WURM ont fait aussi des observations nombreuses. Très intéressantes sont les 73 différentes courbes où Mr. GUTHNICK a représenté comment en différentes périodes la lumière de Mira changeait chaque fois. L'observation de Mira est encore toujours à l'ordre du jour, comme on le verra dans les notes o , v et w suivantes. Le spectre de Mira a été étudié dernièrement par M.M. VOGEL, SIDGREAVES, CAMPBELL, STEBBINS et SLIPHER. VOGEL: Sitz. ber. d. Berliner Ac. p. 143 (1896). WALTER SIDGREAVES: Monthl. Not. 58 p. 344 (1898) The Spectrum of σ Ceti as photographed at Stonyhurst College Observatory. W. W. CAMPBELL: Astroph. Journ. IX (1899) p. 31. JOEL STEBBINS: Astroph. Journ. XVIII p. 341 (1903). Voir aussi: SECCHI: les Etoiles I p. 148. LOCKYER: The Meteoritic Hypoth. p. 388, 368, 505, 506 où des observations de ESPIN, PICKERING, FOWLER et COPELAND sont aussi mémorées. Le 11 Janvier 1907 un beau spectre de Mira a été obtenu à l'Observatoire LOWELL (SLIPHER: Astroph. Journ. April 1907, p. 235, Plate XIV).

Commençons notre examen au moment que l'étoile variable est au maximum de son éclat.

La nappe brumeuse est alors plus transparente que jamais, parce qu'alors elle est aussi riche que possible en vapeur saturée transparente et aussi pauvre que possible en nuages condensés opaques. Cette transparence exceptionnelle n'aura qu'une très courte durée. Car si la nappe brumeuse perd à sa surface extérieure plus de chaleur par le rayonnement au dehors qu'elle n'en peut recouvrer du dedans, sa vapeur saturée s'y condensera en nuages. Et comme ces nuages rendront la nappe plus opaque, nous verrons l'étoile diminuer en grandeur.

Cette grandeur continuera à diminuer tant que le refroidissement de la surface extérieure de la nappe brumeuse continuera à y faire augmenter la condensation des nuages. Mais comme cette condensation incessante de vapeur en nuages doit causer la contraction de la nappe, les nuages, qui en forment la surface extérieure, descendront.

Or nous savons qu'avec la profondeur la température augmente et il est donc clair qu'en continuant leur mouvement descendant les nuages arriveront enfin dans une couche tellement chaude, qu'ils cesseront de s'y refroidir et de devenir plus opaques et commenceront au contraire à être réchauffés et à reprendre l'état vaporeux transparent.

Au moment que les nuages arrivent dans cette couche la nappe brumeuse est plus opaque que jamais. Elle est alors aussi riche que possible en nuages et aussi pauvre que possible en vapeur saturée. L'étoile est alors au minimum de son éclat. Mais tout comme le maximum ce minimum n'aura qu'une courte durée.

Car les nuages épais du minimum, sollicités par leur poids, doivent continuer leur mouvement descendant. Et comme, à partir de la couche considérée, ils ne peuvent, descendre sans s'évaporer et se détruire en partie, il est évident, qu'après le minimum à nappe nuageuse opaque, un nouveau maximum à nappe vaporeuse transparente va être restauré.

Mais tandis que cette restauration du maximum progresse et que la vapeur restaurée dans la profondeur rend à la nappe brumeuse du minimum le volume plus grand et la transparence, qu'elle avait au maximum précédent, cette vapeur produira ici, tout comme nous l'avons étudié dans le soleil, une poussée de bas en haut, qui imprimera à la surface extérieure nuageuse de la nappe un mouvement ascendant. Ce mouvement ascendant ne cessera qu'au moment que la vapeur restaurée dans la profondeur discontinuera

d'excéder celle qui à la surface incessamment se condense. En ce moment la nappe brumeuse sera de nouveau aussi volumineuse et aussi transparente que possible et l'étoile aura atteint de nouveau le maximum de son éclat.

Si l'explication que je viens d'esquisser est juste, ce n'est pas seulement la nappe photosphérique du soleil qui vibre, comme M. POOR et moi nous croyons l'avoir découvert, mais la nappe brumeuse à l'extérieur des étoiles rouges variables vibre elle aussi précisément de la même manière. Elle aussi a une surface nuageuse, qui monte et descend tour à tour. Lorsqu'au maximum cette surface plane à sa plus grande hauteur, c'est son refroidissement qui en l'alourdissant la force à descendre et lorsque le minimum étant atteint elle est arrivée à sa plus grande profondeur, c'est son réchauffement, qui la force à remonter et à restaurer un maximum nouveau.

Mais cette vibration de la nappe brumeuse n'aura pas nécessairement lieu tout d'une pièce et, tout comme dans la photosphère du soleil, les maxima et les minima, qu'elle produit, résulteront alors de la collaboration de périodicités locales *m*). Il est donc fort bien possible que même au minimum l'étoile ait encore quelques zones transparentes qui relèvent son éclat.

La périodicité des phénomènes solaires et celle des étoiles rouges variables résultent par conséquent d'un même mécanisme, dont il n'y a que l'installation qui diffère. Dans le soleil il est installé dans les nuages lumineux photosphériques et dans les étoiles rouges il est installé plus haut dans les nuages obscurcissants.

Tout à fait en accord avec cette théorie est la grande ressemblance de ces deux périodicités. Elles nous montrent toutes deux par exemple 1° le passage du minimum au maximum généralement plus rapide que le passage inverse, 2° des maxima d'autant plus abruptes qu'ils sont plus élevés *n*), 3° des haltes et des accélérations imprévues et d'autres accidents capricieux, qui influent même sur la durée de la période *o*).

m) Voir plus haut p. 56.

n) CLERKE: Prob^l. p. 358. „The most brilliant phases of Chi Cygni are brief while fainter maxima are sometimes prolonged for a couple of months”; loc. cit. p. 353: „In S Ursae Maj. as in the Sun, long maxima are low maxima”. Très abrupte est aussi le maximum de T Andromedae (PICKERING: *Astroph. Journ.* I p. 205). Voir aussi ma note *i* dans le paragraphe précédent.

o) La grande variabilité de la période des taches solaires se voit clairement démontrée dans la table que WOLF a publiée en 1877 dans les „Memoirs of the R. Astr. Soc.” (YOUNG: the Sun p. 155). La période de 11 ans y montre des écarts de 2 ans en plus et en moins. La période de 11 mois de Mira montre des écarts de deux mois. Ses dernières périodes jusqu'au maximum du 3 Janv. 1906 ont duré 316, 353, 331, 339 et 341 jours (NIJLAND: *Astron. Nachr.* N°. 4110). Il est impossible de prédire ses maxima

§ 16. *Explication des particularités dans le changement de l'éclat.*

S'il résulte de toutes les considérations précédentes que le phénomène principal des étoiles rouges variables, c'est à dire le changement de leur éclat, peut être expliqué au moyen de l'hypothèse d'une nappe brumeuse extérieure, tour à tour plus opaque et plus transparente et vibrante par conséquent tout comme la nappe photosphérique du soleil, il me reste à expliquer maintenant, comment cette même hypothèse peut rendre compte aussi des autres phénomènes caractéristiques, que ces étoiles variables nous font observer.

Pour arriver à cette explication, je ferai remarquer tout d'abord, que parmi les phénomènes que la nappe photosphérique du soleil fait voir en vibrant, il n'y en a pas de plus marquants, ni de plus constants, que la formation intermittente de trous, qui nous font l'effet de taches obscures.

Or, si à l'exemple de la nappe photosphérique du soleil, la nappe brumeuse des étoiles rouges vibre précisément de la même manière, elle aussi aura au maximum ses trous. Ces trous seront produits lorsqu' après le minimum, ainsi que je l'ai déjà expliqué plus haut *p*), la surface nuageuse de la nappe brumeuse est poussée en haut par la vapeur rapidement régénérée en bas. Si cette poussée est forte, elle formera aux endroits les plus minces de la couche nuageuse, qu'elle relève, des bosses, qui, si la poussée continue, crèveront en formant des trous.

Ces trous auront donc la même origine que les taches solaires; mais leur effet sera inverse. Car n'étant pas des trous dans un manchon lumineux, mais dans un voile obscurcissant, ils ne seront pas obscurs mais excessivement lumineux au contraire. Et si par hasard leurs orifices sont dirigés vers nous, nous y verrons luire à l'intérieur la photosphère brillante de l'astre.

C'est ainsi que s'explique que certaines étoiles rouges variables, comme *S* et *T* Ursae Majoris par exemple, blanchissent souvent au maximum *q*) et qu'en général au maximum la rougeur

avec quelque exactitude même approximative. Il en est de même des maxima de ses congénères (CLERKE: loc. cit. *Stars variable in long periods* p. 347—362). Quant aux accélérations imprévues et aux haltes ou „stand still's", comme M. MAXWELL REED les appelle, M^{lle} CLERKE en a donné quelques exemples (loc. cit.) en décrivant les phénomènes de *S* Cephei, *R* Lyncis, *U* Orionis et de *S* et *T* Ursae Majoris.

p) Voir page 118.

q) PICKERING: CLERKE *Probl.* p. 354. „Deep red and often hazy when faint *S* Ursae Maj. has been seen nearly white at maximum, a not uncommon kind of colour fluctuation". — „In 46 days *T* Urs. Maj. acquired a 76 fold brillancy and the augmentation was accompanied by a blanching of its rays. Of their dull ruddy hue scarcely a tinge survived at full light".

diminue *r*). Car si au maximum nous voyons les étoiles au travers des trous de leur voile, ce voile déchiré ne les rougira plus autant.

Or comme ces trous éventuels dans la nappe brumeuse du maximum doivent être tout aussi accidentels que les taches du soleil et comme ils rehausseront d'autant plus l'éclat de l'étoile qu'ils seront plus considérables et que leurs axes verticaux seront mieux dirigés vers nous, il est évident que si ces trous existent, leur développement et leurs positions fortuites donneront nécessairement aux maxima successifs d'une même étoile ces grandeurs entièrement différentes, qui ont toujours étonné tous les observateurs *s*).

Pour que l'éclat au maximum soit aussi grand que possible un concours exceptionnel de circonstances fortuites est requis. Il faut qu' alors, précisément au moment du maximum de l'étoile un trou plus grand que jamais se montre exactement au centre de l'hémisphère stellaire tournée de notre côté. Car alors seulement nous verrons aussi peu voilée que possible la photosphère brillante de l'astre. Si le concours de ces circonstances fortuites est un autre, l'éclat au maximum sera moindre et il ne dépendra que du hasard quel sera l'éclat chaque fois.

En observant Mira en 1779 Sir WILLIAM HERSCHEL a eu la chance de la voir, pareille à Aldebaran, comme une étoile de première grandeur *t*). Mais cet effet du hasard n'a plus jamais été observé depuis lors. En 1868 l'étoile ne parvint pas même à la 5^{me} grandeur *u*). Et présentement ses maxima ne dépassent que rarement la 3^{me} *v*). Cet hiver cependant son maximum a été de nouveau exceptionnellement élevé *w*).

r) CLERKE: Probl. p. 254. Voir aussi les notes *v* et *w* suivantes.

s) BOULLIAU: De Stella nova quae in collo Ceti ante aliquot annos visa est, etc. Parisiis 1667. OLBERS: Berliner Jahrbuch 1841 p. 93.

t) HERSCHEL: Phil. Trans. Vol. 70 p. 342. Le 8 Octobre 1839 ARGELANDER vit Mira de 2.1^{me} grandeur (Annals of H. C. O. Vol. XXXIII).

u) SCHMIDT, cité par SCHÖNFELD: Mannheimer Jahresb. 40 p. 74.

v) CLERKE: Probl. p. 349. Le maximum du 3 Janvier 1906 n'a atteint que la 3.9^{me} grandeur. Au minimum du 23 Sept. 1905 Mira était d'après les observations de M.M. NIJLAND et VAN DER BILT de la 9.05 grandeur. Les minima précédents avaient été un peu moins prononcés, à grandeurs de 8.4, 8.75, 8.7, 8.9 et de 8.9 (NJJLAND: Astron. Nachr. N°. 4110; Das Mira Maximum von Januar 1906). Durant 1906 Mira a été observée 244 fois par les membres de la Section des étoiles variables de l'association astronomique britannique. Le résultat de toutes ces observations se voit dans une courbe, que le Colonel E. E. MARKWICK a insérée dans le Journal de l'Association, Vol. XVII, 8 p. 346. On y voit le maximum de 2^{me} grandeur. „The precise date of min. cannot be inferred owing to proximity of the star to the Sun. The colour was particularly studied by the Director in an 8½ in. reflector, and the change from red to orange, and even a paler tint as the star brightened, was distinctly noted”.

w) FLAMMARION: Bull. de la Soc. Astr. de France, Séance du 5 Décembre 1906. „Mira est en ce moment d'un éclat exceptionnel qu'il a estimé à 2.0. Elle est moins

Outre cette grande inconstance de l'éclat au maximum, la périodicité des étoiles rouges a encore quelques autres particularités, où l'on voit aisément aussi l'effet de trous lumineux accidentels dans leur nappe brumeuse. Telles sont par exemple toutes ces haltes et ces accélérations imprévues que leurs changements d'éclat font observer si souvent *x*). Il est évident en effet, que, puisque les trous dans la nappe doivent nous envoyer d'autant plus de lumière qu'ils sont plus grands et mieux dirigés vers nous, leur croissance et leur décroissance et leur rotation sur l'axe devront produire, indépendamment du changement d'éclat principal de l'étoile, des changements d'éclat secondaires éminemment capricieux *y*).

Quoique l'éclat au minimum soit généralement moins variable que celui au maximum, il n'est toutefois nullement constant non plus *v*). Cette inconstance du minimum au fond de la nappe brumeuse résultera en partie du mouvement vibrant de la photosphère stellaire plus profonde. Car si cette photosphère ressemble à celle du soleil, elle aussi montera et descendra tour à tour et elle produira ainsi dans la nappe brumeuse, qui la recouvre, un réchauffement et un refroidissement alternants, qui y agiront comme une seconde cause d'évaporation et de condensation intermittentes.

Le mouvement de la nappe brumeuse doit donc répondre à deux vibrations différentes à la fois: la sienne propre et celle de la photosphère plus profonde. Or comme ces deux vibrations doivent interférer, la condensation qu'elles causent, sera, surtout au fond de la nappe, alternativement plus énergique ou plus faible, à mesure que leurs phases coïncident ou différeront. Si cette interférence des deux vibrations, que je viens d'indiquer, peut aisément rendre compte de l'inconstance des minima, elle pourrait être en cause aussi en beaucoup d'autres inégalités, et non seulement en celles, que nous avons déjà étudiées plus haut, mais surtout aussi en celles, qui ont fait naître l'idée de périodes plus longues couvrant un grand nombre de périodes ordinaires *z*).

rouge que d'habitude, précisément parce qu'elle est plus brillante". Dans la séance du 9 Janvier 1907 de la même société M.M. MACPHERSON et TRAMBLAY ont communiqué que, d'après eux, Mira a atteint la grandeur 2 à 2,2 à son maximum. Le dernier maximum a présenté en outre, d'après M. PAUL BLANC, les 14, 15, 17 et 18 Janvier 1907 des variations d'éclat brusques et considérables, des changements par exemple le même jour de la 2.5^{me} à la 3.4^{me} grandeur. (BLANC: Bull. de la Soc. Astr. de France Mars 1907 p. 144).

x) Voir la note *o* précédente.

y) CLERKE: Probl. p. 369. „Periodic cannot be sharply distinguished from irregular variables”.

z) ARGELANDER: Bonner Beob. Bd. VII Th. II p. 332. GUTHNICK, cité par M^{lle} CLERKE: Probl. p. 348. „GUTHNICK's long inequality, covering 200 cycles”. GUTHNICK: Nova Acta

La période des étoiles rouges étant toujours beaucoup plus courte que celle des taches solaires, la vibration de la nappe brumeuse y sera probablement en premier lieu la sienne propre et elle ne sera influencée qu'en second lieu par celle de la photosphère plus profonde. Il n'est pas tout à fait impossible cependant que cette dernière influence prédomine. Mais cette prédominance éventuelle ne changerait rien dans toutes mes explications. Car en ce cas les nuages obscurcissants de la nappe brumeuse n'en continueraient pas moins à s'y former à la surface, à s'épaissir en descendant et à s'évaporer de nouveau à mesure que dans la profondeur la température augmente. Il n'y aurait alors que le moment, que cette évaporation commence, qui serait déterminé autrement. Car ce moment ne serait plus uniquement déterminé alors, comme je l'ai expliqué plus haut *a)*, par la descente suffisante et toujours la même des nuages, mais plutôt par l'effet réchauffant de la photosphère vibrante venant à la rencontre des nuages descendants. Il est donc évident qu'en ce cas aussi la nappe brumeuse deviendra tour à tour transparente et opaque et tous les phénomènes, que ce changement à trous périodiques engendre, seront les mêmes dans les deux cas.

Quoique toutes les étoiles rouges soient entourées d'une nappe brumeuse, elles ne sont cependant pas toutes décidément variables. Elles ne le seront que si leur nappe est assez riche en vapeur condensable pour pouvoir rendre quelque zone considérable opaque et transparente tour à tour. Si cette condition n'est pas remplie, leurs nappes ressembleront plutôt à celles des étoiles jaunes *b)* et dans ces nappes ne se formeront alors tout au plus que des nuages épars. Ces nuages épars, toujours passagers et déplacés sans cesse

cit. p. 248. Si au dessous de la nappe photosphérique du soleil il y avait encore une autre nappe, que le changement de chaleur à l'intérieur fit vibrer, les vibrations de ces deux nappes pourraient interférer et expliquer alors peut-être comment aux périodes undécennales des taches est superposée une période plus longue de 60 ans environ, que R. WOLF a découverte et que H. FRITZ a constatée plus distinctement encore dans la périodicité des aurores polaires. (Wolfsche Mittheilungen über die Sonnenflecken XV Mai 1863. FRITZ: Die Beziehungen der Sonnenflecken zu den magn. und meteor. Erscheinungen der Erde 1878 p. 9, 25, 59, 254).

a) Voir plus haut p. 45 et 118.

b) Bien que les nappes brumeuses des étoiles jaunes, comme de notre soleil, contiennent généralement trop peu de vapeur condensable pour pouvoir former un voile opaque, l'étoile jaune Epsilon Aurigae présente néanmoins des diminutions d'éclat, qui, d'après les observations de HEIS en 1847 et de SCHMIDT en 1875, sont tellement capricieuses et considérables, qu'il me semble difficile de ne pas les attribuer à l'existence intermittente d'un voile pareil. (SCHMIDT: Astr. Nachtr. 2704. A. C. MAURY: Harvard Annals 28 p. 31. CLERKE: Probl. p. 372).

par leur rotation sur l'axe, causeront alors dans l'éclat de l'astre ces légères fluctuations auxquelles l'observation de presque toutes les étoiles rouges non périodiques nous a accoutumés *c*).

§ 17. *Explication des particularités dans le changement spectral.*

Les changements d'éclat dans les étoiles rouges variables ayant été maintenant expliqués, il me reste à étudier leurs changements spectraux. Or comme ces changements spectraux répondent parfaitement à ceux que le soleil nous fait observer *d*), ils n'ont dans ma théorie rien d'énigmatique. Car si dans les étoiles rouges et le soleil le mécanisme de la périodicité est le même, ce même mécanisme produira aussi les mêmes changements spectraux. Et c'est ainsi que, lorsqu'au maximum la nappe nuageuse sera aussi dilatée que possible, on verra dans les étoiles rouges variables, tout aussi bien que dans le soleil, des raies brillantes plus lumineuses que jamais. Dans les deux cas, la même cause aura les mêmes effets.

Or j'ai fait voir dans mon Introduction, que dans le cas du soleil cette cause des raies brillantes n'est jamais une élévation de la température locale, car les mouvements incessants, qui en devraient résulter, sont incompatibles avec les propriétés principales du soleil, qui indiquent au contraire une imposante tranquillité *e*). La cause des raies brillantes doit donc être une luminescence, qui augmente au maximum.

Si cette luminescence du gaz solaire est chimique, elle sera au maximum plus forte que jamais, parce que les substances dissociées qu'alors la photosphère contient dans ses taches nombreuses sont ainsi mieux exposées que jamais au refroidissement extérieur, et particulièrement aptes par conséquent à former des combinaisons chimiques. Et dans les couches plus élevées de l'atmosphère solaire, cette formation de combinaisons sera alors favorisée de même 1° par le

c) SECCHI: les Etoiles I p. 156. „Toutes les étoiles rouges ou fortement colorées sont variables et vice versa”. CLERKE: Probl. p. 183, 184, 215. „The circumstance that instability of light accompanies redness of colour in stars is most curious and significant” loc. cit. p. 370: „Many, perhaps most red stars are unstable to the extent of half a magnitude”.

d) CLERKE: Probl. p. 362. „The analogy has been rounded out by the discovery that the sun at spot maximum is essentially a bright-line star. Its spectrum then shares, in a just perceptible degree, the blazing quality, that distinguishes the spectra of Mira variables. This is a further and an irrefragable proof of the correspondance of the epochs. Light-maxima in the stars match spot-maxima in the sun”. Les recherches spectrales auxquelles Mira a donné lieu ont été énumérées dans la note *l* de mon § 15.

e) Voir plus haut p. 3—16. Voir aussi ma lettre: Nature, Jan. 16, 1896 p. 248 et 249.

moindre pouvoir émissif de taches éventuelles *f*) et 2° probablement aussi par la compression et le relèvement que la photosphère vibrante y produira en montant *g*).

Si la luminescence des raies brillantes était une luminescence radio-électrique, comme j'en ai fait voir la possibilité à propos de la couronne, des protubérances et de l'influence des taches solaires sur nos phénomènes électriques terrestres *h*), sa recrudescence au maximum se comprendrait facilement encore; car les rayons électrisants Beta et Gamma seraient alors d'autant plus abondants, qu'ils jailliraient d'un plus grand nombre de taches.

C'est donc en tout cas une luminescence chimique ou électrique, qui produit les raies brillantes du soleil au maximum.

Or s'il en est ainsi des raies brillantes dans l'atmosphère tranquille du soleil, il en sera de même des raies brillantes dans l'atmosphère tranquille des étoiles rouges variables, où un même mécanisme est installé. Il n'est donc nullement surprenant (ce qui sans cette luminescence serait inconcevable) que ce soient précisément ces étoiles les plus refroidies, qui sont le plus riche en raies brillantes et que ces raies brillent surtout, lorsque ces étoiles sont au maximum. Car les mêmes causes, que je viens de rappeler et qui, lorsque le soleil est au maximum augmentent la luminosité de ses raies, agiront ici de même *i*). Et c'est par conséquent une luminescence au maximum plus forte, qui rehaussera alors l'éclat des raies brillantes de Mira.

C'est surtout à l'hydrogène *j*) - qu' appartiennent les raies, qui sont si brillantes au maximum des étoiles variables du type 3 *k*).

f) Voir plus haut, pages 29, 41 et 87.

g) Page 55. Dans les flammes faculaires la luminescence pourrait être due aussi à un procès endothermique empêchant les facules d'y rehausser la température.

h) Voir plus haut, pages 20, 21 et 84.

i) Il n'y a que le moindre pouvoir émissif de taches éventuelles que nous devons retrancher de ces causes ici.

j) Quelquefois aussi à l'hélium, dont M. ESPIN vit briller la raie D_3 dans le spectre de Chi Cygni au maximum (SCHEINER: Die Spectralan. d. Gest. p. 328).

k) Ces raies, découvertes par M. ESPIN dans les étoiles R Leonis, R Hydrae et R Cygni (SCHEINER: loc. cit. p. 328), ont été étudiées surtout dans le spectre de Mira. Cette étude a révélé bien vite la particularité remarquable, que les raies delta et gamma sont le plus souvent excessivement brillantes, alors que la raie alpha fait défaut et que les raies beta et epsilon ne se voient parfois que très difficilement. (STEBBINS: Astroph. Journ. XVIII p. 364). Durant le maximum très prononcé de 1906 la raie alpha a été vue cependant à l'observatoire LOWELL. (V. M. SLIPHER: Astroph. Journ., Jan. et Avril 1907). Dans le soleil la raie alpha est toujours forte et dans les nébuleuses la raie beta. La cause de cette distribution si différente de la lumière dans les raies de l'hydrogène ne nous est pas connue. Mais J. J. THOMSON a fait voir, que les circonstances n'ont pas besoin de différer beaucoup pour causer une distribution différente. Car dans un tube de Geissler il vit prédominer la raie alpha au pôle positif et la raie beta au pôle négatif. (J. J. THOMSON: Proc. Royal Soc. 58 p. 255 (1895)).

Mais à côté de ces raies alors si fortement brillantes d'autres raies très faiblement brillantes se voient déjà aussi. Elles paraissent dues au silicium, au fer et à une substance inconnue (4007). M. STEBBINS a étudié, comment entre le maximum et le minimum suivant toutes ces raies changeaient, et il a découvert ainsi, que tandis que les raies de l'hydrogène, du silicium et de la substance inconnue 4007 et d'autres substances inconnues, 3939, 3968, 4216, 4234 et 4373 survenues plus tard, diminuaient et disparaissaient, quelques raies brillantes nouvelles du magnésium et du fer vinrent les remplacer. Les figures 8—13 et la table XVI du Mémoire de M. STEBBINS ^{l)} font voir qu'au maximum il y avait 9 raies brillantes et qu'un mois et demi plus tard ces raies avaient bien grandement diminué en éclat, mais avaient tellement augmenté en nombre, qu'il y en avait alors 22. De ces 22 raies brillantes il n'en restait plus que 3, dont deux appartenaient au fer et une au magnésium, lorsque six mois environ après le maximum le minimum arriva.

Toutes ces observations intéressantes de M. STEBBINS sont en accord complet avec les prévisions de ma théorie. N'est-il pas clair en effet, que si à l'instar du soleil Mira nous montre ses raies lumineuses dans une atmosphère stratifiée, à l'extérieur de la surface nuageuse et trouée d'une nappe vaporeuse, ces raies lumineuses changeront lorsque cette surface, en vertu de la condensation de la nappe descendra?

N'est-il pas évident de même, que, lorsque cette surface sera aussi élevée et aussi trouée que possible, ce sera l'hydrogène léger, ou éventuellement aussi l'hélium léger, qui luminescera fortement, et qu'à mesure que cette surface descendra, les éléments qu'elle fera luminescer augmenteront en nombre et en poids moléculaire, jusqu'à ce que les trous se comblant toujours davantage cette luminescence diminuera de nouveau?

Comme toutes ces raies brillantes se forment à l'extérieur de la nappe brumeuse elles brillent indépendamment de l'absorption générale, que cause cette nappe au minimum. Il n'est donc nullement surprenant que parmi ces raies on en trouve qui aient la particularité de devenir plus vives lorsque le minimum approche et M. STEBBINS se trompe lorsqu'il voit dans cette particularité la preuve, qu'une absorption générale n'est pas la cause de la diminution de l'éclat de Mira ^{m)}.

^{l)} STEBBINS: *Astroph. Journ.* XVIII p. 363—377.

^{m)} STEBBINS: *loc. cit.* p. 377. „The great variations of relative intensity in the hydrogen and other bright lines, and in the continuous spectrum, show that the star's decrease in light is produced by other causes than general absorption. Considering all

Il est clair d'ailleurs, que si ces raies brillantes ne sont dues qu'à des luminescences passagères dans les couches extérieures les plus raréfiées de l'astre, leur formation ne joue aucun rôle important dans le changement de l'éclat. Ces raies brillantes n'importent que comme un réactif d'une variabilité certaine dans les étoiles du type 3. C'est en appliquant ce réactif que Mrs. FLEMING surtout a découvert un grand nombre d'étoiles variables ou moyen des raies brillantes de leurs spectres *n*).

Mais dans les couches extérieures des étoiles rouges variables des éléments, qui puissent luminescer au maximum font très souvent défaut. C'est ce qu'on observe dans toutes les étoiles variables du type 4, où l'hydrogène et l'hélium sont toujours absents. Si dans ces étoiles le mécanisme de la périodicité est le même que celui qui fonctionne dans le type 3, n'est-il pas compréhensible alors que leurs maxima ne sauraient jamais produire la moindre raie brillante *o*)? Et n'est-il donc pas clair en somme, que lorsque les maxima du type 3 nous montrent bien ces raies brillantes, ce phénomène brillant n'est après tout que tout à fait insignifiant?

Je n'ai encore parlé que d'une partie des observations spectrales de M. STEBBINS. Mais il en a fait bien d'autres, qui elles aussi me semblent donner à mon explication des changements d'éclat au moyen d'un voile tour à tour plus épais et plus transparent une éclatante confirmation. M. STEBBINS ne s'est pas borné à étudier les raies brillantes *p*), il a essayé aussi de découvrir si les raies et

the evidence, it seems reasonably certain that the star's variation in brightness is due to the action of internal forces". Cette conclusion de M. STEBBINS est évidemment fondée sur l'hypothèse que les raies brillantes seraient engendrées au dessous des nuages absorbants. Mais si ces raies, à l'exemple de celles du soleil, ne sont pas engendrées au dessous des nuages, mais au dessus dans l'atmosphère extérieure stratifiée de l'astre, cette conclusion manque de fondement.

n) M. FLEMING: *Astroph. Journ.* II p. 198, VIII p. 233 etc. CLERKE: *Probl.* p. 222—228. 352 etc.

o) CLERKE: *Probl.* p. 219.

p) M. STEBBINS a constaté aussi, ce que M. CAMPBELL avait déjà découvert en 1899 (*Astroph. Journ.* IX p. 31—36), que les raies brillantes de Mira se montrent toujours déplacées vers le violet par rapport aux raies d'absorption. Ce déplacement d'environ $\frac{1}{4}$ de l'unité d'ÅNGSTRÖM est très grand sans doute. Mais comme les raies brillantes sont formées dans les couches tout à fait extérieures où la pression est excessivement petite et comme dans toute étoile rouge les raies d'absorption sont formées à une profondeur probablement beaucoup plus grande que dans le soleil et dans un gaz par conséquent fortement comprimé (voir plus haut aux pages 100 et 113) il n'est peut-être pas tout à fait impossible que ce déplacement réponde à une différence énorme en pression. Quoi qu'il en soit M. M. CAMPBELL et STEBBINS sont d'accord qu'il ne saurait être question ici d'un mouvement matériel dans le rayon visuel et tous deux ils attribuent le déplacement à quelque cause physique encore inconnue. Voici par exemple comment M. CAMPBELL s'exprime (loc. cit. p. 36): „the displacement of the bright lines towards the violet with

les bandes d'absorption montraient quelque changement, lorsque l'éclat de l'étoile diminuait, de la 3^{me} à la 9^{me} grandeur.

Il est clair, que si mon explication d'un changement d'éclat aussi énorme est juste et si par conséquent sous son voile tour à tour plus opaque et plus transparent la grande masse de l'étoile n'y prend pas la moindre part, il n'y aura dans le spectre de l'étoile aux différents moments de la période que surtout l'éclat général qu'on verra changer *q*). Et les raies d'absorption et les bandes obscures ne changeront alors que bien peu et changeront surtout en leurs intensités relatives à mesure que dans la nappe brumeuse les gaz absorbants seront plus ou moins condensés.

Mais combien infiniment plus grands seraient les changements spectraux, auxquels nous devrions nous attendre, si l'idée de M. STEBBINS était juste *r*) et si, comme M^{lle} CLERKE l'explique *s*), les changements d'éclat n'étaient pas tout simplement produits par l'opacité variable d'un voile obscurcissant, mais par des recrudescences périodiques de la circulation verticale stellaire! M. STEBBINS a recherché comment les deux spectres d'absorption de Mira au maximum et au minimum répondaient à cette attente.

Si pour affaiblir cette attente, on voulait objecter, que notre

reference to the dark line spectrum must not be considered as proving actual changes in the velocity of the matter emitting the bright line spectrum. It is quite conceivable that changes in the physical condition of the body are responsible for the apparent changes of velocity".

q) Ce changement dans le spectre continu, répondant à l'opacité intermittente de la nappe brumeuse, a été étudié par le P. SIDGREAVES et M. STEBBINS, qui ne le trouvèrent pas égal dans toutes les parties du spectre. STEBBINS: loc. cit. p. 363: „SIDGREAVES plates showed that as the star declined in brightness, the intensity of the bright portions of the spectrum between 4300 and 5000 grew less relatively to that of the region near 5500. My plates show a decrease in intensity of the region from 4300—5000 relative to the continuous spectrum from 4000 to 4300. Fig. 3 and 5 show the changes well.... These changes.... may be simply the fading out of some bright bands". Si cet affaiblissement plus grand entre les longueurs d'onde 4300 et 5000 était réellement dû à l'extinction des bandes lumineuses, dont parle M. STEBBINS, cette extinction serait analogue à celle des raies brillantes, que j'ai expliquée page 126.

r) Voir la note *m* précédente.

s) CLERKE: Probl. p. 362. „Looking a little closer, we can discern the probability that the cyclical variations of all these bodies depend essentially upon a rise and fall of activity in the vertical circulation by which radiation is maintained. The rate of conveyance of heated matter from within outward must be a determining factor of photospheric brilliancy, transcendent lustre implying unusual celerity of transport. This is the vital proces of suns, the checking of which must immediately become sensible in their diminished output of light. Here if anywhere will be found the secret of stellar variability". Comme il y a peu d'auteurs que j'ai plus souvent cités ici que M^{lle} CLERKE, la nouvelle de sa mort, lorsque j'avais achevé ce Mémoire, m'a fort douloureusement impressionné. Ses „Problems in Astrophysics" m'ont été de la plus grande utilité en élaborant cet Essai.

soleil nous démontre, qu'on peut lui supposer des éruptions périodiques fabuleuses, sans que jamais son spectre étalon nous en montre le moindre effet, cette objection n'aurait pas la moindre valeur. Car même en admettant qu'une telle idée de la constitution solaire ne fût pas absurde *t*), cette idée n'est en tous cas pas applicable aux étoiles rouges variables. Car toutes ces éruptions solaires, même les plus formidables, ne sont que jeu d'enfant si on les compare avec celles demandées par Mira. Tout le monde sait en effet que quelques fabuleuses que soient au maximum les éruptions solaires, notre soleil ne daigne jamais changer son éclat pour si peu *u*). Et il en est de même de toutes les étoiles blanches et jaunes, qui se comptant par millions, auront elles aussi, chacune, ses taches, ses facules, ses protubérances et ses périodes d'une activité plus grande, mais qui toutes nous démontrent de même, que ces périodes d'une activité plus grande ne produisent jamais le moindre changement d'éclat.

Or si toutes ces éruptions fabuleuses, que l'astronomie d'aujourd'hui croit à l'oeuvre pour former périodiquement des maxima de taches, sont toujours impuissantes à causer même le moindre changement d'éclat, combien de fois plus fabuleuses encore devront être alors les éruptions, qui dans les étoiles variables feraient changer l'éclat de jour en jour et donneraient à l'étoile Chi Cygni par exemple un éclat 6500 fois plus grand en six mois!

Si de telles éruptions étaient concevables, il serait en tout cas tout à fait impossible, que le spectre d'une étoile aussi profondément bouleversée n'en montrât jamais la moindre trace dans ses raies d'absorption. Et cependant l'invariabilité des raies d'absorption est le phénomène que M. STEBBINS a constaté dans Mira. Les raies d'absorption sont au maximum et au minimum les mêmes et le spectre de Mira n'en montre au maximum aucune qu'on ne voit pas aussi au minimum.

Du 27 Juin (trois semaines après le maximum) jusqu' au 5 Jan-

t) Voir plus haut, page 16.

u) DESLANDRES: Bull. de la Soc. Astr. de France, Juin 1907, p. 268 (Comm. verbale) „LANGLEY a consacré 30 années de sa vie à l'étude du rayonnement solaire. Dans un mémoire, il déclare que les recherches nombreuses qu'il a entreprises n'ont donné aucun résultat décisif au point de vue expérimental. Les instruments sont tellement organisés, qu'ils ne sont pas capables de déceler ces petites variations, si bien que nous ne pouvons pas affirmer qu'il y ait une variation du rayonnement en accord avec la variation des taches". D'autres variations, que LANGLEY et M. ABBOTT ont reconnues dans le rayonnement solaire, et qui d'après ma théorie pourraient résulter du mouvement vibrant des zones photosphériques, causant un changement dans l'absorption de l'atmosphère solaire (voir par ex. la note *f* de mon 9^{me} paragraphe), demandent, d'après M. DESLANDRES, qu'on continue à les étudier.

vier 1903 M. STEBBINS a fait durer ses recherches, qui lui procurèrent 22 clichés du spectre à 16 dates différentes. Sur ces clichés il vit bien comment du maximum au minimum surtout le spectre continu et 23 raies brillantes changèrent, mais parmi les 132 raies obscures qu'il y mesura, il n'en découvrit qu'une seule, dont il put affirmer avec certitude, qu'elle devint plus forte au minimum. Cette raie unique était la raie *g* du calcium, alors que 5 autres raies du même élément ne montraient pas ce changement certain. M. STEBBINS mentionne aussi 4 raies inconnues, qui encore invisibles le 27 Juin, étaient assez fortes le 16 Juillet ou le 4 Août, lorsque l'éclat avait diminué d'une grandeur v). On sera bien d'accord avec moi, qu'en fait de changement spectral, ce que M. STEBBINS a pu constater est bien peu, et que cette invariabilité presque complète du spectre d'absorption répond bien mieux à mon hypothèse, qui laisse la grande masse de l'étoile en repos, qu'à l'hypothèse, qui demande au contraire des bouleversements phantastiques.

En attendant qu'on réussisse un jour à donner à l'hypothèse de soleils devenant à force d'éruptions 6500 fois plus lumineux en six mois quelque ombre de vraisemblance et qu'on parvienne en outre à expliquer, comment un tel rehaussement d'éclat aussi prodigieux serait compatible avec une invariabilité presque complète des raies d'absorption, je crois pouvoir déjà constater maintenant que tous les phénomènes caractéristiques de tous ces soleils variables ont déjà trouvé dans ce Mémoire une très plausible explication.

Car dans la nappe rougissante brumeuse, qu'on est toujours

v) STEBBINS: loc. cit. p. 356 „There is one dark line which showed changes of which the reality is certain. This is the *g* calcium line... A few lines not visible on the early plates became prominent later. Four such lines have the following positions 3990.64, 4045.16, 4093.55 and 4097.48." L'invariabilité du spectre d'absorption, que nous montrent le Soleil et Mira, est probablement une propriété générale des astres. Déjà maintenant on décrit et on classe tous les spectres stellaires comme si, avec de rares exceptions, ils ne variaient jamais. Cette invariabilité indique que tous les soleils reposent comme le nôtre dans une même tranquillité. L'invariabilité presque complète du spectre d'absorption de Mira au maximum et au minimum est en contradiction évidente aussi avec l'hypothèse que le minimum serait dû à un développement excessif de taches; hypothèse qui en dépit de ce que les recherches minutieuses de LANGLEY nous ont appris (voir la note *u* précédente) et du peu d'obscurité que VOGEL et CHACORNAC ont trouvé dans les taches (note *f* p. 38) a encore toujours des adeptes. Voici par exemple une note que je viens de trouver dans le Journ. de l'Ass. Astron. Britann. du mois de Juillet 1907 à la page 414: „Prof. TURNER considers a suggestion of Mr. C. L. BROOK's that since the two hemispheres of the Sun differ greatly in the amount of their disturbance at different Sun-spot maxima, if the Sun were viewed poleward instead of equatorially, the effect of this would be to still further increase the difference of intensity of the various maxima. If then the analogy between the Sun and the long-period variables holds in this particular, the maxima of variables viewed polewards should differ in intensity to a greater degree than those viewed equatorially. (M. N. 67, N°. 7).

certain d'observer à l'extérieur de ces soleils variables, des nuages tour à tour plus épais et plus transparents sont tout ce que ma théorie demande pour expliquer tous leurs changements d'éclat, même les plus extravagants.

Il est vrai que cette explication demande en outre que cette nappe brumeuse soit relativement tranquille *w*). Mais si, comme je l'ai démontré, notre soleil est relativement tranquille; pourquoi les autres soleils ne le seraient-ils pas? S'il n'y en a que peu, qui soient en état de nous en donner quelque preuve directe, les étoiles rouges variables sont du nombre: Elles nous donnent cette preuve dans le changement de leur éclat. Car si ce changement est dû, comme j'ai essayé de le démontrer, à un voile extérieur tour à tour plus opaque et plus transparent, la périodicité de ce changement démontre, que dans les couches qui portent ce voile, doit régner quelque tranquillité.

Mon explication donne donc en somme à ma théorie de la tranquillité intérieure des astres une nouvelle confirmation *x*). Tant il est vrai, comme je l'ai dit en commençant ce Mémoire, que pour comprendre le soleil et les astres il faut reconnaître leur tranquillité.

Delft, le 21 Décembre 1906.

A. BRESTER Jz.,

Docteur ès sciences.

w) SCHEINER: Die Spectralanalyse der Gestirne p. 303. „Die grosse Heftigkeit der Vorgänge auf einem Sterne bei seinem Aufleuchten deutet darauf hin, dass sie, wenn sie auch nur oberflächlich stattfinden, doch beträchtliche Massen betreffen.... Dies ist aber nur möglich, wenn die Temperatur innerhalb des grossen Gebietes eine durchaus gleiche ist, wenn ein Zustand absoluter Ruhe herrscht und keine Strömungen, seien es radiale, seien es seitliche, stattfinden. Das sind aber Voraussetzungen, die höchst unwahrscheinlich sind, und von denen die Sonne gerade das Gegentheil zeigt.” Telle est l'argumentation de M. SCHEINER contre l'hypothèse qu'a imaginée M. LOHSE pour expliquer l'apparition soudaine des Novae au moyen d'un procès chimique, que le refroidissement causerait dans les couches extérieures et obscures de ces étoiles (voir ma note *k* de la page 117). Cette argumentation serait fatale à cette hypothèse et elle le serait aussi à celle de mon voile tour à tour plus épais et plus transparent, si le soleil nous donnait en effet l'exemple d'un astre incessamment bouleversé. Mais comme je crois avoir démontré qu'il est impossible que ce bouleversement existe et comme depuis lors les recherches de M. NEWALL ont confirmé que ce bouleversement ne s'observe jamais (voir plus haut à la page 6) l'argumentation de M. SCHEINER n'a plus rien de concluant.

x) Après avoir terminé ce Mémoire vers la fin de 1906, j'ai rencontré plus tard un grand nombre d'observations, qui, faites ou publiées en 1907, ont été utilisées ici tout de même comme donnant à ma théorie mainte nouvelle confirmation. Parmi toutes ces confirmations nouvelles je ne rappellerai ici que les observations de M.M. NEWALL, HALE, HALM et EVERSHERD et de M^{me} MAUNDER, mémorées aux pages 6, 7, 69, 86 et 91 de cet Essai.

TABLE DES MATIÈRES.

INTRODUCTION.

	Page.
§ 1. Tranquillité intérieure du Soleil	3
§ 2. Les sources de la chaleur solaire	17
§ 3. Fonctionnement intermittent des sources de chaleur physique et chimique causant la plupart des phéno- mènes lumineux dans les couches extérieures du soleil	24
§ 4. Les protubérances considérées comme des luminescences	28

PREMIÈRE PARTIE.

Le Mécanisme de la Périodicité dans le Soleil.

§ 5. Les deux parties du mécanisme: le gaz intérieur et les nuages photosphériques, qui l'entourent	32
§ 6. Fonctionnement du mécanisme. Les taches se formant et s'effaçant tour à tour dans la photosphère, qui alternativement monte et descend	42
§ 7. Fonctionnement intermittent des sources de chaleur physique et chimique dans la nappe photosphérique, qui monte et descend tour à tour	51
§ 8. Inégalité de la périodicité aux différentes latitudes . . .	56
§ 9. Les recherches de M. POOR sur la forme du soleil appuyant mon hypothèse de la photosphère vibrante . . .	58
§ 10. Répartition des taches sur la surface du soleil	59

	Page.
§ 11. Mouvements propres des taches et des facules.....	88
§ 12. Le déplacement séculaire de la photosphère, comme lieu géométrique, expliquant la rotation particu- lière des zones photosphériques solaires et l'évolu- tion des différents types spectraux stellaires.....	97

DEUXIÈME PARTIE.

Le Mécanisme de la Périodicité dans les Etoiles rouges variables.

§ 13. Périodicité des étoiles blanches et jaunes.....	102
§ 14. Les Etoiles rouges en général.....	108
§ 15. Fonctionnement du mécanisme de la périodicité. Le voile rougissant extérieur, alternativement plus opaque et plus transparent, à mesure que, tout comme la photosphère du soleil, il est tour à tour plus riche et plus pauvre en nuages.....	116
§ 16. Explication des particularités dans le changement de l'éclat.....	120
§ 17. Explication des particularités dans le changement spectral	124

INDEX ALPHABÉTIQUE DES NOMS CITÉS.

- Abbott 129.
Abney 96, 115.
Adams A. J. S. 87.
Adams W. S. 7, 38, 39, 41, 68, 69, 97, 100, 110, 113.
Albrecht 100.
Ambromm 58, 71.
Ames 52.
Andrews 32.
Angström 37, 110.
Arago 27.
Argelander 117, 121, 122.
Arrhenius 17, 20, 23, 32, 115.
Assmann 22.
Auwers 59.
Backhouse 117.
Balfour Stewart 48, 92.
Robert Ball 37, 100.
Bayer 117.
Becquerel 22.
Bellamy 100.
Belopolsky 6, 95, 105, 107.
Berberich 21.
v. d. Bilt 121.
Birkeland 20.
Birmingham 117.
Birt 88.
Blanc 122.
Böhm 40.
Bose 40.
Bosscha 47.
Boulliau 117, 121.
Braun 32, 53, 56, 66, 96.
v. Braumühl 48.
Brenner 103.
Brewster 97.
Brook's 130.
Brown (Miss) 87.
Buchan 22.
Bunte 40.
Cagniard de la Tour 32.
Campbell 15, 109, 113, 117, 127.
Carrington 27, 32, 56, 57, 59, 61, 63, 72, 74, 75, 88.
Caspari 7.
Cassini 48.
Chacornac 39, 94, 130.
le Chatelier 37, 40.
Chevalier 46.
Clausius 115.
Clerke (Miss) 4, 15, 27, 30, 32, 36, 37, 41, 66, 96, 99, 104, 105, 106, 114, 116, 122, 124, 128.
Cookson 100.
Copeland 110, 117.
Corder 91.
Cortie 49, 52, 56, 87.
Courvoisier 103.
Crew 65, 66, 68, 71, 74, 76, 110.
M. Curie 24.
Mme Curie 20.
Darwin 23.
Dawes 87, 88.
Debray 25.
Delaunay 97.
Demarçay 20.
Derham 48.
Deslandres 7, 28, 30, 49, 60, 129.
Deville 25.
Dewar 29, 68.
Döppler 4, 16, 31, 54, 65.
Drossbach 40.
Duner 52, 65, 66, 69, 70, 104, 110, 112, 113.
Dulong 37.
Eberhard 29, 68.
Ebert 37.
Eddie 105.

- Egorof 27.
 Ekholm 32.
 Ellerman 61, 112, 113.
 Ellis 21.
 Elster 19.
 Emden 18, 47.
 Ericson 37.
 Espin 112, 117, 125.
 Evershed 4, 5, 31, 39, 86, 131.
 Fabricius D. 117.
 Fabricius J. 46, 117.
 Faye 32, 47, 48, 67, 79.
 Fenyi 4, 5, 6, 8, 9, 11, 15, 22, 27, 84, 85.
 Féry 37, 40.
 Fischer 40.
 Fizeau 4.
 Flammarion 7, 102, 104, 121.
 Flanery 117.
 Fleming (Mrs.) 117, 127.
 Forbes 97, 115.
 Fowler 52, 69, 117.
 Frankland 19.
 Fritz 21, 22, 46, 49, 123.
 Frost 5, 33, 48, 52.
 Fullenius 117.
 Gale 41, 100, 110.
 Galilée 46, 48.
 Gautier 21.
 Geitel 19.
 Gladstone 97.
 Goodricke 117.
 Gore 99, 109.
 Gray 37.
 Guillaume 100.
 Guthnick 109, 117, 122.
 Hale 6, 7, 13, 14, 27, 30, 38, 39,
 41, 53, 60, 68, 97, 100, 110, 112,
 113, 131.
 Halm 11, 13, 36, 69, 70, 131.
 Handrikof 27.
 Hansky 53.
 Hansteen 21.
 Harkness 96.
 Harriot 46.
 Hartley 52.
 Hartmann 14, 29, 68.
 Hartwig 117.
 Haschek 13.
 Hasselberg 29.
 Hastings 36, 37, 65, 67, 99.
 Heis 117, 123.
 H. v. Helmholtz 18, 23, 95, 100.
 R. v. Helmholtz 29.
 Hergesell 22.
 J. Herschel 32, 33, 47, 82.
 W. Herschel 48, 117, 121.
 Hevelius 117.
 Higgs 69.
 Hirn 37.
 Hodgson 27.
 van 't Hoff 17.
 Holleman 5.
 Holwarda 117.
 Horrebow 21.
 Howlett 48.
 Huff 13.
 W. Huggins 29, 67, 104.
 Sir and Lady Huggins 20, 104.
 Hull 12.
 v. Humboldt 21, 22.
 Humphreys 5, 13.
 Janssen 53, 54, 67, 97.
 Jewell 4, 5, 7, 11, 95.
 St. John 40.
 Johnstone Stoney 27, 37, 103.
 Joly 19, 23.
 Julius 3, 7, 14, 15, 18, 28, 33, 36, 97.
 Jungius 117.
 Kant 95.
 Kayser 29, 111.
 Keeler 110, 113.
 Kelvin 23, 32, 95, 100.
 Kent 13, 14.
 Killing 40.
 Killip 103.
 Kirch 117.
 Kirchhoff 39, 68.
 Klein 22, 27.
 Klinkerfues 105, 109.
 Koch 29.
 Kövesligethy 37.
 van Laar 17, 24.
 Laborde 24.
 Lahire 59.
 Lalande 48.
 Lamont 21.
 Lane 23, 95, 100.
 Langley 24, 29, 37, 48, 65, 115,
 129, 130.
 Laplace 95.
 Lau 107, 108.
 Lenard 22.
 Leverrier 39, 103.
 Lewis 104.
 Liais 8, 52, 53.
 Littrow 27.
 Liveing 29, 68.
 Lockyer 5, 8, 19, 21, 22, 27, 34, 40,
 44, 47, 67, 68, 77, 87, 100, 110,
 112, 117.

- Dr. Lockyer 56.
 Loewy 48, 92.
 Lohse 14, 117, 131.
 Luizet 107.
 Lummer 40.
 Ma Twan Lin 47.
 Mac Dowall 22.
 Macpherson 122.
 Martin 28.
 Markwick 108, 109, 121.
 Mascari 60, 81, 85.
 Matthiessen 97.
 E. W. Maunder 21, 39, 47, 49, 56,
 59, 93, 94.
 Mrs. Maunder 91, 131.
 Mr. and Mrs. Maunder 63, 64, 70, 72,
 74, 75.
 Maury (Miss) 110, 123.
 Maw 44, 87.
 Meldrum 22.
 Mendeleef 103.
 Merlin 47.
 Michelson 12, 14, 15, 37.
 Miller 104.
 Millard Reade 23.
 Millochau 37.
 Mitchell 5, 6, 39.
 Mohler 5, 13.
 Moissan 37.
 Moreux 49.
 Morsman 21.
 Moureaux 21.
 Neate 46.
 Nernst 40.
 Newall 6, 7, 97, 100, 131.
 Newbegin 85.
 Newton 37.
 Noble 103.
 Nyland 119, 121.
 Olbers 121.
 v. Oppolzer 32, 36, 47, 67.
 Ostwald 17.
 Oudemans 47.
 Parkhurst 113.
 Paschen 37.
 Paulsen 20.
 Payne 58.
 Pechüle 113.
 Peek 115.
 Pereira 87.
 Perry 28, 54, 77.
 Pertner 115.
 Peters 27, 59.
 Petit 37.
 Phillips 92.
 Piazzzi Smyth 97.
 Pickering 105, 117, 119, 120.
 Pigott 109.
 Poor 58, 59, 71, 119.
 Pouillet 23, 37.
 Precht 24.
 Pringsheim 26, 29.
 Quénnisset 7.
 Rambaut 37.
 Ramsay 19.
 Rayleigh 37, 115.
 Ranyard 54.
 Reed 120.
 Reyher 117.
 Respighi 49.
 Ricco 48.
 Ritter 23, 95, 100.
 Roberts 99.
 Rosa 59.
 Rosetti 37.
 Rowland 7.
 Rubens 37, 40.
 de la Rue 48, 90, 92.
 Runge 19, 24, 111.
 Russel 40.
 Russell 99.
 E. Rutherford 12, 19, 22.
 L. M. Rutherford 58.
 Sabine 21.
 Schaeberle 21, 47, 103.
 Chr. Scheiner 46, 48, 49, 52, 59, 60,
 62, 80, 92, 93, 94.
 J. Scheiner 29, 36, 37, 67, 99, 110,
 112, 113, 131.
 A. Schmidt 33, 103.
 J. Schmidt 117, 121, 123.
 G. C. Schmidt 14.
 Schönfeld 117, 121.
 Schreiber 47, 48, 49, 79.
 Schreinemakers 44.
 J. F. Schroeter 21.
 J. H. Schroeter 33.
 Schumann 22.
 Schur 58, 71.
 Schuster 6, 96.
 Schwabe 21, 22.
 Secchi 5, 9, 26, 27, 31, 32, 34, 37,
 41, 44, 46, 47, 48, 53, 59, 60, 61,
 71, 76, 80, 83, 84, 85, 88, 94,
 112, 113, 124.
 Seeliger 33.
 Shackleton 34, 98.
 Sidgreaves 48, 117, 128.
 Siemens 26.
 Slipher 117, 125.

- Soddy 19.
 Spoerer 32, 41, 56, 57, 59, 62, 63,
 72, 75, 78, 79, 92, 93, 94.
 Stark 12, 68.
 Stebbins 109, 111, 112, 114, 117, 125,
 126, 127, 128, 129, 130.
 Steen 22.
 Stefan 37.
 Stephani 64.
 van der Stok 49.
 Stratonoff 92.
 Strutt 19.
 Sykora 59.
 Tacchini 26.
 Teisserenc de Bord 22.
 Thalen 4.
 Thomson 125.
 Tramblay 122.
 Travers 40.
 Tromholdt 21, 22.
 Trouvelot 27, 54, 60.
 Turner 109, 130.
 Tyndall 115.
 Very 29, 37, 40.
 Vicaire 37.
 Violle 37.
 Vogel 15, 36, 39, 65, 99, 100, 104,
 105, 110, 112, 117, 130.
 Wargentín 109, 117.
 Waterston 37.
 Weber 37.
 Weinstein 29.
 Westphal 117.
 White 40.
 E. Wiedemann 14, 26, 39.
 G. Wiedemann 29.
 Wien 37, 40.
 Wilczynski 11.
 Williams 47.
 Wilsing 14, 15, 105.
 A. Wilson 47, 48.
 C. T. R. Wilson 22.
 W. E. Wilson 24, 37, 43.
 H. C. Wilson 58.
 Witt 102.
 Wolf 21, 22, 47, 59, 109, 119, 123.
 Wright 107.
 Wurm 117.
 Yendell 108.
 Young 4, 5, 10, 11, 21, 23, 31, 32,
 35, 37, 44, 46, 47, 49, 42, 60,
 61, 65, 66, 67, 68, 75, 85, 89,
 94, 96.
 Zeeman 15.
 Zöllner 27, 37, 65, 110.

On the sections
of a block of eightcells by a space
rotating about a plane.

BY

Mrs. A. BOOLE STOTT and Dr. P. H. SCHOUTE.

(With 2 Plates).

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL IX. N°. 7.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
Maart 1908.

On the sections
of a block of eightcells by a space
rotating about a plane.

BY

Mrs. A. BOOLE STOTT and Dr. P. H. SCHOUTE.

(With 2 Plates).

Verhandelingen der Koninklijke Akademie van Wetenschappen te Amsterdam.

(EERSTE SECTIE.)

DEEL IX. N^o. 7.

AMSTERDAM,
JOHANNES MÜLLER.
1908.

On the sections of a block of eightcells by a space rotating about a plane

BY

Mrs. A. BOOLE STOTT and Dr. P. H. SCHOUTE.

INTRODUCTION.

1. If a space of three dimensions S_3 rotates in S_4 about a given fixed plane π the general case is that S_3 and π have only a line l in common. We will restrict ourselves here to the special case where S_3 passes through π .

If we start from a fourfold infinite block of eightcells and cut it by a space the polyhedra of intersection form a three-dimensional space-filling. When the position of the intersecting space is an arbitrary one, the number of the polyhedra of different shape is infinite. Here we will restrict ourselves once more to the special cases where the number of the polyhedra of different shape is finite. These *commensurable* cases are characterized by the property that any space parallel to the considered position of the rotating space of intersection and passing through a vertex of one of the eightcells cuts the four edges through the opposite vertex in points the distances of which from that last vertex are commensurable with the length of the edge.

Finally we restrict ourselves to the case of a finite block consisting of $3^4 = 81$ eightcells, forming together an eightcell of three times the size, and we suppose that the fixed plane π passes through the centre of this block and is totally normal to a plane π' containing two opposite edges of it.

I. SECTIONS OF A SINGLE EIGHTCELL BY ANY CENTRAL SPACE NORMAL TO THE PLANE CONTAINING TWO OPPOSITE EDGES.

2. Let O be the centre of the eightcell C_8 and PQ one of the two edges situated in π' . Let R be the midpoint of PQ and $C_6^{(3)}$ the cube of intersection of C_8 with the space through OR normal to PQ . Then OR is a diagonal of $C_6^{(3)}$ and the plane of that space, bisecting that diagonal normally, is the fixed plane π ; it cuts $C_6^{(3)}$ in a regular hexagon. So this hexagon is situated in the boundary of the solid that forms the intersection of C_8 by any space containing π , i. e. by any central space normal to the plane π' through O and PQ . This hexagon will be indicated by h_6 .

3. We will try to smooth the way to an exact knowledge of the sections in question by considering the projection of C_8 on the plane π' . It consists (fig. 1) of a rectangle with sides $PQ = 1$ and $PP' = \sqrt{3}$ (where the length of the edge of C_8 is unity) divided by two parallels P_1Q_1 and P_2Q_2 to PQ into three equal rectangles. We indicate successively the projections of the 16 vertices, the 32 edges, the 24 faces and the 8 limiting cubes.

The vertices are

$$(P + 3 P_1 + 3 P_2 + P') + (Q + 3 Q_1 + 3 Q_2 + Q').$$

The edges are

$$(3 PP_1 + 6 P_1 P_2 + 3 P_2 P') + (3 QQ_1 + 6 Q_1 Q_2 + 3 Q_2 Q') \\ + (PQ + 3 P_1 Q_1 + 3 P_2 Q_2 + P'Q').$$

The faces are

$$(3 PP_1 P_2 + 3 P_1 P_2 P') + (3 QQ_1 Q_2 + 3 Q_1 Q_2 Q') \\ + (3 PP_1 Q_1 Q + 6 P_1 P_2 Q_2 Q_1 + 3 P_2 P' Q' Q_2).$$

The limiting bodies are

$$PP_1 P_2 P' + QQ_1 Q_2 Q' + 3 PP_1 P_2 Q_2 Q_1 Q + 3 P_1 P_2 P' Q' Q_2 Q_1.$$

We call the cubes projecting themselves in the lines $PP_1 P_2 P'$ and $QQ_1 Q_2 Q'$ the upper and lower cubes, the six other limiting bodies the side-cubes.

Any line $TT_1 T_2 T''$ parallel to $PP_1 P_2 P'$ is the projection of a cube

of intersection of C_8 with a space parallel to these bearing the upper and lower cubes. So any point U within the rectangle PP_1Q_1Q (or $P_2P'Q'Q_2$) is the projection of an equilateral triangle, which is the intersection of C_8 with the plane, in U entirely normal to the plane of the diagram. Likewise any point V within the rectangle $P_1P_2Q_2Q_1$ is the projection of an equiangular hexagon with alternately equal sides, which becomes a regular hexagon for the points V situated like O at equal distances from P_1Q_1 and P_2Q_2 . Of these triangles and hexagons the projections U and V form the centres.

An intersecting space $S_3(\pi)$ through π projects itself on the plane of the diagram as a line l through O ; therefore the section itself is represented in projection by the segment of l situated within the rectangle $PP'Q'Q$. According to the position of that line-segment we distinguish three different cases of intersection; if ϕ designates the absolute value of the acute angle between l and its position l_0 in which it is parallel to PP' , which angle π we call the *angle of rotation*, the three cases are:

$$1^{\text{st}}. 0^\circ < \phi < 30^\circ, \quad 2^{\text{nd}}. 30^\circ < \phi < 60^\circ, \quad 3^{\text{rd}}. 60^\circ < \phi < 90^\circ.$$

In the first case the endpoints of the segment lie in the edges PQ , $P'Q'$ and the space $S_3(\pi)$ has no points in common with the upper and lower cubes: the section is limited by *three* pairs of parallel planes, whilst in the two other cases it is included by *four* pairs of parallel planes. In the second case the segment still contains points lying outside $P_1P_2Q_2Q_1$: by some of the planes normal to l the section is cut in semiregular hexagons, by others in equilateral triangles. In the third case no point of the segment lies without $P_1P_2Q_2Q_1$: the sections by planes normal to l are exclusively hexagons. We will consider each of these cases separately. But first we wish to make a general remark.

If we consider the line-segment that forms the projection of the solid of intersection as the locus of the points it contains, the section itself appears as built up of an infinite number of infinitely thin slices. Now in the space $S_3(\pi)$, bearing the section, the projection l normal to π in O cuts the plane of any of these slices at right angles in its centre. As the slices of the two different kinds (equilateral triangles and equiangular hexagons) equally admit of a rotation of $\pm 120^\circ$ about their centres, in their planes, we find:

“By a rotation of $\pm 120^\circ$ about its line of projection l the section is transformed into itself; in other words l is an axis of the section, of period three”.

4. The case $\phi < 30^\circ$. In this case the six side-cubes are cut

in congruent lozenges including a rhombohedron; for this is the solid bounded by three pairs of parallel planes admitting of an axis of period three.

We deduce the exact form of the lozenges limiting the section from another source. If $H_1H_2H_3H_4H_5H_6$ (fig. 2) is the hexagon h_6 situated in the plane π , OX_1 and OX_2 are two axes of symmetry of h_6 normal to each other and OX_3 is the axis of the rhombohedron bearing the endpoints A, A' at equal distances from O , then the planes containing the lozenges are

$$\begin{array}{lll} A(H_1H_2), & A(H_3H_4), & A(H_5H_6), \\ A'(H_4H_5), & A'(H_6H_1), & A'(H_2H_3). \end{array}$$

Now the line of intersection AD of the planes connecting A with H_1H_2 and H_3H_4 will meet π in the point of intersection P of H_1H_2 and H_3H_4 , etc. So the edges through A and A' are found by joining A to the vertices of the triangle PQR and A' to the vertices of the triangle $P'Q'R'$. Then the figure is completed by drawing through the pairs of opposite vertices (H_1, H_4) , (H_2, H_5) , (H_3, H_6) of h_6 lines respectively parallel to AP, AQ, AR .

Now from $PH_2 = \frac{1}{3}PQ$ we deduce $DP = \frac{1}{3}AP$, etc.; so the three points B, D, F project themselves on the axis OA in the same point K for which $OK = \frac{1}{3}OA$ (in accordance with the relation $OB = \frac{1}{3}OA$ in fig. 1). Likewise C, E, G project themselves in the same point L for which $OL = \frac{1}{3}OA' = OK$, whilst O is the projection of the six points H_1, H_2, \dots, H_6 on the axis. So we find $BH_1 = H_1C$, the projections KO, OL of these segments of the same line on the axis being equal, i. e. the vertices H_1, H_2, \dots, H_6 of h_6 are the midpoints of the sides of the skew hexagon $BCDEFG$. This gives us the relation $BD = 2H_1H_2$. So the diagonals of the lozenges crossing the axis AA' , or as we will say the *transverse* diagonals, are equal to $\sqrt{2}$, the edge of the eightcell being unity, for in this unit we have $H_1H_2 = \frac{1}{2}\sqrt{2}$.¹⁾

For the other diagonals intersecting the axis, the *axial* diagonals, we find

$$\begin{aligned} AC &= \frac{4}{3}AN = \frac{4}{3}\sqrt{OA^2 + ON^2} = \\ &= \frac{4}{3}\sqrt{OA^2 + (\frac{3}{2}\sqrt{3})^2} = \sqrt{(\frac{4}{3}OA)^2 + (2\sqrt{3})^2}. \end{aligned}$$

Now in fig. 1 we have $B'A = \frac{4}{3}OA$; so AC is the hypotenuse of a rectangular triangle with the kathetæ $B'A$ and $B'C = 2\sqrt{3}$.

¹⁾ We henceforward suppose the side of h_6 to be 3 cm; then $PQ = 3\sqrt{2}$ cm. and $PP' = 3\sqrt{6}$ cm.

Resuming we can say that for the case under consideration the projection on the plane π' (fig. 1) provides us with the means to construct the rhombohedral section, OA being the length of its semiaxis, whilst AC and 6 cm. represent the diagonals of the limiting lozenges. We apply this in fig. 3, where the rectangle $PP'Q'Q$ with the two lines P_1Q_1 , P_2Q_2 dividing it into three equal triangles is repeated in an altered position, to the two extreme cases of this first group of sections, i. e. for $\phi = 0$ and for $\phi = 30^\circ$. By means of the rectangular triangles $A_1B_1'C_1$ and $A_1B_2'C_2$ the axial diagonals A_1C_1 and A_2C_2 are found and on these the lozenges $A_1B_1C_1D_1$ and $A_2B_2C_2D_2$ with transverse diagonals $B_1D_1 = B_2D_2 = 6\text{ cm.}$ are constructed. In accordance with the fact that the section is a cube for $\phi = 0$, $A_1B_1C_1D_1$ is a square. In all other cases the axial diagonal AC is longer than the transverse diagonal BD ; so, if we like, we may call AC the macrodiagonal and BD the brachidiagonal.

Now whilst ϕ increases from 0° to 30° the section (fig. 2) changes in a simple manner. Whilst the intersection of the rhombohedron with the central plane π normal to the axis is and remains the regular hexagon h_6 , the two endpoints A , A' of the axis move away from O , starting from a distance $\frac{3}{2}\sqrt{6}\text{ cm.}$, to a distance $3\sqrt{2}\text{ cm.}$ So we may say that the cube corresponding to the original position of the rotating space is stretched out in the direction of one of its diagonals into a rhombohedron.

If we suppose for a moment that the considered eightcell forms part of an infinite pile of eightcells built up in the direction of the edge PQ , so that the lower cube of an upper one coincides with the upper cube of the next lower one, and we disregard the limiting cubes common to two adjoining eightcells — as if we wished to change a range of cells into a long vessel by removing the interior diaphragms — we obtain a fourdimensional prism, the right section of which is a cube. This prism will be cut by *any* space in a rhombohedron, which only transforms itself into a hexagonal prism with h_6 as right section for $\phi = 90^\circ$; this result will be applied directly.

5. The case $30^\circ < \phi < 60^\circ$. In this and in the following case the rhombohedral section of the space $S_3(\pi)$ with the fourdimensional prism found above is truncated by two planes perpendicular to the axis AA' in the points W , W' where that axis meets the projections PP' and QQ' of the upper and lower cubes. Here the points W , W' lie on PP_1 , Q_2Q' ; so the end-planes of the truncated rhombohedron bear equilateral triangles and

the equal portions of the rhombohedron lying outside the eightcell are regular triangular pyramids. In other words: the distance of the endplanes to the plane π must exceed that of the vertices of the skew hexagon $BCDEFG$ to that selfsame plane, the sides of that hexagon not being cut by the endplanes.

In fig. 3 (in which we lay down the different results) the faces of the section are constructed for the two cases of this group we wish to consider, the cases where the endpoint W of the line-segment l situated on PP' is the point W_3 halfway between P and P_1 and where this point W_4 coincides with P_1 . The figure shows the two lozenges $A_3B_3C_3D_3$ and $A_4B_4C_4D_4$, obtained in the way described. By means of the point W_3' where the normal in W_3 on A_3B_3' cuts A_3C_3 the line E_3F_3 normal to A_3C_3 is found, giving us in its turn the truncated lozenge $B_3C_3D_3E_3F_3$; the section is limited by six of these truncated lozenges and two equilateral triangles with E_3F_3 as side. In repeating this construction for $\phi = 60^\circ$, where W_4 coincides with P_1 we find for W_4' the centre of the lozenge $A_4B_4C_4D_4$, i. e. the truncated lozenge becomes an equilateral triangle $B_4C_4D_4$, the section itself is an octahedron. This is as it should be: in the case $\phi = 60^\circ$ the projection AA' (fig. 1) is normal to the diagonal $P'Q$ of the eightcell and therefore $S_3(\pi)$ is normal to that line.

6. The case $60^\circ < \phi < 90^\circ$. Here the rhombohedron is truncated at both ends by planes normal to the axis AA' bearing hexagonal sections.

In fig. 3 the sections with the side-cubes are constructed for the two cases determined by the relations $P_2W_5 = 3W_5P_1$ and $P_2W_6 = 2W_6P_1$. The results, obtained in the indicated way, are the isosceles trapezia $E_5F_5G_5H_5$ and $E_6F_6G_6H_6$; the corresponding endplanes bear equiangular hexagons with the alternate sides equal to E_5F_5 , G_5H_5 and to E_6F_6 , G_6H_6 . The manner in which the midpoints \overline{W}_5' , \overline{W}_6' and W_5' , W_6' of the lines EF and GH on the macrodiagonal AC are deduced from \overline{W}_5 , \overline{W}_6 and W_5 , W_6 is indicated in the figure.

In the extreme case $\phi = 90^\circ$ the section becomes a hexagonal prism bounded by six rectangles with sides of $3\sqrt{2}$ cm. and 3 cm. and by two regular hexagons with sides of 3 cm.

7. After this explanation we think it will be evident to the reader that fig. 3 enables us to make cardboard models of the seven sections considered.¹⁾ But this figure can teach us quite as well

¹⁾ A more expeditious method will be given farther on.

how to find the images of the different sections in parallel projection, in the manner in which fig. 2 already represents the second case $\phi = 30^\circ$. For the new problem, which makes its appearance in the third case of the pentagon $B_3C_3D_3E_3F_3$, viz. to find the triangles (and hexagons) situated in the planes truncating the rhombohedron, is easily solved. So in fig. 4, corresponding to that case, the line WN' through W parallel to ON meets AC in a point N' of EF and this construction always holds; in this special case it is more to the point however to remember that E is the midpoint of AD , etc.

In fig. 4 the angle ANO indicates the inclination of the faces of the section on the plane π of the hexagon h_6 . It is easy to find the general relation between this angle ψ (fig. 1) and the angle of rotation ϕ . From the two relations

$$OR = OA \cos \phi, \quad OA = ON \tan \psi$$

can be deduced

$$\tan \psi = \sec \phi \sqrt{2}.$$

We lay down what we have hitherto found in the following:

TABLE OF RESULTS.

Section.	F A C E S.	Tang	Tang	Angle	Angle
		ϕ	ψ	ϕ	ψ
I	6 squares $A_1B_1C_1D_1$ (cube).....	0	$\sqrt{2}$	0°	$54^\circ 44' 9''$
II	6 lozenges $A_1B_2C_2D_2$	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	30°	$58^\circ 30' 54''$
III	6 pentagons $B_3C_3D_3E_3F_3$ and 2 equilateral triangles (side E_3F_3).....	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{14}$	$40^\circ 53' 36''$	$61^\circ 52' 28''$
IV	8 equilateral triangles $B_4C_4D_4$ (octahedron).....	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	60°	$70^\circ 31' 44''$
V	6 trapezia $E_6F_6G_6H_6$ and two equiangular hexagons (sides E_6F_6 , G_6H_6).....	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{26}$	$73^\circ 53' 52''$	$78^\circ 54' 15''$
VI	6 trapezia $E_6F_6G_6H_6$ and two equiangular hexagons (sides E_6F_6 , G_6H_6).....	$3\frac{1}{3}$	$2\sqrt{14}$	$79^\circ 6' 24''$	$84^\circ 42' 43''$
VII	6 rectangles ($3\sqrt{2}$ cm and 3 cm) and 2 h_6 (hexagonal prism).....	∞	∞	90°	90°

8. Before we can pass to the study of the block of 81 eight-cells we must say a word about the section of a single eightcell by a space normal to the plane π' but not passing through the

centre O ; for it goes without saying that a space central to the central eightcell of the block is in general excentric with respect to the other eightcells of it.

If the projection l of the excentric intersecting space is inclined to the edge PQ , the section is either a whole rhombohedron or a part of it. The first case occurs when the two endpoints of the segment of l lying within the rectangle $PQQ'P'$ are points of the edges PQ , $P'Q'$; in the other case the section is a truncated rhombohedron, truncated at one end or at both ends according to whether one or neither of these endpoints lie on these edges. If it is truncated at one end it may happen that we have to deal with a rhombohedron of which only a triangular pyramid is cut off, or left; or that the endplane bears a hexagon, and the section is greater than, equal to, or less than half the rhombohedron. If it is truncated at both ends the two endplanes can be situated on different sides of the middle plane containing a regular hexagon equal to h_6 , or on the same side; so we may even obtain a truncated triangular pyramid.

9. The method of investigating the sections of an eightcell by a space rotating about a central plane π by means of the projection in the plane π' in the centre totally normal to it has been brought most to the front in the preceding pages, as indeed it is our opinion that this method is preferable for its generality to any other¹⁾, which opinion is strengthened by its applicability to a block of eightcells. But still we must acknowledge that, with regard to the construction of the side-faces of the rhombohedral sections, a more direct method, more suitable to the wants and needs of the maker of cardboard models, may be obtained by cutting one

¹⁾ If we suppose in space S_n of n dimensions a measure-polytope P_{2n} to be given and we have to consider the sections of this polytope by a pencil of central spaces S_{n-1} normal to the plane π' passing through two opposite edges PQ , $P'Q'$, the same method can be used. In this case the projection of the given polytope P_{2n} on to the plane π is a rectangle divided into $n-1$ equal rectangles by $n-2$ lines parallel to PQ , $P'Q'$. The section is either a measure-polytope $P_{2(n-1)}$ of $n-1$ -dimensional space, stretched out in the direction of one of the diagonals figuring as axis with the period $n-1$, which may be called a rhombotope, or a mutilated rhombotope truncated at both ends. With regard to the section of P_{2n} with the central space S_{n-2} to which the plane π' is entirely normal, which $n-2$ -dimensional solid is common to all the $n-1$ -dimensional sections, we can only remark here, that its vertices are vertices of P_{2n} or midpoints of edges of P_{2n} according to n being even or odd. We add that a new method of dealing with this $n-2$ -dimensional section, which is indeed a generalisation of the fact that in fig. 2 the hexagon h_6 is the part of the plane π common to the two equilateral triangles PQR , $P'Q'R'$, will appear shortly in the *Proceedings* of this Academy (*Verslagen*, Dec. 1907, p. 467, *Proceedings*, Jan. 1908, p. 485).

of the side-cubes of the eightcell by the rotating space. We will close this first section by explaining this.

We consider that side-cube of the eightcell of which the lozenge $ABCD$ (fig. 2) is a section, one of the three side-cubes projecting themselves on the rectangle PP_2Q_2Q (fig. 1). The space of that cube meets the plane π in the line H_1H_2 (fig. 2); this side of the hexagon h_6 joins the centres H_1 , H_2 of the two adjacent faces of the cube projecting themselves on to the rectangle $P_1P_2Q_2Q_1$ (fig. 1) the centre O of which forms the projection of π and therefore of H_1H_2 .

We project the chosen side-cube on to the plane passing through PQ and the centre of the cube — and containing therefore the opposite edge which again may be called P_2Q_2 (fig. 5) — as a rectangle PP_2Q_2Q with the sides $PQ = 3 \sqrt{2} \text{ cm.}$, $PP_2 = 6 \text{ cm.}$ and remark that the centre O of $P_1P_2Q_2Q_1$ — where P_1 and Q_1 bisect PP_2 and QQ_2 — is still the projection of H_1 and H_2 , and therefore of H_1H_2 . This projection PP_2Q_2Q ($PP_2 = 6 \text{ cm.}$) differs from the projection PP_2Q_2Q ($PP_2 = 2 \sqrt{6} \text{ cm.}$) of fig. 1 and fig. 3, which difference is due to the fact that the planes of projection differ. Indeed the plane of projection π' of fig. 1 and fig. 3 passes through PQ and the centre of the eightcell, whilst that of fig. 5 is determined by PQ and the centre of the chosen side-cube; the first plane π' indicates the angles of rotation of the intersecting space turning about π , the second cannot do this. So the question arises: „how can we find the lines of intersection l'_1 , l'_2 , . . . l'_7 of the new plane of projection with the seven considered positions of the rotating space?” To obtain an answer we remark that any line of this new plane of projection, e. g. the diagonal PP_2 of the face of the cube which projects itself on PP_2 , is divided by the different points of intersection with the lines l'_1 , l'_2 , . . . l'_7 we are bent on determining, in the same proportion as the projection PP_2 of that selfsame diagonal on π' is divided by the corresponding lines l_1 , l_2 , . . . l_7 of fig. 3. After having obtained these lines (fig. 5) the construction of the side-faces is very easy. Indeed we know that the normal erected in the threedimensional space of the cube on the plane PP_2Q_2Q in any point U within that rectangle, reckoned from U to either of the points of intersection with the boundary of the cube, is equal to the distance of that point U from the nearer of the two edges PQ , P_2Q_2 . So in the case III the half $C_3D_3E_3W_3$ of the pentagon $B_3C_3D_3E_3F_3$ of fig. 3 is obtained by erecting in M_3 and W_3 normals $M_3D_3 = P_1P$ and $W_3E_3 = W_3P$ on l'_3 ; so are found the halves $A_1C_1D_1$, C_2D_2P ,

$C_3D_3E_3W_3$, $P_1Q_2D_4$, $F_5G_5W_5W_5'$, $F_6G_6W_6W_6'$ of the six side-faces already given in fig. 3 and moreover in $P_1W_7W_7'Q_1$ even the half of the side-face $P_1P_2Q_2Q_1$ of the hexagonal prism of case VII.

It goes nearly without saying that also by this new simple method the shape and size of *all* the faces can be found. So in the case *V* the endplanes of the section are equiangular hexagons with alternately equal sides E_5F_5 , G_5H_5 . And by constructing the unknown katheta of a right-angled triangle, the hypotenuse of which is the segment of l_5' within PP_2Q_2Q while one katheta is the difference of the distances of the sides E_5F_5 , G_5H_5 to the centre of the hexagon, we find the distance of the endplanes, which will enable us to make a drawing of the corresponding solid in parallel perspective, etc.

II. SECTIONS OF THE BLOCK OF EIGHTCELLS.

10. Before entering upon the subject of the sections it will be well to say a few words about the block itself. We suppose 81 eightcells to be built up into a rectangular block having three along each edge and, in the fourdimensional space containing the block that is itself an eightcell of three times the size, we imagine a plane π' passing through two opposite edges of this large block and therefore containing its centre, which may still be indicated by O . Now the block is to be cut by a space $S_3(\pi)$ normal to π' in O and containing therefore the plane π in O normal to π' . This plane π cuts the large block in a regular hexagon, the sides of which are three times the side of h_6 ; we will call it h_6' .

Now in the initial position of the intersecting space $S_3(\pi)$, the case $\Phi = 0$, the section evidently consists of a block of 27 cubes, central sections of 27 of the 81 eightcells, forming the "middle layer" of the block, while the other two layers lie beyond $S_3(\pi)$ in opposite directions (parallel to the two edges situated in π') which may be called "above" and "below" or "plus" and "minus". This section of a very simple character is represented in fig. 6 ¹⁾ in parallel perspective, in the same manner as fig. 2; but in order not to obtain too large figures in future we will suppose the sides of h_6 to be 1 cm., those of h_6' 3 cm. As fig. 6 shows, the cubes of this section have been numbered in a definite way 1, 2, 3, . . . ,

¹⁾ The shading of the figs. 6, 7, 10 will be explained later on.

27, which are in reality the numbers we assign to the eightcells of the middle layer; in the same manner the eightcells of the layer above are designated by $+1, +2, +3, \dots, +27$, those of the layer below by $-1, -2, -3, \dots, -27$, so that above and below 1 are $+1$ and -1 , etc.

It may be remembered that, while each of the 27 cubes of the block is a central section of an eightcell parallel to two of its opposite limiting cubes (the upper cube and the lower cube), each face is a section of a side-cube, each edge a section of a face and each vertex a section of an edge. Also the cubes which are in plane, line, or point contact — that means the cubes which have a plane, line, or point in common — are sections of eightcells respectively in space, plane, or line contact.

11. In order to identify the limiting cubes of each eightcell as their sections with the space $S_3(\pi)$ take different forms and positions we distinguish them by letters. We suppose the cubes a, b, c, d , to meet at one of the vertices of the eightcell and represent the parallel cubes meeting at the diagonally opposite vertex by a', b', c', d' ; of these d and d' are the upper cube and the lower cube. The visible faces of the cube 1 (fig. 6) correspond in this manner to the side cubes a, b', c of the eightcell 1.

The three pairs of parallel planes dividing the large cube of three times the size into the 27 separate cubes are the intersections of the initial position of the space $S_3(\pi)$ with three of the four pairs of parallel spaces dividing the large eightcell of three times the size into the 81 separate eightcells. The fourth pair of dividing parallel spaces is parallel to $S_3(\pi)$ and divides the fourdimensional block into the three layers which we have called middle layer, plus layer and minus layer. We may illustrate the positions of the cubes limiting the eightcells, and the manner in which the eightcells are numbered and their limiting cubes lettered, by giving a small table of the space contact of the eightcell 14, the central one of the block, with the surrounding ones. The eightcell 14 is:

in aa'	contact	with the eightcell	11,
„ bb'	„	„	23,
„ cc'	„	„	13,
„ $d'a$	„	„	17,
„ $b'b$	„	„	5,
„ $c'c$	„	„	15,
„ dd'	„	„	$+14$,
„ $d'd$	„	„	-14 .

Here we mean that the a cube of eightcell 13 coincides with the a' cube of eightcell 11, etc. ¹⁾.

The section of the block of cubes by the plane π is shewn in fig. 7, the letters a, b', c, a', b, c' referring to the limiting cubes of the block itself. It will be seen that, as to their sections with this plane, the intersected cubes can be arranged in three groups. The first consists of 2, 4, 12, 14, 16, 24, 26 cut in regular hexagons, the second of 1, 11, 13, 21, 23, 25 cut in equal and similarly placed equilateral triangles, the third of 3, 5, 7, 15, 17, 27 also cut in equal and similarly placed equilateral triangles, oppositely placed with respect to those of the second group. And the non-intersected cubes, eight in number, consist, as to the distance of their centres from π , of four different groups
19; 10, 20, 22; 6, 8, 18; 9.

So we find seven groups in all; they will reappear directly in a more important point of view.

12. Let us now consider the projection of the 81 eightcells on to the plane π' . In the above adopted reduced scale the projection of the block (fig. 8) is a rectangle with sides $3\sqrt{2}$ cm. and $3\sqrt{6}$ cm.; in this large rectangle the concentric similar and similarly placed rectangle $PP'Q'Q$, the sides of which are $\sqrt{2}$ cm. and $\sqrt{6}$ cm., represents the projection of the central eightcell 14. By producing PP' and QQ' the large rectangle is divided into three strips, an upper one, a middle one and a lower one, which are evidently the projections of the three sets of 27 eightcells, forming respectively the plus layer, the middle layer and the minus layer. Now the manner in which the 27 eightcells of the middle layer project themselves on the middle strip $P_0P_0'Q_0'Q_0$ can be deduced from that in which the 27 cubes of the section by the initial position of the space $S_3(\pi)$ project themselves on the line AA' which forms the projection of $S_3(\pi)$ and is at the same time (fig. 6) a diagonal of the block of the 27 cubes. So we have now to consider for a moment the projection of the 27 cubes on the diagonal AA' .

If we first direct our attention to the vertices and begin (fig. 6) with those of the large cube we find as projections the two extremities A, A' and two points dividing AA' into three equal parts. If then we pass to the cubes 9, 14, 19 we see that the projec-

¹⁾ In an infinite block of eightcells the numbers of eightcells respectively in space, plane, line and point contact with any eightcell considered as the central one are equal to the numbers of limiting bodies, faces, edges, vertices of that eightcell, i.e. 8, 24, 32, 16. So we find, the central eightcell included, 81 eightcells in all, i.e. all the eightcells of our block are wanted in order to include the central one entirely.

tions of their vertices consist of A' , A and eight points dividing AA' into nine equal parts. So we easily convince ourselves of the fact that the 64 vertices of the 27 cubes project themselves into the indicated ten points ¹⁾ and that the projection of any of the 27 cubes on AA' covers a third part of that line limited by two of these ten points. Returning to the projection of the 27 eightcells of

¹⁾ If the three edges of the block of cubes concurring in A are taken as positive axes of coordinates and we suppose the edge of the cubes to be unity, the coordinates of the vertices are (p, q, r) , where p, q, r are to be chosen from 0, 1, 2, 3. So, if $n(p, q, r)$ represents the number n of permutations with definite p, q, r and we join together the numbers $n(p, q, r)$ for which $p + q + r$ has the same value, we find groups of vertices lying in the same plane $x + y + z = \text{constant}$, i. e. points with a common projection on AA' . In this manner we get

$$1(000), 3(100), 3(200) + 3(110), 3(300) + 6(210) + 1(111), \\ 6(310) + 3(220) + 3(211), \text{ etc.}$$

i. e. groups of 1, 3, 6, 10, 12, 10, 6, 3, 1 vertices projecting themselves in the ten different points on AA' .

This result admits of the following general extension:

"If the $(p+1)^d$ vertices of a block of p^d measure-polytopes of d -dimensional space (arranged in the form of a measure-polytope of p times the size) are projected on to a central diagonal of the block, the projections are the endpoints of that diagonal and the $pd-1$ points that divide it into pd equal parts. Moreover the numbers of the projections coinciding respectively with these $pd+1$ points are the coefficients of the successive powers of x in the polynomial $(1+x+x^2+\dots+xp)^d$."

No doubt this theorem can be proved in different ways, e. g. by the induction from $p-1$ to p and $d-1$ to d , or more simply still by the generation of the configuration of the vertices, proceeding from a row of $p+1$ equidistant points to a row of $p+1$ squares, etc. Of the demonstration connected with the manner in which the theorem was found we can only give a summary sketch here. It consists of three parts. In the first part we consider the special case p infinite, in which the block fills up the $\frac{1}{2^d}$ th part of d -dimensional space corresponding to the positive sense of the d axes OX_1, OX_2, \dots, OX_d ; in that case the result depends, in the way indicated in the theorem, on the form $(1-x)^{-d}$. In the second part we show that the finite block of the theorem may be considered as the algebraic sum of 2^d infinite blocks equipollent to the infinite block of the first part but showing with regard to the position of the vertex at finite distance that originally occupied the origin the effect of a parallel translation, any of the vertices of the finite block forming the origin of one of these 2^d infinite ones; in this algebraic sum the sign of any of the 2^d infinite blocks is positive or negative according to the number of coordinates of its origin differing from nought being even or odd. In the third part we prove that this sum of infinite blocks can be represented by $(1-B)^d$, if B^k represents one of these blocks, the system of coordinates of which origin consists of k units and $d-k$ noughts (1 standing for B^0 , i. e. for the infinite block in its original position) and then it is clear that this geometric composition of the 2^d infinite blocks to the finite one is to be translated algebraically by multiplying the result $(1-x)^{-d}$ by $(1-xp+1)^d$. So we find $\left(\frac{1-xp+1}{1-x}\right)^d$ or $(1+x+x^2+\dots+xp)^d$.

We may add that the general theorem given above is also an extension of the problem in how many ways the word *abracadabra* written in a triangle may be read, or in how many ways the king of the chessboard can march from a given row to any row k squares higher (see E. LUCAS, "*Théorie des nombres*", p. 13, 14).

the middle layer on the middle strip of fig. 8 we find that the projection of any of these eightcells covers a third part of the strip, consisting of three of the nine parts into which this strip can be divided by lines parallel to P_0Q_0 . Now, if we arrange (fig. 6) the 27 cubes in groups, and reckon as belonging to the same group these cubes that cover in projection on AA' the same third part, we alight evidently on the seven groups found above. So in order to apply this result to the projection of the block of eightcells, we have repeated under the projection (fig. 8) the line AA' in seven parallel positions $A_1A_1', A_2A_2', \dots, A_7A_7'$, indicated on each of them the position of the third part that forms the projection and inscribed at each of these third parts the numbers

19; 10, 20, 22; 1, 11, 13, 21, 23, 25; etc.

of the eightcells projecting themselves on the corresponding third part of the strip. For convenience we will designate these groups of eightcells by $G_1, G_3, G_6, G_7, G_6', G_3', G_1'$ indicating by the subscript the number of the eightcells, and we will add the signs $+$ and $-$ to the corresponding groups of the plus layer and the minus layer ¹⁾.

13. Now we are quite provided with the means of determining, for any arbitrary position of the intersecting space $S_3(\pi)$, the number, form and size of the different solids, sections of separate eightcells which fill up the section of the large block of eightcells, which is itself an eightcell of three times the size. We may even assert that this process, complicated as it seems, in reality is easier than another to which we are accustomed and which we perform daily: "to see what o'clock it is." For our dial — the plane π' on to which the block of eightcells has been projected — has one hand only — the projection of the intersecting space turning round O . But in order to facilitate the enumeration of the results it will be well to introduce beforehand a simple notation for the different kinds of solids we obtain.

As we have seen the section of any of the 81 eightcells is a

¹⁾ If we replace the 27 cubes by their centres, the projection of these centres on a diagonal of the block of cubes gives us a range of seven points coinciding with the centres of the rectangles P_0PQQ_0 , $P'P_0'Q_0'Q'$ and the five points dividing the segment of AA' limited at these two points into six equal parts. So the numbers 1, 3, 6, 7, 6, 3, 1 are found — compare the preceding note — as the coefficients of the powers of x in $(1+x+x^2)^3$.

In the extension of the problem to the measure-polytope $P_{2n}^{(p)}$ with edges equal to p units of space S_n divided into p^n measure-polytopes $P_{2n}^{(1)}$ with edges unity, the numbers of polytopes of the groups G coinciding in projection on π' (compare the preceding note) are the coefficients of the powers of x in $(1+x+x^2+\dots+x^{p-1})^n$.

rhombohedron or a part of it, obtained by truncation at one end or at both ends by planes normal to the axis; if we except the special case $\phi = 90^\circ$, which will be treated separately, this rule is general. Now this section can be designated by the symbol $a(p, q)$, where a represents the length of the axis of the unmutilated rhombohedron expressed in *cm.*, whilst p and q indicate the fractions of the axis cut off by the endplanes, the first of these parameters referring to that endplane the external normal of which corresponds in sense to $A'A$. For the unmutilated rhombohedron is determined by the hexagonal section normal to the axis in the centre, which section is the same for all the rhombohedra, and the length of the axis. So $a(0, 0)$ stands for a whole rhombohedron, $a(p, 0)$ or $a(0, p)$ for a rhombohedron truncated at one end, $a(p, p)$ for a rhombohedron truncated at both ends admitting of a plane normal to the axis dividing it into two congruent halves; so $a(p, q)$ transforms itself into $a(q, p)$ by a rotation through 180° about any line normal to the axis, etc.

14. We consider the case III ($\tan \phi = \frac{1}{2} \sqrt{3}$) in detail, and to that end we reproduce in fig. 9 the projection of the block of eightcells on π' and the projection $l = AB_1C_1 \dots A'$ of the intersecting space. Here within the rectangle $PP'Q'Q$ that is the projection of any eightcell of the group G_7 , let us say the central one 14, lies the segment C_2C_2' of l , whilst the points B_3, B_3' on the edges $PQ, P'Q'$ are the endpoints of the axis of the rhombohedron. So, as $B_3C_2 = C_2'B_3'$ is a sixth part of B_3B_3' , we find for the section $\frac{1}{2} \sqrt{42} (\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$.

In general the value of a is $\sec \phi \sqrt{6}$; in the following table, which gives us for all the groups of intersected eightcells 1st. the segment of l lying within the projection, 2nd. the segment of l representing the axis of the unmutilated rhombohedron, 3rd. the symbol $a(p, q)$, this value of a is indicated at the head, which allows us to use the simplified symbol (p, q) .

TABLE OF RESULTS FOR CASE III,

$$\tan \phi = \frac{1}{2}\sqrt{3}, \quad \tan \psi = \frac{1}{2}\sqrt{14}, \quad a = \frac{1}{2}\sqrt{42}$$

G_7	$C_2 C_2'$	$B_3 B_3'$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$+ G_7$	$B_3 C_2$	$B_3 B_3'$	$(0, \frac{5}{6})$	$- G_7$	$C_2' B_3'$	$B_3 B_3'$	$(\frac{5}{6}, 0)$
G_6	$C_2 B_4'$	$B_2 B_4'$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$+ G_6$	$B_2 C_2$	$B_2 B_4'$	$(0, \frac{1}{2})$	$- G_6'$	$C_2' B_2'$	$B_4 B_2'$	$(\frac{1}{2}, 0)$
G_6'	$B_4 C_2'$	$B_4 B_2'$	$(0, \frac{1}{2})$	$+ G_5$	$C_1 C_2$	$B_1 B_4$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$	$- G_5'$	$C_2' C_1'$	$B_4' B_1'$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$
G_3	$C_2 B_4$	$B_1 B_4$	$(\frac{5}{6}, 0)$	$+ G_1$	$C_1 B_3$	$A B_3$	$(\frac{1}{2}, 0)$	$- G_1'$	$B_3' C_1'$	$B_3' A'$	$(0, \frac{1}{2})$
G_3'	$B_4' C_2'$	$B_4' B_1'$	$(0, \frac{5}{6})$								

So if we represent the really different pieces $(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$, $(\frac{1}{2}, 0)$, $(\frac{5}{6}, 0)$ by A , B , C we find:

$$\begin{array}{l}
 G_7, + G_3, - G_3' \\
 G_6, + G_1, - G_6' \\
 G_6', + G_6, - G_1' \\
 G_3, - G_7 \\
 G_3', + G_7
 \end{array}
 \left\{
 \begin{array}{l}
 (\frac{1}{6}, \frac{1}{6}) \\
 (\frac{1}{2}, 0) \\
 (0, \frac{1}{2}) \\
 (\frac{5}{6}, 0) \\
 (0, \frac{5}{6})
 \end{array}
 \right\}
 \begin{array}{l}
 13 \text{ pieces } A \\
 26 \text{ ,, } B \\
 20 \text{ ,, } C \\
 \hline
 59 \text{ pieces altogether.}
 \end{array}$$

So in case III 59 of the 81 eightcells are cut.

15. In the following table giving the results for the seven cases considered Q , O , T , H , P denote respectively cube, octahedron, tetrahedron, hexagonal prism, triangular prism, whilst A , B , C , D , E represent less regular sections of eightcells.

GENERAL TABLE OF RESULTS.

Number of the case	Tangent of ϕ	Tangent of ψ	Value of α	Number of pieces	Enumeration of the different sections.			
I	0	$\sqrt{2}$	$\sqrt{6}$	27	all $G : 27 Q$.			
II	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	$\frac{2}{3}\sqrt{6}$	$2\sqrt{2}$	45	$G_7 + G_1 - G_1'$ $G_6' + G_3$	$(0, 0)$ $(\frac{1}{3}, 0)$ $(0, \frac{1}{3})$	$9 A$ $18 B$	$G_3' + G_6$ $- G_6'$ $(\frac{2}{3}, 0)$ $(0, \frac{2}{3})$ $1 \sim C$
III	$\frac{1}{2}\sqrt{3}$	$\frac{1}{2}\sqrt{14}$	$\frac{1}{2}\sqrt{42}$	59	$G_7 + G_3 - G_3'$ $G_6' + G_1 - G_1'$ $G_6' + G_6 - G_1'$	$(\frac{1}{6}, \frac{1}{6})$ $(\frac{1}{2}, 0)$ $(0, \frac{1}{2})$	$13 A$ $26 B$	$G_3' + G_7$ $- G_7'$ $(\frac{5}{6}, 0)$ $(0, \frac{5}{6})$ $20 C$
IV	$\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{6}$	51	$G_7 + G_6 - G_6'$	$(\frac{1}{3}, \frac{1}{3})$	$19 O$	$G_6' + G_3' - G_7'$ $G_6' + G_7' - G_3'$ $(\frac{2}{3}, 0)$ $(0, \frac{2}{3})$ $32 T$
V	$2\sqrt{3}$	$\sqrt{26}$	$\sqrt{78}$	63	$G_7 (\frac{5}{12}, \frac{5}{12})$ $G_6 (\frac{4}{3}, \frac{1}{3})$ $G_6' (\frac{1}{12}, \frac{3}{4})$	$7 A + G_7 - G_6'$ $+ G_6 - G_7$ $(\frac{4}{12}, \frac{7}{12})$ $(\frac{7}{12}, \frac{4}{12})$	$26 C' + G_3' - G_6'$ $(\frac{11}{12}, 0)$ $(0, \frac{11}{12})$ $18 D$	
VI	$3\sqrt{3}$	$\sqrt{14}$	$\sqrt{42}$	57	$G_7 (\frac{4}{9}, \frac{4}{9})$ $G_6' (\frac{4}{9}, \frac{4}{9})$ $G_6 (\frac{1}{9}, \frac{7}{9})$	$7 A + G_7 (\frac{1}{3}, \frac{5}{9})$ $- G_7' (\frac{5}{9}, \frac{1}{3})$ $12 B$	$+ G_6' (0, \frac{8}{9})$ $- G_6 (\frac{8}{9}, 0)$ $12 D$ $+ G_6' (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $- G_6 (\frac{2}{3}, \frac{2}{3})$ $12 E$	
VII	∞	∞	∞	57	$G_7 + G_7 - G_7$	$21 H$	$G_6' + G_6' - G_6'$ $G_6' + G_6' - G_6'$ $36 P$	

It goes without saying that the *different* A, B, C, D mentioned in this table stand for *different* sections.

16. Now we have still to solve this problem: "if we are given, for any of the six cases II, III, . . . , VII considered, a bag containing the set of models representing the corresponding sections of the eightcells of the block, how can these pieces be put together so as to obtain the corresponding section of the block itself?"

This problem can be easily solved in the following way. We begin by arranging the set of models into classes according to their shape, subdivide these classes into groups according to the last table of results and assign to each model of any group one of the numbers of the eightcells belonging to that group, without sign, with the sign $+$ or with the sign $-$ according to the layer the group belongs to. Then we inscribe on the faces of any model originating from the upper cube and the lower cube of the corresponding eightcell the letters d and d' , on the three or the six side-faces originating from the side-cubes the letters a, b, c or a', b', c' or both triplets, taking care to put the right triplet at the right place and to write the three constituents of each triplet in due order of succession. After having prepared the work in this way we have only to consult a table of contact, of which we gave above only the part referring to the central eightcell 14, in order to be able to bring to coincidence the faces of the models that are to coincide, i. e. in order to be able to build up the section of the block of eightcells in the way desired.

The result of this solution is given in the six groups of figures 10_{II}, 10_{III}, . . . 10_{VII} corresponding to the six cases II, III, . . . VII. Each of these groups consists of:

1st. one relative large figure in parallel perspective representing the section of the block of eightcells built up of the pieces that are sections of the separate eightcells,

2nd. two or more small figures in parallel perspective marked A, B, C, D, E , representing these different pieces,

3rd. one or two plane sections of the solids of intersection obtained with planes on which we will fix attention afterwards.

17. It will be necessary now to say a word or two about the shading and the colouring of the groups of fig. 10; we begin by the shading.

The shading of the figures 10 is based on the supposition that the eightcells of the block are alternately black and white in the manner which may be considered as the consequent fourdimensional

extension of the shading of the chessboard squares. So the shading of the eightcells of the middle layer is shown in that of the cubes (fig. 6) forming their sections with the space $S_3(\pi)$ in its initial position I, and in the sections of these cubes by the plane π (fig. 7); to obtain the shading of the eightcells of the plus and the minus layer we have to invert black and white of the corresponding eightcells, i. e. of the eightcells bearing the same number, of the middle layer. Then two eightcells in space contact or in line contact are alike, two eightcells in plane contact or in point contact are different with regard to the shading. By adding that we suppose the central eightcell to be white the shading is quite determined by the stated rule of contacts.

But there is more. For we can prove easily by this rule that any two eightcells the projections of which on the plane π' coincide are alike with regard to the shading. So the three eightcells of G_3 projecting themselves (fig. 8) on the rectangle equal to P_0PQQ_0 and overlapping this for two thirds must coincide in shade, as they are in space contact with the unique eightcell of G_1 that projects itself on P_0PQQ_0 and therefore differ in shade from that eightcell; the cube common to this eightcell and any of the three belonging to G_3 projects itself on the overlapped part of P_0PQQ_0 . So we can go on and assert that the six eightcells of G_6 must correspond in shade, each of them being in space contact with at least one of the three eightcells of G_3 and therefore differing in shade with these, etc.¹⁾ So we find easily the following result:

$$\begin{array}{l} \text{White are the} \\ 41 \text{ eightcells} \dots \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} + G_1 & & + G_6 & & + G_6' & + G_1' \\ & G_3 & & G_7 & & G_3' \\ - G_1 & - G_6 & & - G_6' & & - G_1' \end{array} \right| ,$$

$$\begin{array}{l} \text{black are the} \\ 40 \text{ eightcells} \dots \end{array} \left| \begin{array}{cccccc} & + G_3 & & + G_7 & & + G_3' \\ G_1 & & G_6 & & G_6' & G_1' \\ - G_3 & - G_7 & - G_3' & & & \end{array} \right| .$$

Now the question arises: "from the fact that the eightcells of the same group correspond in shade and their sections are equal the possibility of *all* equal pieces corresponding in shade presents itself; in which of the cases I, II, ... VII is this possibility realised?" To answer it we have only to consult the general table

¹⁾ We can give an analogue to the "rule of contact" for the projections on π' in the form: "Two eightcells the projections of which overlap for one third or are in point contact are alike, two eightcells the projection of which overlap for two thirds or are in line contact are different with regard to the shading."

of results. We find that the answer is alternately no, yes, no, etc. So in the cases II, IV, VI all equal pieces correspond in shade. And of the other cases the first behaves differently from III, V, VII, in this sense that in the cases III, V, VII all equal pieces will correspond in shade, when the shading of the eightcells of both the plus layer and the minus layer have been inverted, an alteration which does not affect the first case.

18. If in the solution of the problem of reconstruction of the section of the block by putting together the different pieces, we confine ourselves to the pieces belonging to the groups of the middle layer, the result is a part of the whole section, included between two planes. These planes are evidently the planes of intersection of the intersecting space $S_3(\pi)$ with the two spaces separating the middle layer from the plus layer and the minus layer; as the two separating spaces are parallel to and equidistant from the space containing the centres of the eightcells of the middle layer, the two new planes, which we call $+\pi$ and $-\pi$, are parallel to and equidistant from π . In the initial position I the intersecting space $S_3(\pi)$ coincides with the space bisecting the distance between the separating spaces; for this reason the planes $+\pi$ and $-\pi$ are at infinity in that case and cannot appear in fig. 6. For which value of the angle of rotation Φ , supposed to increase from 0° to 90° do these planes $+\pi$, $-\pi$ begin to intersect the section? A single glance at fig. 8 shows us that this angle P_0OA is characterized by its tangent $\frac{1}{9}\sqrt{3}$, so it amounts to $10^\circ 53' 36''$; in the rhombohedral section of the block corresponding to this angle the planes $+\pi$, $-\pi$ would make their appearance in the extremities A , A' of the axis of the rhombohedron. For any acute angle that surpasses this value the planes $+\pi$ and $-\pi$ divide the section into three parts, the extreme ones of which — equal to one another — are left uncoloured, while the middle slice is coloured yellow. On the side-faces of the sections the polygons of intersection with the planes $+\pi$, $-\pi$ separate parts of the surface differing in shade. What appears in the planes $+\pi$, $-\pi$ themselves is shown in the case II for both the planes, in the other cases for the plane $+\pi$ only; in these sections can be seen how the polygons are built up of the d -faces and the d' faces of the pieces of the middle layer. The other plane sections, added to the figure-groups 10_{III} , 10_{IV} , ... 10_{VII} , refer to the endplane not visible in the principal figure.

After what has been said it will not be necessary farther to explain the meaning of the numbers without sign or with one of

the signs \pm on the side-faces of the sections of the block, on the endplanes of these sections and on the sections of these sections with the planes $+\pi$, $-\pi$. With regard to the letters A , B , C , D , E , indicating the sections of the separate eightcells of different shape, inscribed also in the endplanes and the sections with the planes $+\pi$, $-\pi$ it may suffice to remember that the forms A and B meet the invariable plane π respectively in regular hexagons and equilateral triangles marked on them, whilst the other forms C , D , E have no point in common with that plane.

19. A mere inspection of the groups of figures 10_{II} , 10_{III} , ..., 10_{VII} can show how the section of the block composed of the sections A , B , C , ... of the separate eightcells changes, when the angle of rotation ϕ varies from 0° to 90° , from which ensues that the angle ψ of the side-faces of the section with the plane π increases from $54^\circ 44' 9''$ to 90° . If we now push the rotation still farther and suppose that ϕ varies from 90° to 180° we pass at the supplementary values of these considered above by stadia VI' , V' , ..., I' closely connected to the sections VI , V , ..., I . For, if we consider the two positions ϕ and $180^\circ - \phi$ of the intersecting space $\mathcal{S}_3(\pi)$ as each other's mirror-image with regard to the initial position $\phi = 0$ of that space as a three-dimensional looking-glass, and remark that the reflection of the block itself in that looking-glass interchanges only the signs $+$ and $-$ of the eightcells of the plus layer and the minus layer, then it is evident that the two sections corresponding to two supplementary values ϕ , $180^\circ - \phi$ of the angle of rotation are each other's looking-glass image with regard to the plane π , the interchange of the signs \pm included.

We finish our considerations by a rapid survey of the different cases.

Case II. The sections differ but slightly from the initial case (fig. 6). If we invert the shading of the pieces corresponding to the plus layer and the minus layer, and we glue together the corresponding pieces $(1, +1)$, etc. of the groups G_6 , $+G_6$ and $(3, -3)$, etc. of the groups G_6' , $-G_6'$, we hit upon a figure which can be derived from the solid (fig. 6) by stretching in the direction AA' . As we already remarked the shading of the equilateral triangles in $+\pi$, $-\pi$ correspond to the d -faces and the d' -faces of the middle layer; if the shades were inverted they would refer to the d' -faces of the plus layer and the d -faces of the minus layer.

As a glance at the figure shows, the section with the plane $+\pi$

passes into that with the plane $-\pi$ by a rotation through 180° about the centre of the figure, succeeded by the substitution of $28 - k$ for any number k ; as this simple rule holds in general, we give in the groups 10_{III} , 10_{IV} , . . . , 10_{VII} the section with the plane $+\pi$ only.

If R represents a rhombohedral section the solids A , B , C satisfy the relations $R = A = B + C$; A and C are always white, B is always black.

Case III. The small triangle marked e represents the endplane below, invisible in the principal figure, as seen from within the section, i. e. from above; in the four following cases the polygons marked e must be interpreted in the same way.

Here we have $R = A + 2C = 2B$; A and C are white in the middle layer and black elsewhere, while B is black in the middle layer and white elsewhere.

Case IV. Here the relation holds $R = O + 2T$; the octahedra are white, the tetrahedra black.

This case is by far the most remarkable one; it solves the question: "how to divide an octahedron $O^{(3)}$ with edges equal to three units into octahedra $O^{(1)}$ and tetrahedra $T^{(1)}$ with edges unity?" If we place the $O^{(3)}$ with one of its diagonals vertically, the solution can be given as follows. Divide the vertical diagonal into six equal parts. Cut the octahedron $O^{(3)}$ by five horizontal planes passing through the points of division. Divide the square of the middle section into nine and the squares of the adjacent sections into four squares equal to the squares of the extreme sections. Then these $1 + 4 + 9 + 4 + 1 = 19$ equal squares

¹⁾ In connexion with the space-filling properties of octahedra $O^{(1)}$ and tetrahedra $T^{(1)}$ in the two different positions it is evident that it must be possible to fill an octahedron $O^{(p)}$ and a tetrahedron $T^{(p)}$, both with edges p , by $O^{(1)}$ and $T^{(1)}$. We only mention the results here. In the case of $O^{(p)}$ $\frac{p}{3}(2p^2 + 1)O^{(1)}$ and $\frac{2p}{3}(p^2 - 1)T^{(1)}$ of each of the two positions are required; in the case of $T^{(p)}$ we want $\frac{p}{6}(p^2 - 1)O^{(1)}$, $\frac{1}{6}p(p + 1)(p + 2)T^{(1)}$ corresponding in position with $T^{(p)}$ and $\frac{1}{6}p(p - 1)(p - 2)T^{(1)}$ in the opposite position. These results verify the relations in volume

$$\frac{p}{3}(2p^2 + 1)O^{(1)} + \frac{4p}{3}(p^2 - 1)T^{(1)} = p^3 O^{(1)}, \quad \frac{p}{6}(p^2 - 1)O^{(1)} + \frac{p}{3}(p + 2)T^{(1)} = p^3 T^{(1)}$$

based on the fact that 4 $T^{(1)}$ correspond to one $O^{(1)}$, as they ought to do.

In three-dimensional space divided into $O^{(1)}$ and $T^{(1)}$ there is plane contact between two polyhedra of different kind. So an $O^{(1)}$ and two $T^{(1)}$ in plane contact with it on two opposite faces form a rhombohedron, an $O^{(1)}$ and the eight $T^{(1)}$ in plane contact with it form the well-known figure of the two equal but oppositely placed tetrahedra penetrating one another in an octahedron.

represent the horizontal middle sections of the 19 $O^{(1)}$. Moreover the $4 + 12 + 24 + 12 + 4$ line-segments equal to unity, forming together the sides of the 19 squares, represent the horizontal edges of the tetrahedra $T^{(1)}$. Any of these 56 segments belongs to two tetrahedra if there are two segments lying in two adjacent planes crossing it at right angles and having their centres in the vertical through the centre of the chosen segment. If there is only one such segment the chosen segment belongs to only one tetrahedron. So we find in the layers between the planes successively $4 + 12 + 12 + 4 = 32 T^{(1)}$, 16 right-handed ones and 16 left-handed ones.

Case V. Here we find $R = A + 2 C + 2 B + 2 D$. Of these different pieces A and B occur in the middle layer only, C and D in the extreme layers only. The forms A are all white, the forms B all black. The forms C and D show this particularity that not even the equal forms belonging to the same extreme layer correspond in shade. So the upper layer contains 13 C , six white ones ($\frac{7}{12}, \frac{1}{4}$) and seven black ones ($\frac{1}{4}, \frac{7}{12}$), etc.

Case VI. Here $R = A + 2 C + 2 E + 2 B + 2 D$. Moreover all A, E, D are white, all C, B black.

Case VII. This case leads us back to the well-known plane-filling by regular hexagons and equilateral triangles.

Liscard
Groningen } November, 1907.

Fig. 1.

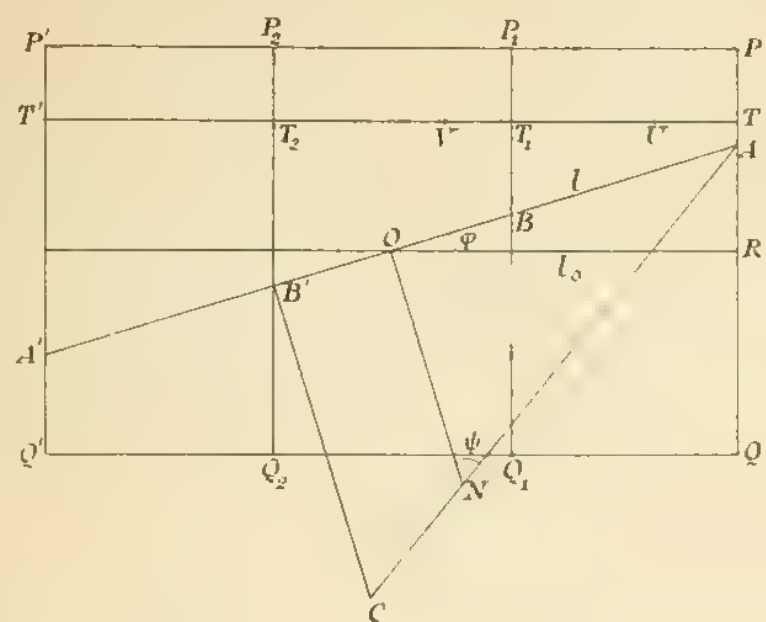


Fig. 2.

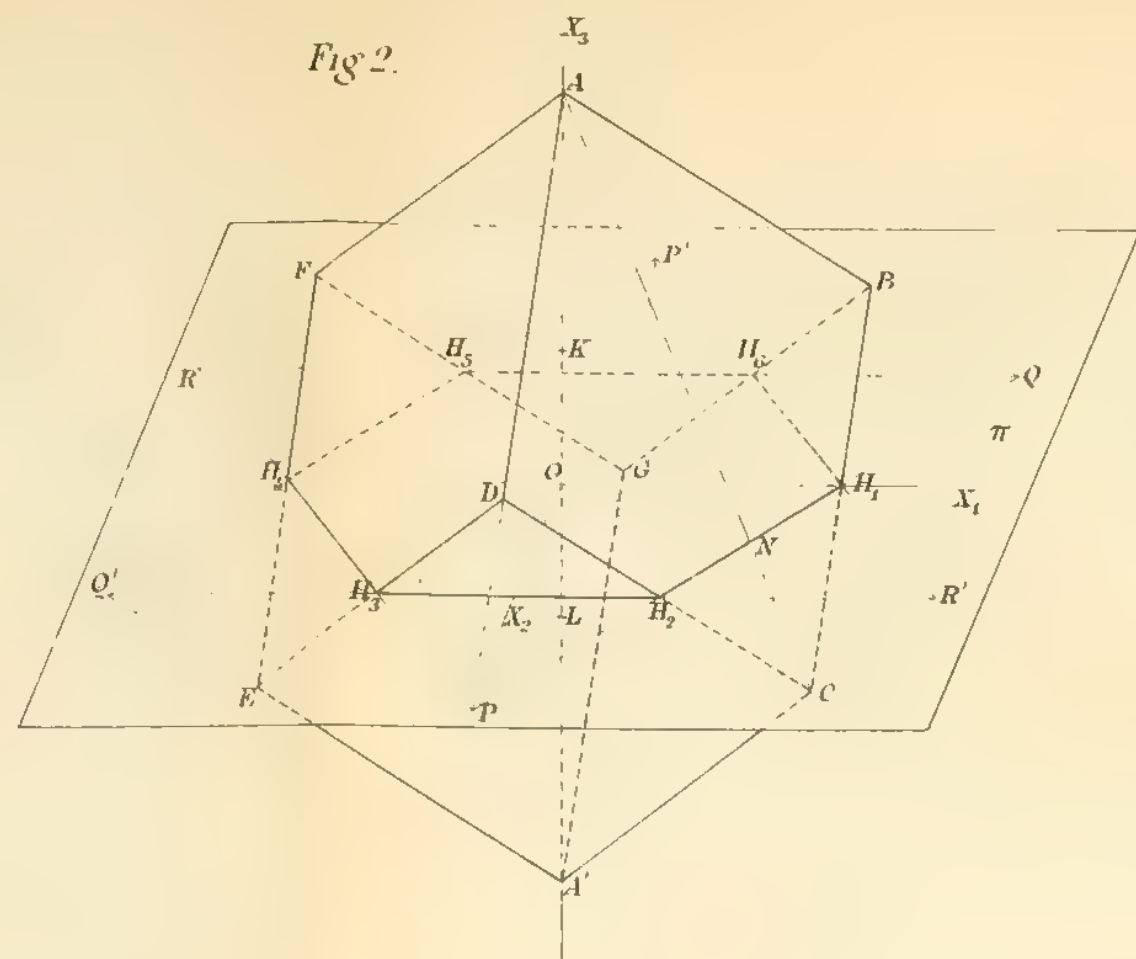


Fig. 4.

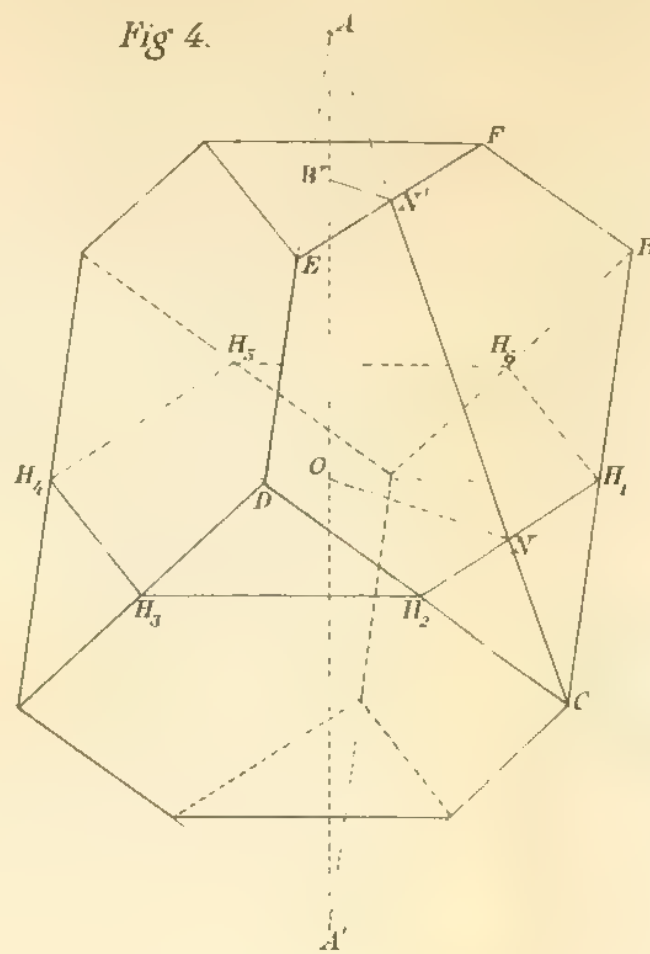


Fig. 6.

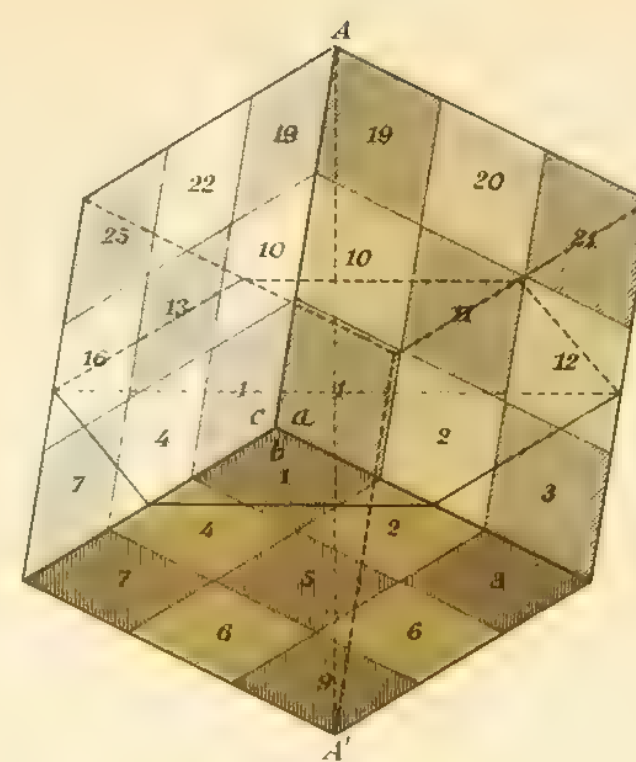


Fig. 8.

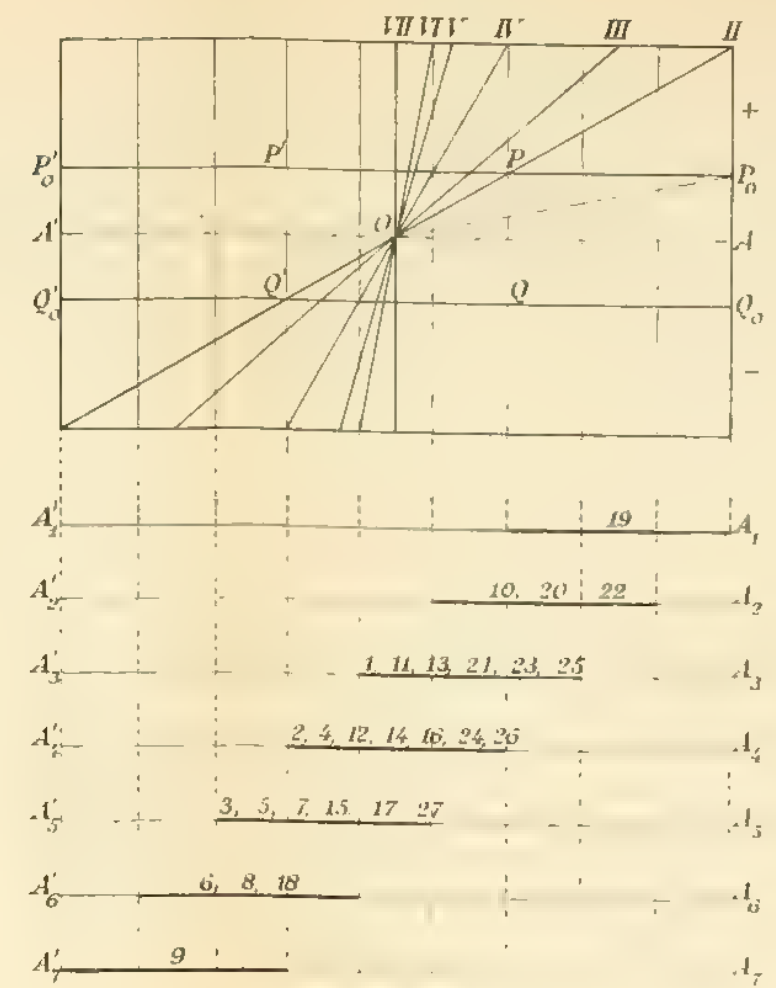


Fig. 3.

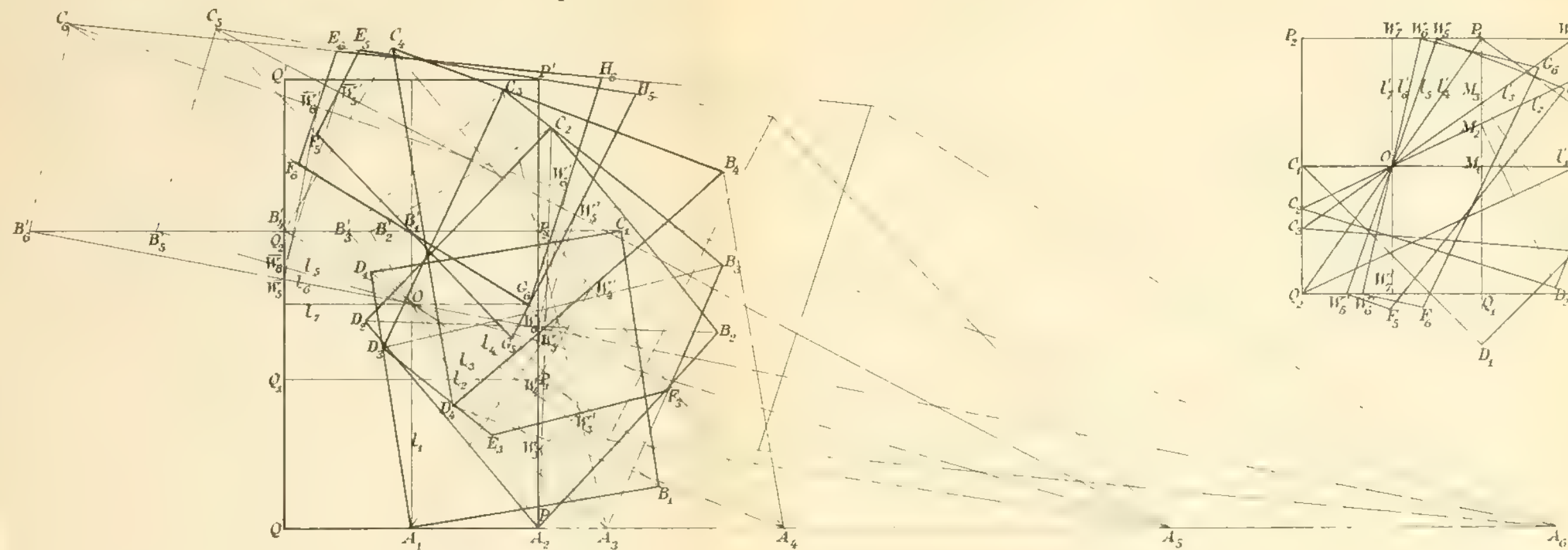


Fig. 5.

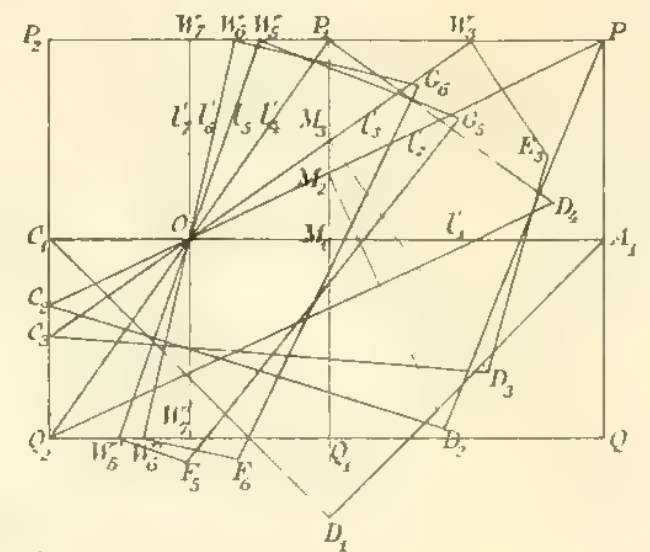


Fig. 7.

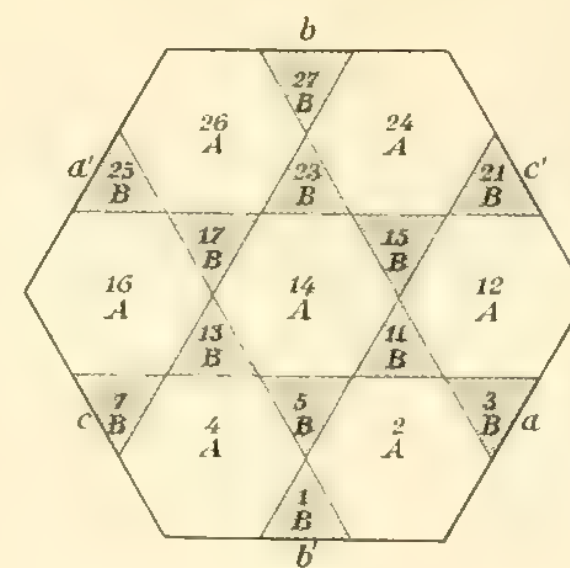
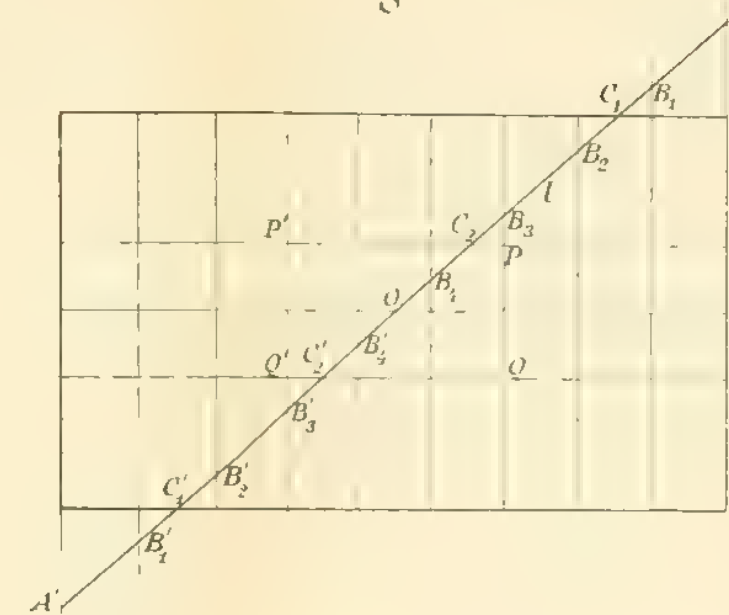


Fig. 9.





GEDRUKT BIJ
—° JOH. ENSCHEDÉ EN ZONEN °—
HAARLEM